大　学
数学系
自学丛书

复变函数论



FUBIAN HANSHU LUN

大学数学系自学丛书

复变函数论

东北师范大学

朱静航　主编



辽宁人民出版社

1983年·沈阳

复变函数论

朱静航 主编

辽宁人民出版社出版
(沈阳市南京街6段1里2号)
辽宁省新华书店发行
沈阳市第一印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：17 3/4
字数：450,000 印数：1—13,200
1983年11月第1版 1983年11月第1次印刷
统一书号：7090·208 定价：2.25元

序　言

"复变函数论"这门课程的基础是数学分析.

根据国家的统一教学计划，这门课程是数学专业的基础课，也是必修课. 它研究的对象是解析函数——一种特殊的复变函数类，所以也称为**解析函数论**. 数学里专门研究函数的领域称为**分析**——它以变量间的依赖关系作为自己的对象. 单复变函数论（简称**函数论**）和数学分析（微积分）、微分方程、微分几何等，都是分析这个领域的重要组成部分，因此复变函数论亦称**复分析**. 它在初期是实变函数分析在复数域的推广，它的基本概念如函数、极限、连续、导数等等，在形式上与数学分析里的相应概念相类似. 在推广的过程中有所发展，到十九世纪中叶，逐步形成了数学里分析领域重要分枝.

这门课程，不但数学专业必读，其他如物理以及工科等各有关专业，都要程度不同地涉及其中的某些内容. 特别是复变函数论的理论和方法，在流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等物理和工程技术各学科中，都有广泛的应用，并是解决有关问题的有力工具.

根据1980年教育部颁发的关于"复变函数论教学大纲"，其主要内容为复变函数的微商、积分、级数、留数理论、共形映射、解析开拓和黎曼曲面等. 这些内容基本上是围绕L. Euler, A. L. Cauchy, 以及后来的P. G. L. Dirichlet, K. Weierstrass, G. F. B. Riemann等人的工作，和解析函数的特征性质展开的. 这些内容尽管是较古典的，但是又是最基本的理论和方法，这对于我们加深数学修养，增

强数学工作能力，显然是必须的；为学习后继课程，自学和钻研一些有关问题，打下必要的基础。

本书除了一些必备的基础知识外，还适当地纳入了某些现代的内容，指出了某些新发展的方向，这对于巩固和加深基础知识，扩大眼界，了解发展趋势，培养能力是有益的。

本书中带*号的内容，如时间紧，可以省略或粗读。

书中第一章主要是基本概念，着重讨论了复数的性质和运算法则，以及复变函数的函数、极限和连续等概念。如果读者对数学分析有一定基础，本章可以粗读。第二至六章要求精读，这是本书的中心，它们反映了解析函数在相应条件下的特征，如满足C.—R.方程，可以用多项式逼近，沿闭路积分为零，展开成幂级数，留数定理，共形映射等，七、八、九三章可以作为一般的学习和要求。但也要了解其主要问题、思路和方法。

我们针对自学这个特点，较多地安排了一定数量的例题和习题，以及解答。我们认为例题和习题是帮助读者深刻理解概念、定理，论证和计算问题，获取思考方法等，必不可少的内容。因之要求读者，在读完章节之后，一定要阅读例题，选作习题（不要求全作），才能深入理解所学的知识和问题的本质。还要从实际出发，循序渐进，刻苦钻研。

编　者

目　　录

第一章　复数和复变函数

§ 1·1　复数概念

直到目前为止，所学过的数学课程的一切论证和运算，基本上是在实数范围内进行的．从本门课程起，将要迈出实数范围而进入复数领域．对于某些实数概念，尽管我们在数学分析中，已学习过，但必要时仍将引入或加以证明．这种重复还是需要的．

现今“集合论”的观点的“统治”地位，是现代数学特点之一．在数学课里包括中小学数学课，都业已渗透或应用集合论的观点、语言和记号．本书也将部分地应用．例如记号“$\in$”表“属于”，“$\overline{\in}$”或“$\notin$”表“不属于”，“$\subset$”表“包含于”，“$\cup$”、“$\cap$”表示两集合的“并”、“交”等等．其他符号将随时引进．我们认为读者对上述记号的意义已有所了解．因而就不赘述了．

数学里讨论的对象，如代数讨论的对象是“数”、“式”，几何里讨论的对象是“点”或“直线”等，都称为“元素”或简称为**“元”**．由有限多个元素或无穷多个元素所组成的集体，称有限**集合**或**无穷集合**．

本章讨论的对象主要是复数和复数集．什么是复数，什么是复数集，它们都有哪些性质．这是本章讨论的主要课题．另一个课题是讨论复变函数概念及其某些性质．讨论复变函数，特别是讨论一种特殊的复变函数类——解析函数类，则是全书的任务．本章只引入复变函数概念，函数的极限和连续性．

1．复数及其被认识的历史梗概

我们把形如

$$z=x+iy$$

的数称为**复数z**．其中i称为**虚数单位**，并规定 $i^2=i\cdot i=-1$，或$i=\sqrt{-1}$（这里$\sqrt{-1}$表示它可能取的两个值中的一个，普通取正值）；x与y都是任意的实数．依次称为 z 的**实部**(Real) 与**虚部**(Imaginary)．采用Weierstrass的符号，分别表示为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

例如：复数$\alpha=\sqrt{2}+i$，则$\sqrt{2}=\mathrm{Re}\alpha$，$1=\mathrm{Im}\alpha$；

$$\beta=\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}i,\quad 则\frac{4}{3}=\mathrm{Re}\beta,\quad -\frac{\sqrt{5}}{2}=\mathrm{Im}\beta.$$

历史梗概①

远在三世纪，人们能解数字系数的某些一元方程．但对于$x^2+1=0$ 却无办法．原因是受实数范围的限制．直到十六世纪中叶，意大利数学家Cardano（卡当）在解一元三次方程时得出方程：

$$x^3+px+q=0$$

的根为

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\quad R=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

显然当$R\geqslant0$ 时，$\sqrt{R}$为实数，方程有解．但当$R<0$ 时，在实数范围内$\sqrt{R}$无意义．于是为突破实数范围的限制而引入虚数．不但$\sqrt{R}$有意义，方程$x^2+1=0$有解，并且使数域扩大．经过不少人的努力，使复数与平面上的点，与物理的向量联系起来，复数才在数学里巩固下来，从此数学也进入了新的阶段．在十八世纪，Euler（欧拉）在他的公式：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

---

① 朱静航：《$\sqrt{-1}$是数学发展的必然产物》．《吉林师大学报》1974年，第1期．

中，首先引入记号i.

2. 复数的算术运算

设复数$z=x+iy$，称 $x-iy$ 为z的共轭复数。记为$\bar{z}=x-iy$. 把实数$\sqrt{x^2+y^2}$称为z的绝对值或模($\sqrt{\ }$取正值)把$\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$称为 z 的辐角。

关于两个复数$\alpha=a+bi$及$\beta=c+di$ 的四则运算和相等，用下列等式来定义：

$$\alpha\pm\beta=(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i,$$

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i,$$

$$\alpha/\beta=(a+bi)/(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,\ \beta\neq 0.$$

当且仅当$a=c$，$b=d$时，$\alpha=\beta$，$a+bi=c+di$.

§ 1·2 复数的几何表示

1. 复数平面

法国数学家 Argand（阿刚）在全体复数和坐标平面上的点之间建立起一一对应关系。即令复数$z=x+iy$与坐标为(x,y)的点相对应，这个坐标平面称为复平面或称Argand平面，亦称 Gauss（高斯）平面，用S来表示，S_z表z平面。

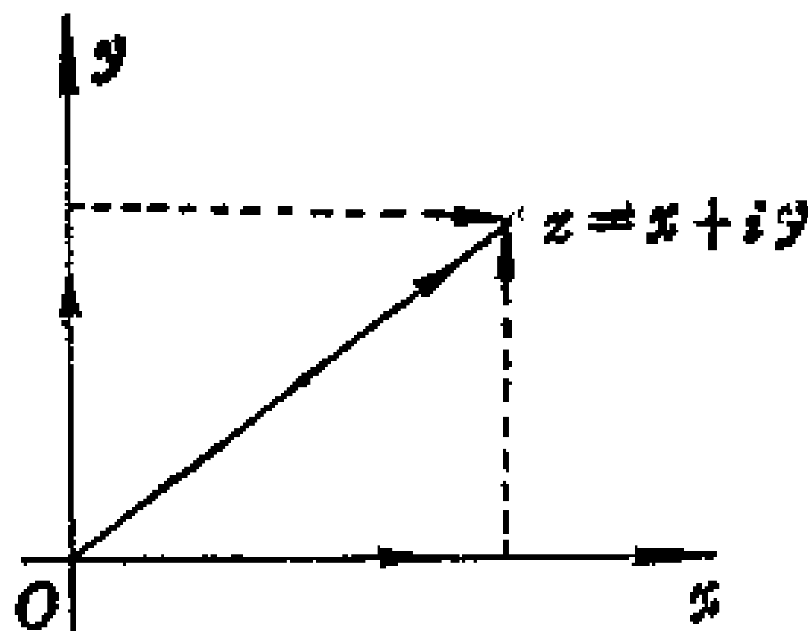


图 1·1

今后我们对于S的点和数就不加区别地使用。

复数 $z=x+yi$，或(x,y)也可以用S_z的一个自由向量$\overrightarrow{Oz}$来表示

(如图1·1)．它在轴上的射影为$\overrightarrow{Ox}$与$\overrightarrow{Oy}$，它们的和等于向量$\overrightarrow{Oz}$．下列不等式成立：

$$-|z|\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant |z|,$$

$$-|z|\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant |z|.$$

把复数看成是两个向量之和，也符合两个向量的加法运算．这个和就是平行四边形的对角线$\overrightarrow{Oz}$．

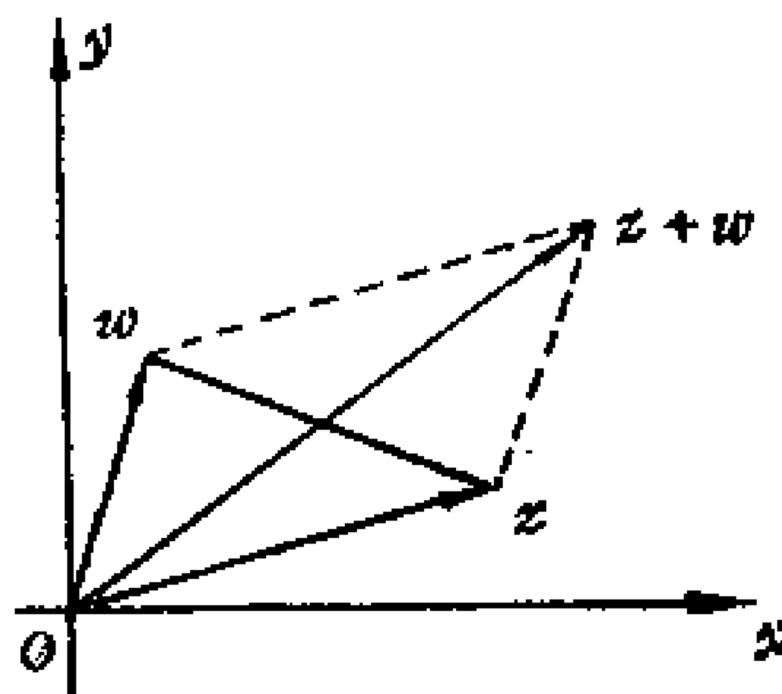


图 1·2

对于两个向量z与$w\in S_z$，差数模

$$|z-w|$$

就是z与w两点之间的距离．(图1·2)

下列不等式，显然成立

$$|z-w|\geqslant |z|-|w|;\quad |z+w|\leqslant |z|+|w|.$$

其中只有当z与w共线且同方向时，等号才成立．

把复数z表示成向量，更可以增加复数的实际意义．例如，河流的水流，设在每一点(x,y)的速度为V，可以写成复数形式为：

$$V=V_x+iV_y$$

其中V_x与V_y是V的分速度．速度V是分速度之和．

2．复数的极坐标形式

应用直角坐标(x,y)与极坐标(ρ,θ)之间的对应关系：

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$$

则
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}.$$

$z=x+iy$与$\bar{z}=x-iy$可以分别表示成极坐标的形式：

$$z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad \bar{z}=\rho(\cos\theta-i\sin\theta).$$

应用Euler公式，则得z的指数表示式：

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta},\quad \bar{z}=\rho(\cos\theta-i\sin\theta)=\rho e^{-i\theta}.$$

其中：$\rho=|z|=|\bar{z}|=\sqrt{x^2+y^2}$是$z$的模．$\theta$与$(-\theta)$分别称为$z$与$\bar{z}$的

辐角．并分别记为$\mathrm{Arg}z$和$\mathrm{Arg}\bar{z}$．（Arg是Argument的缩写）．

设ϕ是z的辐角，则$\phi+2k\pi$（k为整数）仍是z的辐角．故$\mathrm{Arg}z=\phi+2k\pi$是多值的．我们规定$\mathrm{Arg}z$的位于$(-\pi,\ \pi]$的值称为**Arg$z$的主值**，记为$\arg z$．即$-\pi<\arg z\leqslant\pi$（或$0\leqslant\arg z<2\pi$）．于是．

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots.$$

显然，互为共轭的复数z与$\bar{z}$，具有相同的模，辐角的主值相差一个符号．即

$$\arg\bar{z}=-\arg z.$$

它们的几何位置，对于实轴为对称．而且

$$\sqrt{z\bar{z}}=|z|.$$

当z为正实轴上的点，z为正实数，则$\arg z=0$；当z为负实轴上的点，z为负实数，则$\arg z=\pi$；当$z=0$时，其辐角失去意义，即$z=0$是唯一辐角未定义的复数．

应用复数的指数形式（或极坐标形式），则

$$z_1\cdot z_2=\rho_1e^{i\theta_1}\cdot\rho_2e^{i\theta_2}=\rho_1\rho_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]=\rho_1\rho_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

$$z_1/z_2=\rho_1e^{i\theta_1}/\rho_2e^{i\theta_2}=\frac{\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2+i\cos\theta_2)}$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

这就是说：

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1||z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,\quad \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

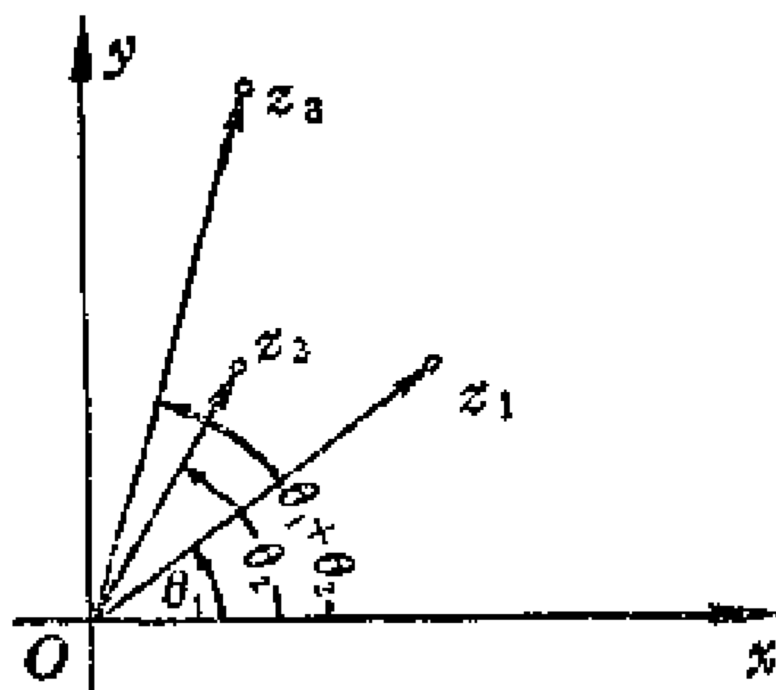


图 I·3

这里应理解为：等式两端所

代表的是同样的一组值．因为Arg$z$是多值函数．（图1·3）所表现的是主值arg$z$．

显然，$|z\cdot\bar{z}| = |z||\bar{z}| = |z|^2$； $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$；

$$\arg(z\cdot\bar{z}) = \arg z + \arg\bar{z} = \arg z - \arg z = 0$$

3．De Moivre公式和复数的n次方根

设$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$，$n$是正整数，则

$$z^n = \rho^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)．$$

称为**De Moivre（棣莫弗）公式**（学习指导中证n为有理数）．

利用这个公式，复数的乘方运算可以施行．同时开n次方也易于导得．即满足方程

$$w^n = z,\quad z \neq 0．$$

的w称为z的n次方根，记为 $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$．现设

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),\quad w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

于是：

$$r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r^n = \rho,\quad n\phi = \theta + 2k\pi．(k\text{是整数})$$

因为r与ρ都是正实数，

$$r = +\sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}};\quad \phi = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)．$$

其中$r = +\sqrt[n]{\rho}$是ρ的正实根．因之，

$$w_k = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = +\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

（k是整数）．这里的k尽管是任意的整数，但所得到的w的值，只有n个是互不相同的根．它们是

$$w_0 = +\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1 = +\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

………………………

$$w_{n-1} = +\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

它们的模都是$+\sqrt[n]{\rho}$。即都位于以原点为中心，半径为$+\sqrt[n]{\rho}$的圆周上。相邻两根的辐角的差都是$\frac{2\pi}{n}$。因此，这n个根恰好把圆周分成n等分．它们是圆周的内接正n边形的顶点．

总之，当$z\neq0$时，它的n个n次方根为$w_k=z_k$，$k=0, 1, 2, \cdots n-1$。

$$z_k = z^{\frac{1}{n}} = +\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,$$

$\cdots$，$n-1$。

在特殊情形下，设$\rho=1$，$n=8$，则$z=1$的8次方根，分布在以原点为中心半径为1的圆周上（图1·4是8个方根分布情况）．

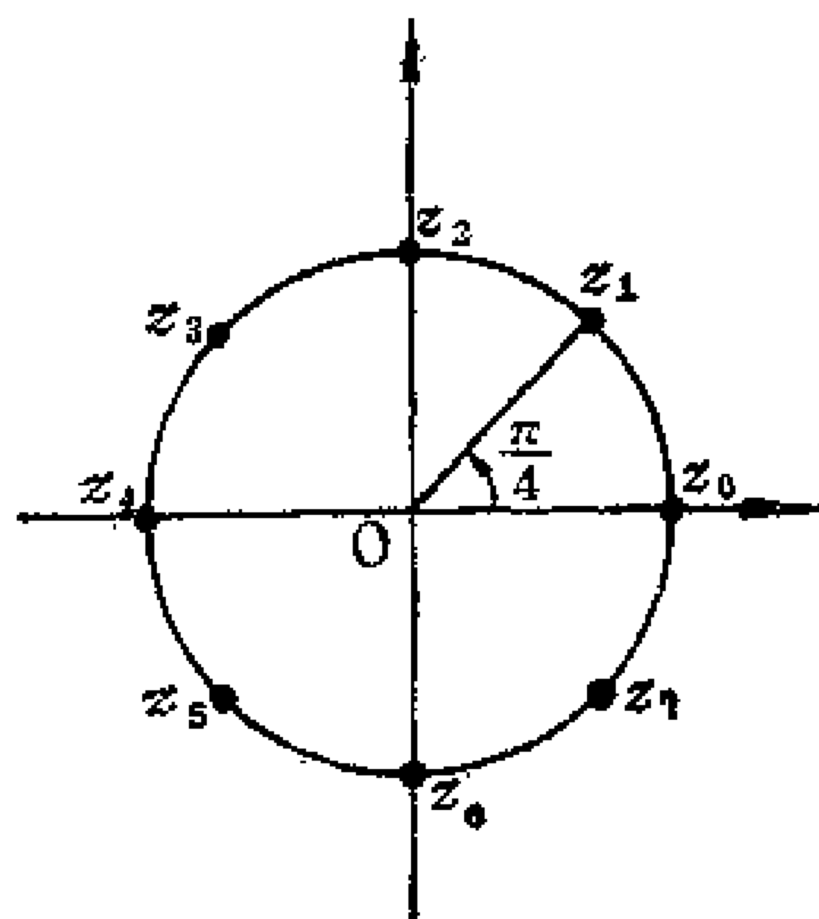


图1·4

例 1 设$z=1$，$n=3$，则z的立方根为：

$$z_k = z^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}, k=0,1,2.$$

这三个方根是：

$$z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

它们同位于原点为中心，半径为1的圆周上，相邻两点的辐角相差$\frac{2}{3}\pi$。它们是圆周的内接正三角形的顶点。

§1·3 扩充的复数平面

在全体复数里加添称为"无穷大"，记为∞的新元素，对应的是坐标平面添加了一点称为**无穷远点**，仍记为∞。这个平面称为**扩充的复平面**，记为$\hat{S}$，即$\hat{S}=S\cup\{\infty\}$。我们把与有限复数相对应的点称为**有限(远)点**，即S上的点。

新元素"∞"参加运算，由下列关系来定义，即定义$\infty=\frac{1}{0}$，于是当

$z\neq\infty$时，$z\pm\infty=\infty\pm z=\infty$；$z\neq0$时，$z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty$，$\frac{z}{0}=\infty$，$\infty\cdot\infty=\infty$。当$z\neq\infty$时，$\frac{z}{\infty}=0$，$\frac{\infty}{z}=\infty$。但下列诸式无意义：

$$\infty\pm\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0}$$

我们曾把复数表示成平面的点或向量。有时也用其他几何方法来表示。球极平面射影变换是用球面上的点表示复数的又一几何方法，利用这种方法可以得出$\hat{S}$的直观模型，及无穷远点的几何意义，球面上的N点（北极）是∞的射影。

现取欧氏空间的球面Σ，设其方程为：

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_3.$$

它的南极是S的原点，Σ与S相切于原点（图1·5）。

设Σ的中心为$O\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，球的半径为$\frac{1}{2}$。北极$N$的坐标设为$N(0,0,1)$。连结$N$与平面$S$上的点$z=x+iy$的直线过球面$\Sigma$上

的点$z(x_1, x_2, x_3)$。点Z是唯一的，z与z'不同时，Z与Z'也不同。反之，设Σ上一点$Z(\neq N)$，则直线NZ必与S_z平面相交于唯一的一点z；Z与Z'（都$\neq N$）不同时，z与z'也不同。这样，S_z上的全体有限远点与Σ上点除N外都是一一对应的。这种一一对应关系，称为**球极平面射影**。即Z是z在Σ上的射影，z是Z在平面S_z上的射影。

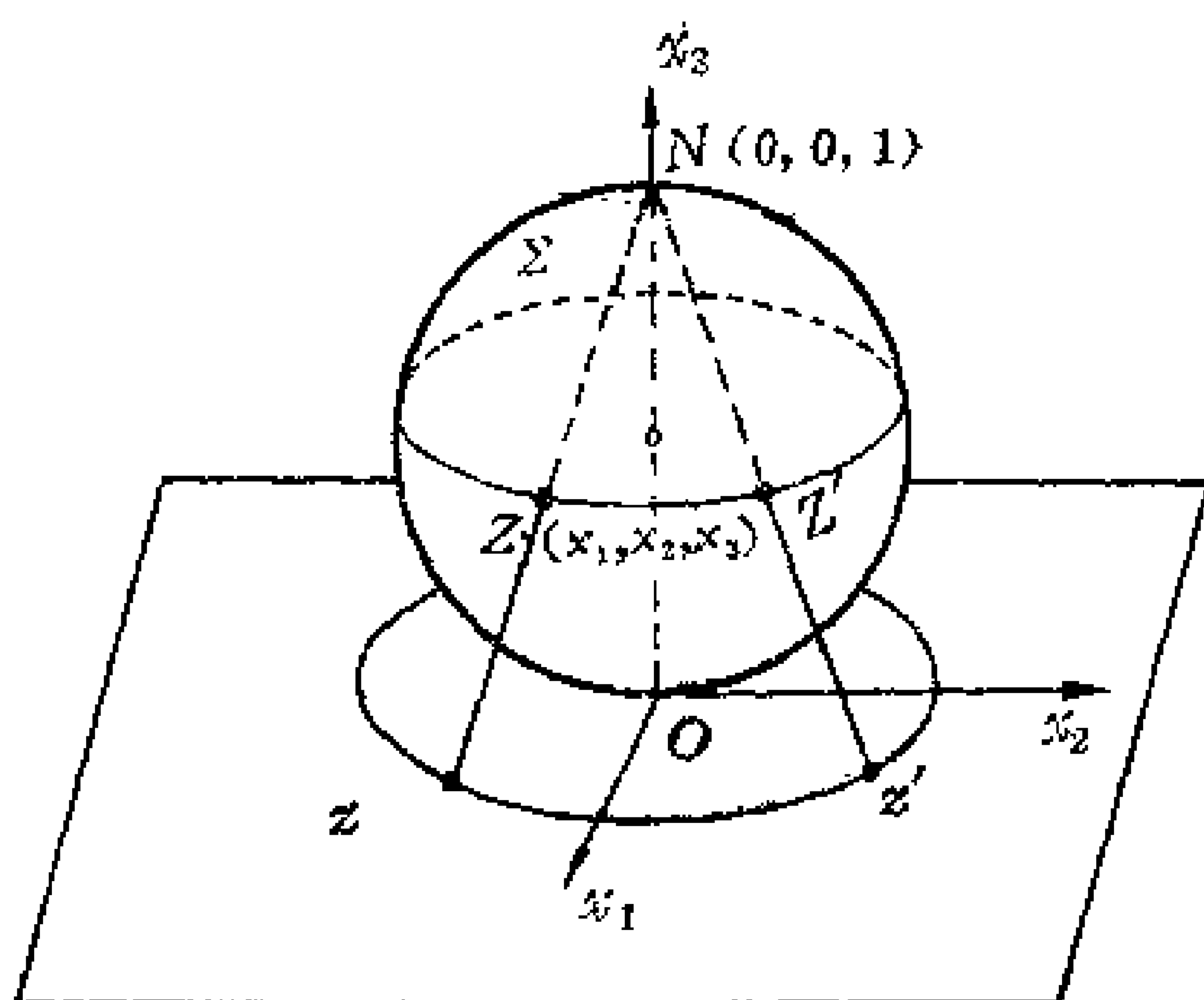


图 1·5

当点z沿任意一条射线逐渐离开原点向无穷远点趋近时，Z点在Σ上必沿一条弧线向N点趋近。这样，扩充平面$\hat{S}$的无穷远点，便与Σ上的N点相对应。N就是∞的射影。$\hat{S}$上的点与Σ的点便一一对应了。Σ上的赤道与$\hat{S}$上中心为原点的圆周相对应，等等。我们把Σ称为**复数球面**或 **Riemann 球面**。它是$\hat{S}$的直观模型，$\hat{S}$上的无穷远点的直观模型是N。扩充复平面亦称**闭复平面**或**闭平面**，否则称为**开复平面**或**开平面**（亦即复平面）。

上面得出球极平面射影的几何构造，及其间的某些几何图形的关系。现在要求出球极平面射影变换公式及其性质。

依上面所取的坐标，Σ的方程为：

$$x_1^2+x_2^2+\left(x_3-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

或 $x_1^2+x_2^2+x_3(x_3-1)=0$。 (1)

因为z，Z，N在同一直线上，故

$$\frac{x_1}{x}=\frac{x_2}{y}=\frac{x_3-1}{-1}. \qquad (2)$$

解（1）及（2），得

$$x=\frac{x_1}{1-x_3},\quad y=\frac{x_2}{1-x_3},\quad z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3} \qquad (3)$$

并且 $$x^2+y^2=\frac{x_3}{1-x_3}$$

反之，有
$$x_1=x/(x^2+y^2+1)=(z+\bar{z})/2(1+z\bar{z}),$$
$$x_2=y/(x^2+y^2+1)=(z-\bar{z})/2i(1+z\bar{z}), \qquad (4)$$
$$x_3=(x^2+y^2)/(x^2+y^2+1)=z\bar{z}/(1+z\bar{z}).$$

这些公式称为射影变换公式．当已知$z=x+iy$，即可确定出球面上对应点Z的坐标及问题之逆．

习　题(1·1)

1．试将$2+2i$，$5i$，$a+ai$（a是实数）分别化成$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式．

2．求$\dfrac{z+2}{z-1}$的实部和虚部，$z=x+iy$．

3．解方程　$z^4+i=0$．

4．设z与w均为复数，试证：

$\operatorname{Re}(z+w)=\operatorname{Re}z+\operatorname{Re}w$，$\operatorname{Im}(z+w)=\operatorname{Im}z+\operatorname{Im}w$．

5．试证：$(|x|+|y|)/\sqrt{2}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$，$z=x+iy$．

6．设$(x-iy)/(x+iy)=a+bi$，试证：$a^2+b^2=1$．

7．试证：$(z+w)^n=z^n+\binom{n}{1}z^{n-1}w+\cdots+\binom{n}{n}w^n$，

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

8．设w_k是1的n次方根，$k=0,1,2,\cdots,n-1$．试证：

1) $1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0$. 其中$w\neq 1$ 是w_k 中的任一个;

2) $1+w_1^h+w_2^h+\cdots+w^h_{n-1}=0$. h为正整数,不是k的倍数.

9. 应用De Moivre公式, 证明 Lagrange 的两个三角等式:

1) $\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\sin\frac{n+1}{2}\theta\cdot\cos\frac{n\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta}{2}$;

2) $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\sin\frac{n+1}{2}\theta\cdot\sin\frac{n\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta}{2}$.

其中设 $\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$.

10. 设 $|z_0|<1$, 试证:

1) $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|=1$, 当 $|z|=1$; 2) $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|<1$, 当 $|z|<1$.

11. 试证:

1) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$; 2) $|z_1-z_2|\geqslant\Big||z_1|-|z_2|\Big|$.

§ 1·4 平面点集

1. 某些平面点集合与定理

在全体复数里, 按照任意一个规则选取有限个或无穷多个复数就成一个数集合. 相应地在复平面里就有一个点集合. 今后把点与数, 点集和数集的意义看成一致并不加区别地使用.

数学分析里的“域”, 在一元时就是区间. 复变函数论里的一个域是具有“二维流形”的平面点集. 这时的线段或弧段不能成为域.

在复平面上, 以某一点z_0为中心, $\rho>0$为半径的圆周 c 的内部一切点z, 即满足 $|z-z_0|<\rho$的点z的集合, 称为点z_0 的邻域, 记为 $B(z_0, \rho)=\{z: |z-z_0|<\rho\}$. 我们称集合 $\{B(z_0, \rho)\sim\{z_0\}\}=\{z: 0<|z-z_0|<\rho\}$为 z_0 的去心邻域. 有时也把$B(z_0,\rho)$称为以z_0为中心,

半径为ρ的圆域。当$z_0=0$与$z_0=\infty$时，分别称$B(0,\rho)=\{z: |z|<\rho\}$（或$|z|<\rho$）与$B(\infty, R)=\{z: |z|>R\}$（或$|z|>R$，$R$是任意的正数）为原点与无穷远点的邻域。从复数球面$\Sigma$来看，无穷远点的邻域就是北极$N$的邻域，某个纬线以北的地区。

设E是平面点集，如果$z_0\in E$，并有一邻域$B(z_0,\rho)\subset E$，称z_0为E的**内点**。如果z_0的某一个邻域内的点都不属于E，则称z_0为E的**外点**。如果在z_0($\in E$或$\notin E$)的每一个邻域内，至少有一点$\in E$，也至少有一点$\notin E$，称z_0为E的**界点**。E的界点全体所组成的集称为E的**边界**，有时记为∂E。例如$B(0,\rho)$的边界$\partial B=\{z: |z|=\rho\}$为圆周。或记为$|z|=\rho$。

如果z_0的任一邻域都含有E的无穷多个点，称z_0为**E的凝聚点**。如果存在$\rho>0$，除z_0外，$B(z_0, \rho)$不再含有属于E的点，称z_0为**E的孤立点**。

如果E的点都是内点，称E为**开集合**。如果E的凝聚点都$\in E$，称E为**闭集合**，记为$\overline{E}$。如果在平面S上能有一个圆域$B(z_0, \rho)$，使$E\subset B(z_0, \rho)$，则称E为**有界集**，否则称E是**无界的**。这就是说，对于有界集E，总有一个正数ρ存在，使$E\subset B\{z: |z|<\rho\}$；反之，亦真。

下列三个定理常用，数学分析里已证过。

定理1（Bolzano-Weierstrass定理）每一个有界无穷点集，至少有一个凝聚点。

定理2（闭集套定理）设无穷闭集列$\{\overline{G_n}\}$，至少一个为有界且$\overline{G_n}\supset\overline{G}_{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(G_n)=0$，（$d$是$\overline{G_n}$的直径），则必有唯一的一点$P_0\in\{\overline{G_n}\}$

定理3（Heine-Borel定理）设圆域集$\{B(z, \rho)\}$为有界闭集E的覆盖，则从$\{B(z, \rho)\}$中可选取有限个圆域把E覆盖住。

2. 区 域

(i) **Jordan（约当）曲线**—Jordan意义下的连续曲线，

我们把依条件运动点的轨迹称为曲线。例如，在平面上，一条直线就是其坐标满足线性方程的点的轨迹；圆周c:{z: $|z|=1$}，就是其坐标（x，y）满足方程$x^2+y^2=1$的点的轨迹；反之满足线性方程$ax+by=c$（a，b，c是实数）的点(x，y)的轨迹是直线；满足方程$x^2+y^2=1$的点的轨迹，就是原点为中心半径是1的圆周。

因之，平面曲线就是平面上依条件动点的轨迹，或动点所经过的点所组成的集合。

Jordan给出了如下的定义：

设$\phi(t)$与$\psi(t)$都是$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$的连续实函数。复平面上的点($x$,$y$)，

$$x=\phi(t), \quad y=\psi(t)$$

的集合，称为平面的**连续曲线**。

如令 $z=x+iy$，则连续曲线L表为：

$$L: \ z=F(t)=\phi(t)+i\psi(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

称点($\phi(\alpha)$，$\psi(\alpha)$)为L的**起点**；($\phi(\beta)$，$\psi(\beta)$) 为L的**终点**。起点和终点重合的连续曲线称为**闭曲线**。当t的两个数值不同时（除α,β外），对应地曲线上的两个点也不相同时，称L为**无重点**。这样的曲线称 **Jordan曲线**（**弧**）或**简单弧**。端点重合的 Jordan 曲线称**简单闭曲线**。关于简单弧和简单闭曲线，也可以定义为：与闭区间[0，1]的点一一对应的点的集合；与圆周的点一一对应的点的集合，分别称为**简单弧**和**简单闭曲线**。它们都是**双方连续的**。比如，$z=\cos t+i\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$为简单闭曲线。当$t=0$，$t=2\pi$时，$z=1$。

Jordan关于曲线的定义和人们对于曲线的观念是一致的。事实上，把t看成是时间，$x=\phi(t)$与$y=\psi(t)$表示着在[α，β]的一段时间的瞬时速度，即点（x，y）在平面里变动时的坐标。

设曲线 $z=F(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，有一定的长度则称其为**可求长的**。

设$\phi(t)$与$\psi(t)$在$t\in[\alpha, \beta]$时，有连续的一阶导数$\phi'(t)$与 $\psi'(t)$存在，且$\phi'(t)+i\psi'(t)\neq0$（即曲线有连续变化的切线），称此曲线为**光滑曲线**。

数学分析里，一条光滑曲线是可求长的。它的长度可由公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

来求得。

我们把有限条光滑曲线所组成的曲线，称为**逐段光滑曲线**．其特例，“曲线”可以是一条折线．比如，多边形的周界．

今后如无特殊声明，所给出的连续曲线，都是光滑曲线，或逐段光滑曲线．

②**区域**

设集合E的任意两点，都可以用一条完全属E的连续曲线来连接，则称E是**连通的**．可以证明，这个曲线可以用某一条折线来代替（证明从略）．因此，设E内任意两点都可以用完全属于E的折线来连接，也称E是**连通集合**．

我们把连通的开集合，称为**区域**或**开区域**．用G或D来表示．区域G加（并）它的一切边界点，称为**闭区域**，记为$\overline{G}$，即$\overline{G}=\{G\cup\partial G\}$．比如，圆域$B\{z:|z|<\rho\}$并上它的边界$C\{z:|z|=\rho\}$，称为闭圆域$\overline{B}:\{z:|z|\leqslant\rho\}$，即$B\{z:|z|<\rho\}\cup C\{z:|z|=\rho\}$．

设区域G被含于以原点为中心的圆内，则称G是**有界的**．否则称是**无界的**．这和集合的有界、无界定义一样．

③**单连通区域和复连通区域**

定理4（Jordan 曲线定理） 一条简单闭曲线不过无穷远点时，就把平面分成两个区域，闭曲线是它们的公共边界。

这个定理的最初证明，出自 Jordan 本人，当时证明不正确．1905年 Veblen 第一个给出了正确证明．其他证明方法有多种．这里证明从略．

设C为一简单闭曲线．依Jordan 闭曲线定理，C把平面分成两个区域，其中不含无穷远点的区域为**C的内部**，记为**int(C)**；另一个为**C的外部**记为**ext(C)**．我们把∞点不在其边界或内部的区域，称为**有限区域**．否则为**无穷区域**．

由简单闭曲线C在复平面所分成的两个区域，具有这样的一个

特征：连接int(C)的点与ext(C)的点的连线，必与C至少有一个交点。

因为沿闭曲线C可有两个相反的方向，我们规定：当点P沿C移动时，int(C)总在前进方向的左边，我们就把这个方向称为**C的正向**，用C表示。也就是说，把逆时针方向定为C的正向；把顺时针方向定为C的负向，并用符号C^-来表示。

设区域$G\subset S$，如能在G内任作一条简单闭曲线C，都能使int(C)$\subset G$，则称**G为单连通区域**。否则称为**多连通或复连通区域**。

我们今后所指的单连通区域，是指下列三种集合：(a)简单闭曲线内部点的全体；(b)由无穷远点到无穷远点的曲线（如抛物线那样）其一方的点的全体；(c)全复平面S。

§ 1·5　复变函数

这里只引进部分概念。关于常数、自变量、因变量、显函数、隐函数等，都与实函数的相同，就不一一列举了。

1. 函数概念

当点集$E\subset S_z$，如果对于每一个点$z\in E$，依一定的规律，有唯一的一点w与之对应，则称在E上定义一个（单变量）单值函数$w=f(z)$，称E为它的定义域。

我们把函数值w所组成的集，设为N，称为值域。在特殊情况下，N可以为区域或为闭区域。

如果对于每一个$z\in E$，对应的w不是唯一，而是多个值，甚至无穷多个值，则称在E内定义一个**多值函数**。例如，函数$w=\sqrt[n]{z}$，$n\geqslant 2$，是定义于S_z上的一个n值函数。它对于每一个非0的z，w有n个值。这些值分布在圆周$C=\{z:|z|=\sqrt[n]{|z|}\}$上。同样$w=\mathrm{Arg}z$对于每一个$z\neq 0$，$w$为无穷多值。本书第八章将论述初等多值函数。本书主要讨论单变量单值函数。

设 $w=u+iv$，$z=x+iy$，则$w=f(z)$相当于两个实函数

$$u=u(x,\ y),\quad v=v(x,\ y)$$

这样，对于复变函数 $w=f(z)$ 的研究，有时为方便计，化成两个实变函数的研究．Cauchy就是将复变函数作为单复变数z的一元函数来研究．Riemann就把$w=f(z)$ 作为两个实变函数来研究的，俩人的出发点虽各不同，但结果是一致的．

比如，对于函数

$$w=z^2 \tag{1}$$

来说，令$z=x+iy$，$w=u+iv$，则由

$$u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy,$$

得方程组：

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy. \tag{2}$$

这样，对z^2的研究，转化为对方程组（2）的研究．反之，亦真．

这个事实说明，复变函数 $w=f(z)$ 作为z的函数的理论，可以转化为x，y两实函数$u(x,\ y)$与 $v(x,\ y)$ 的理论．为方便计，今后这种转化，也常遇到．

在实变函数情形下，函数 $y=f(x)$的几何图形，可以用二维空间（S 平面）的图象来表示．但在$w=f(z)$的情况下，需要x，y，u，v四个坐标轴，才能象 $y=f(x)$ 那样作出其几何图形，这需要四维空间．但这种空间只是一个抽象．我们没有直接体会．因之，就不能借助于同一平面或空间中的几何图形象实函数那样来表示复变函数，而是把复变函数了解为两个复数平面上点集间的对应关系：$(x,\ y)\longleftrightarrow(u,\ v)$．

我们取两个复数平面，分别记为S_z和S_w，依单值函数 $w=f(z)$ 的z与w间的对应关系，对于区域$G\subset S_z$的每一点z，在S_w 内都有唯一的点$w(=f(z))$与之对应．当z取遍G时，对应的w就在 S_w 上组成点集N，我们称N为值域．称 $f(z)$ 为**一映射或变换**．并记为

$$f:\ z\dashrightarrow w;\ f:\ G\dashrightarrow N\ \ (N=f(G))$$

我们称w为z的**像**，N为G的**像**，z为w的**原像**，G为N的**原像**．

有了映射这种几何观点，今后我们把单值函数和映射将无区别地使用。

映射概念的引入，对于复变函数论这一领域的进一步发展上（特别是解析函数（下一章）的几何理论方面），导致出非常重要的结果，如共形映射（第六章）和正在发展的"拟共形映射"等领域，因为它给出了函数的解析表示和几何表示的综合，这个综合在近代数学各方面里，是函数论发展的基础和新问题不断出现的泉源之一。而且对于物理学的各个部门有许多重要的应用。

【例 1】求函数 $w=z^2$ 把 S_z 平面的平行于坐标轴的直线，映射成 S_w 平面上的什么图形？

【解】如以前所论，由函数 $w=z^2$，得方程组

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy. \tag{1}$$

为求直线 $x=a(\neq0)$ 的像，我们注意当 $x=a$ 时，（1）式变为

$$u=a^2-y^2,\quad v=2ay \tag{2}$$

消去 y，得 $u=a^2-\dfrac{v^2}{4a^2},\quad u+\dfrac{1}{4a^2}v^2=a^2.$

它是 S_w 上的抛物线族 $(a\neq0)$

由（1）式，易知 S_z 平面的虚轴 $x=0$ 的像是 S_w 上的左半实轴：$\{u=-y^2,\ v=0\}$。

同理可得 $y=b$ 的像。

读者试自己绘出 $x=a$ 和 $y=b$ 的像的图形。

【例 2】设 $w=x^2+iy^2$，$z=x+iy$，试求 S_z 上的直线 $x=a$，$y=a$ 及圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的像。

【解】设 $w=u+iv$，则

$$u=x^2,\quad v=y^2.$$

当直线 $x=a$，$y=a$ 时得 $u=a^2$，$v=a^2$。于是这些直线在 S_w 上的像是半直线 $u=a^2$，$v\geqslant0$；$v=a^2$，$u\geqslant0$。（如图1·6）。

另外 S_z 上的圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的像是线段

$$u+v=a^2,\quad u\geqslant0,\quad v\geqslant0.$$

又直线 $y=ax$ 的像是半直线

$$v=a^2u,\ u\geqslant 0.$$

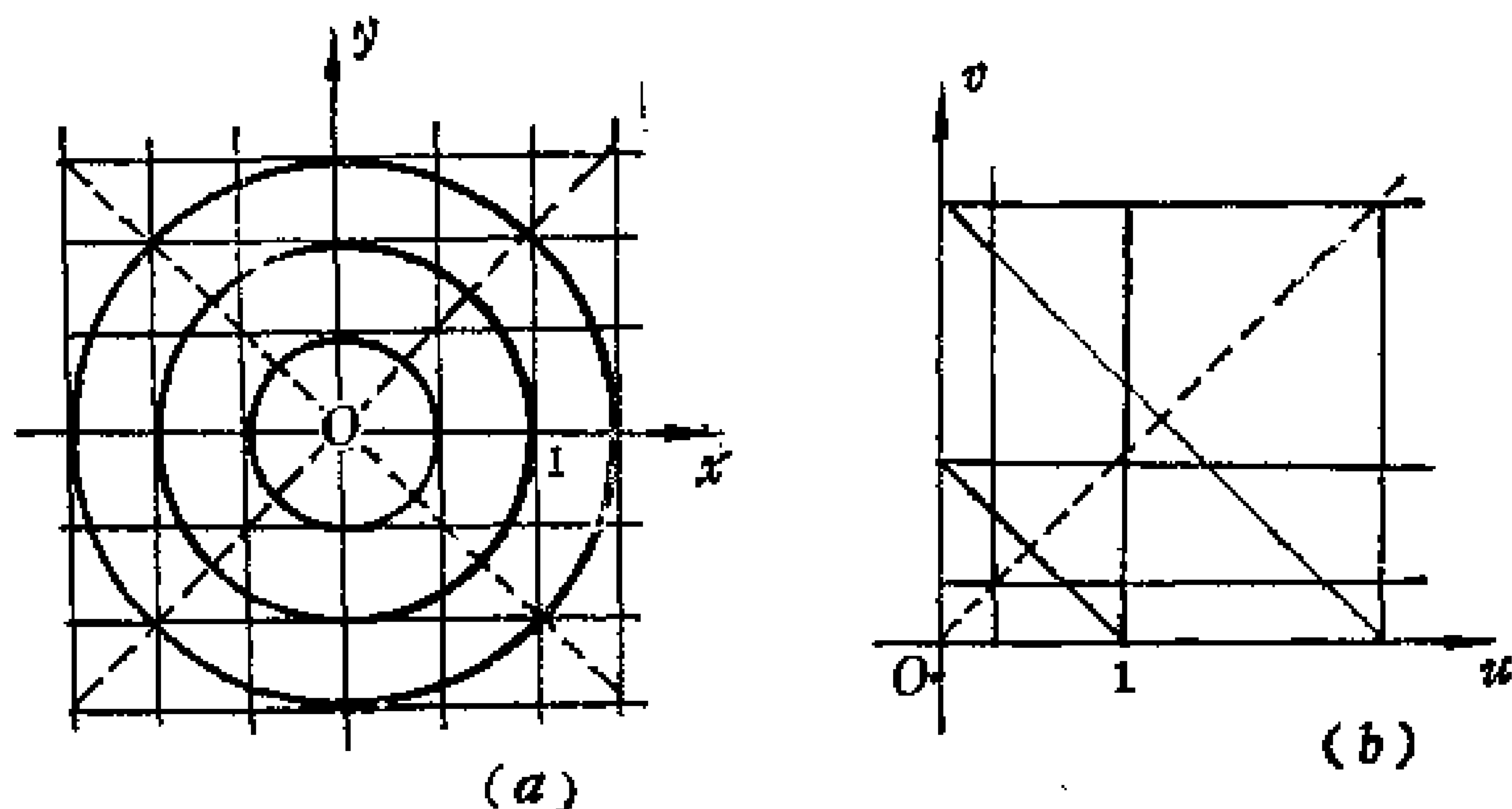


图 1·6

2. 极限概念

设点a是点集$E\subset S_z$的一个凝聚点，A是一个复数．函数$w=f(z)$定义在E上．如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总有 $\delta(\varepsilon)>0$，使得位于a点的去心邻域的属E的点，即在 $k=\{z:0<|z-a|<\delta(\varepsilon),\ z\in E\}$里的点，都有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

则称A为函数 $f(z)$，当$z\in E$趋近于a 时的极限．（即函数 $f(z)$以A为极限）用记号表为

$$\lim_{\substack{z\to a\\(z\in E)}} f(z)=A\text{或}z\to a(z\in E)\text{时，}f(z)\to A.$$

几何地说，当 $z\in B(a,\ \delta)$，$z\neq a$时，对应的$w=f(z)\in B(A,\ \varepsilon)$．其中$B(a,\delta)$，$z\neq a$，是$a$的$\delta$去心邻域，$B(A,\ \varepsilon)$是$A$的$\varepsilon$邻域．

关于函数极限的四则运算，类似于数学分析，就不列举了．

3. 连续性

设E为一开集合，函数$w=f(z)$定义在E上，当且仅当

$\lim\limits_{z \to z_0,\ z_0 \in E} f(z) = f(z_0)$ 或 $z \to z_0$时，$f(z) \to f(z_0)$时，称 $f(z)$ **在点 $z_0(\in E)$ 处连续。**

用"$\varepsilon—\delta$"来叙述为：对于任意给定的$\varepsilon>0$，总有$\delta(\varepsilon)>0$存在，使当$|z-z_0|<\delta(\varepsilon)(z\in E)$时，恒有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

如果$f(z)$在每一点$z_0\in E$连续，则称 **$f(z)$ 在E上连续。**

在实际中，我们讨论的函数，一般是定义在区域上，而函数的性质（如连续性等）都与集合有关。今后为便利计，取E为连通的开集合，即设E为区域G。函数 $f(z)$ 定义在区域G内，G的每一点都是内点，即每一点都是凝聚点。

今后如无特殊声明，G或D表示有界、单连通区域。

设定义于区域 $G\subset S_z$的函数$w=f(z)$。如果$f(z)$ 在G的每一点都连续，则称$f(z)$ 在G内连续。

如果$f(z)$ 在$G\subset S_z$内定义，则$f(z)$在G内连续的充分必要条件是它的实部$u(x, y)$与虚部 $v(x, y)$ 同时都在G内连续。

事实上，设$z_0\in G$是 $f(z)$ 的连续点，则对于每一个$\varepsilon>0$，总有$\delta(\varepsilon)>0$，当

$$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta(\varepsilon),\quad z\in G$$

时，$\qquad |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

恒成立，即

$$|u(x, y)-u(x_0, y_0)|<|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

$$|v(x, y)-v(x_0, y_0)|<|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

恒成立，因此实函数$u(x, y)$与$v(x, y)$在$z_0=x_0+y_0i$点处连续。

反之，设$u(x, y)$ 与$v(x, y)$ 在点(x_0, y_0)连续，则对于 $\varepsilon>0$必有 $\delta(\varepsilon)>0$ 存在，使当

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=|z-z_0|<\delta(\varepsilon),\ (x, y)\in G,$$

时，不等式

$$|u(x, y)-u(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\quad |v(x, y)-v(x_0, y_0)|<$$

$\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$,

都成立。即当 $|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$，$z\in G$时，不等式

$$|f(z)-f(z_0)|<\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2}=\varepsilon$$

成立。$f(z)$在z_0处连续。由z_0的任意性，$f(z)$ 在G内连续。（证毕）

由上述结果可知：要讨论函数 $w=f(z)$ 在点z_0 的连续性与讨论实函数 $u(x, y)+iv(x, y)$在(x_0, y_0)点的连续性是一致的。所以连续的复变函数，可以看成是一对连续实函数所组成。

又，如果 $f(z)$在 $G\subset S_z$ 内连续，则 $|f(z)|$ 也是G内的连续函数。这可由不等式：

$$\Big|\,|f(z)|-|f(z_0)|\,\Big|\leqslant|f(z)-f(z_0)|$$

来导得。即连续函数的模函数也是连续函数。

和实函数一样，设函数 $f(z)$ 和 $F(z)$ 都在$G\subset S_z$内定义，都以$z_0\in G$为连续点，则函数

$$f(z)\pm F(z);\ f(z)\cdot F(z);\ \frac{f(z)}{F(z)},\ F(z_0)\neq 0$$

都以z_0为连续点。

如果 $f(z)$ 在有界闭区域$\overline{G}$上连续，和实函数相同，$f(z)$具有下列性质：

①**一致连续性** 即对于任意的 $\varepsilon>0$，都有 $\delta>0$（对于整个区域来说只有一个），使任意两点z_1、$z_2\in\overline{G}$当 $|z_1-z_2|<\delta$时，对应地，不等式：

$$|w_1-w_2|=|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

恒成立。

②**函数模的有界性** 对于$\overline{G}$上任一点，都有M存在使

$$|f(z)|\leqslant M,\quad M>0.$$

③**模的最大（小）值的可达性** 在$\overline{G}$上，至少有一点 z_1 使

$|f(z)|\leqslant|f(z_1)|$；也至少有一点z_2，使$|f(z)|\geqslant|f(z_2)|$．前者是模的最大值，后者是最小值．

事实上，后两个性质，可以用上述的“连续函数$f(z)$的模$|f(z)|$也是连续函数”的事实来导得．

我们应用H.—B.定理(§1·4—1—3))来证明“连续函数$f(z)$在有界闭区域$\overline{G}$上必一致连续”——性质①．

因为$f(z)$在区域$\overline{G}$是连续函数，依连续的定义，对于任意的$\varepsilon>0$，必有$\delta(\varepsilon)>0$，使当

$$|z-z_0|<\delta(\varepsilon),\ |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,\ z_0\in G.$$

因此，对于$\varepsilon>0$，有ρ_z存在，作圆域$B(z,\ \rho_z)$，使函数$w=f(z)$在$B(z,\ \rho_z)$内的任意两点的z_1与z_2，且$|z_1-z_2|<\rho_z$，不等式

$$|w_1-w_2|=|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

恒成立．

现在对于$\overline{G}$的每一点z，以z为中心，$\frac{1}{2}\rho_z$为半径，作圆域$B\left(z,\frac{1}{2}\rho_z\right)$．依有限覆盖定理，用这种圆域的有限多个，便可以把有界闭集$\overline{G}$覆盖住．我们选取这些有限多个圆域的诸半径的最小者，设为δ（对于整个$\overline{G}$来说，只有一个最小者，它是δ）．这个值δ便适合问题的条件．

这样一来，以任意一点$\zeta\in\overline{G}$为中心，$\frac{1}{2}\rho_\zeta$为半径作圆域$B\left(\zeta,\frac{1}{2}\rho_\zeta\right)$．取这种圆域的有限个，便可以覆盖$\overline{G}$．并在这种圆域内，任取$z_1$，$z_2$，只要$|z_1-z_2|<\delta$，$\left(\delta\leqslant\frac{1}{2}\rho_\zeta\right)$，对应地恒有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon.$$

即$f(z)$在$\overline{G}$上是一致连续的．　　　　（证毕）

以上是讨论了复变函数的极限和连续性，在复变函数论里，连续也是一个重要概念．它可以由函数的导数的存在来完全保证．下一章将导得导数概念．

习　题(1·2)

1．试指出满足下列条件的z的点集：

1) $\mathrm{Re}z>0$.

2) $\mathrm{Re}z\geqslant 0$.

3) $a<\mathrm{Im}z<b$.

4) $\alpha\leqslant \arg z\leqslant\beta$.

5) $\mathrm{Re}z=0$.

6) $|z-z_0|=R$.

7) $|z-z_0|<R$.

8) $|z-z_0|\leqslant R$.

9) $R\leqslant|z|\leqslant R'$.

其中a,b,α,β都是实数，$a<b,\alpha<\beta<\alpha+2\pi,0<R<R'$，$z_0$是复数.

2．设函数$f(z)$在圆域$B=\{z:\ |z|<1\}$内定义，且一致连续．并设任意的数列$\{z_n\}$，$n=1,2,\cdots$，$|z_n|<1$，收敛于圆周上的点$z=1$，试证极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$存在.

3．证明函数$\dfrac{1}{1+z^2}$在圆域$B=\{z:\ |z|<1\}$内连续，但非一致连续.

4．设$f(z)$在$B=\{z:\ |z|<1\}$内不但连续，且一致连续．试证当$z_n\to z_0$，$|z_n|<1$，$z_0\in c\{z:|z|=1\}$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$存在且与$\{z_n\}$无关.

5．试证：若$z_n\to z_0$，$w_n\to w_0$，则$z_n\pm w_n\to z_0\pm w_0$，$z_n\cdot w_n\to z_0\cdot w_0$，$\dfrac{z_n}{w_n}\to\dfrac{z_0}{w_0}$ $(w_0\neq 0)$.

6．设$z_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{i}{\sqrt{k}}\right)$，则连结$z_{n-1}$与$z_n$的直线段之长为1.

如果设$z_n=\rho_n e^{i\theta_n}$，$\rho_n>0$，$0<\theta_n-\theta_{n-1}<\frac{\pi}{2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{\theta_n-\theta_{n-1}}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n}{\theta_n}=\frac{1}{2}$$

试证之。其中$n=1, 2, \cdots$。

7．试证直线分平面为两个区域，并以此直线为公共边界。

8．试证映射$w=z^2$，$z=x+iy$ 使平面S_w上的$u=a$，$v=b$分别对应于S_z上的正交曲线族，如果把z和w都表示成极坐标的形式，则S_z的过原点的直线和以原点为中心的圆周，其像分别是S_w的过原点的直线和以原点为心中的圆周。

学 习 指 导

一、内容与要求

这一章的中心议题是讨论复数和它们的某些性质，并在这个基础上讨论复变函数——复数域上所定义的函数以及函数的极限和连续性。

1）关于第一个议题——复数和复数域，着重讨论了：

①对于虚数的产生作了历史的梗概阐述，这有助于读者深入了解虚数的来源和被认识，以及它对于数学的发展的作用。远在三世纪，人们尽管能解不少数字系数的方程，但在解数字系数的一元二次方程$x^2+1=0$这个“最简单”的方程（从系数来看）时，由于对虚数不认识，长期从实数范围出发，认为问题无意义、无解，不了了之。直到十六世纪中叶，人们在解一般的一元三次方程时，在矛盾激化的情况下，虚数才被认识。由于虚数的客观存在，经过不少人的努力，实践又证明了它的存在，虚数逐渐在数学里被巩固下

来，并成为重要概念，使数学发展到一个新阶段。

②人们对于一个集合构成域曾提出了几个条件(称为公设)．在代数或分析里，就是按照这些公设来检验或证明实数系构成域，然后在这个基础上讨论实变函数．读者在数学分析里对此已有所了解．至于复数系是构成域，也要按照这些公设来检验．书中默认了这个问题．这就为以后讨论复变函数的性质建立了基础，因为复变函数理论是建立在复数域上的．因为可能有的读者对于域的构成条件缺乏了解．把问题提出来，供查考．

③有的人，总是从实数的有序性，误认为复数也应是有序的．其实它不是有序的；也不能用某些特例来说明复数，象实数那样，是有序的．但是复数的模和辐角因为都是实数，是有序的．从这意义上讲，可以认为复数是部分有序的．

④关于复数的表现形式，除$z=x+iy$外，书上还给出了数对形式(x, y)；依Euler公式，给出了它的指数形式$\rho e^{i\theta}$，极坐标形式$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$，$\theta=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$．Hamilton把复数$x+iy$定义为有一定次序的实数对$(x, y)$．几何上用一一对应关系把复数表示成坐标平面上的点，把这种平面称为复平面．用一一对应关系给出了复数的球面表示并称之为复数球，球面的N点就是复平面上的无穷远点的对应点．这样多的表现形式都是应客观实践需要得来的．

⑤关于复数的算术运算 $+, -, \times, \div$ 及相等，乘方和开方，希望读者切实掌握这些公式或法则进行运算．

设$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，则得De Moivre公式

$$z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta),\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

前者是z的n次方；后者是z的n次根，它是多值的，这n个值恰好是

以原点为中心，$+\sqrt[n]{\rho}$为半径的圆周的内接正 n 边形的顶点．其中 z_0 是主值．

2）这一章另一个议题，是对复数域上的函数的极限和连续的讨论．

复变函数论这门课程主要讨论一个变量的复变函数，故称单复变函数论．简称为函数论．至于多元复变函数，则由专书来讨论．但多元复变函数论的基础，则是单复变函数论．因此读者必须学好这门课程，才能进一步在这个基础上，学习其他较高一级的课程；或钻研其他有关领域的知识．而且多元复变函数也是一个正在发展的领域．

①关于函数、极限、连续等概念，几乎都在形式上逐字逐句地和实变函数相应概念一样．定义、定理的叙述几乎没有差别．如果读者对数学分析有了较好的掌握，这些平行概念可以略去不读．

②我们引进了有关平面点集的某些概念和记号，这是必要的．因为《集合论》和《拓扑学》的观点和方法，已经渗透和进入数学的各个领域．用集合论的观点来阐述和刻画事实，已成为现代数学的特点．用集合论的观点来阐述复变函数论的问题已是必然．由于读者在其他学科中，已熟悉这方面的知识，故稍加论述，避免重复．

③在函数概念里，我们把单值函数、映射、变换这三个概念不加区别地使用．除了用符号$w=f(z)$以外，并用 f：$z\to w$或$z\xrightarrow{f}w$．这样，把函数看成映射或变换，更加体现了它的几何和代数性质；体现了 S_z 平面与S_w平面集合间的对应关系．这对第六章讨论共形映射概念也是必需的．

在函数概念这一节里，除了定义 $w=f(z)$ 外，还注意把 $f(z)$ 化成 $u+iv$ 的形式．在对于一个变量的复变函数的研究上，从来就有人如 Cauchy 等，把$f(z)$看成z的一元函数来研究．有人如 Riemann等把 $f(z)$分解成实数部分 $u(x, y)$与虚数部分 $v(x, y)$，然后把对 $f(z)$ 的研究，归结为对于二元实函数的研究．下一章判别

$f(z)$ 的解析性的 C.—R. 条件，就是这样得来的. 因此要求读者能够善于把一个复变函数分解出它的实部和虚部.

④除了论述平面点集的某些概念之外，还纳入了一些概念，如凝聚点、距离、光滑曲线和逐段光滑曲线，区域等；纳入了几个定理，如闭集套定理、凝聚点存在的充分条件定理(B.—W.定理)，覆盖定理（H.—B. 定理）等等. 这些概念和定理都是函数论的重要概念和定理. 读者应深刻理解，真正掌握它的条件和结论，思路和证明方法. 这些概念和定理，今后将不只一次地用到，如在证明Cauchy积分定理在 $\overline{G}$ 上成立时，就应用了覆盖定理等.

二、例 题

【例 1】 化简 $\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\,i}$， $|x|\geqslant 1$.

【解】 令 $\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\,i}=u+iv$， 则

$$1+2x\sqrt{x^2-1}\,i=u^2-v^2+2uvi$$

$$\therefore\quad u^2-v^2=1,\quad uv=x\sqrt{x^2-1}.$$

解出u与v, 得 $u=\pm x$, $v=\pm\sqrt{x^2-1}$

$$\therefore\quad \sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\,i}=\pm\left(x+\sqrt{x^2-1}\,i\right).$$

【例 2】 设α与β为复数，试证：

$$\frac{1}{2}\{|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2\}=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$

这个等式在几何上表现了什么关系?

【证明】 令 $\alpha=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$， $\beta=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$|\alpha+\beta|^2=|(\rho_1\cos\theta_1+\rho_2\cos\theta_2)+i(\rho_1\sin\theta_1+\rho_2\sin\theta_2)|^2$$

$$=\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1),$$

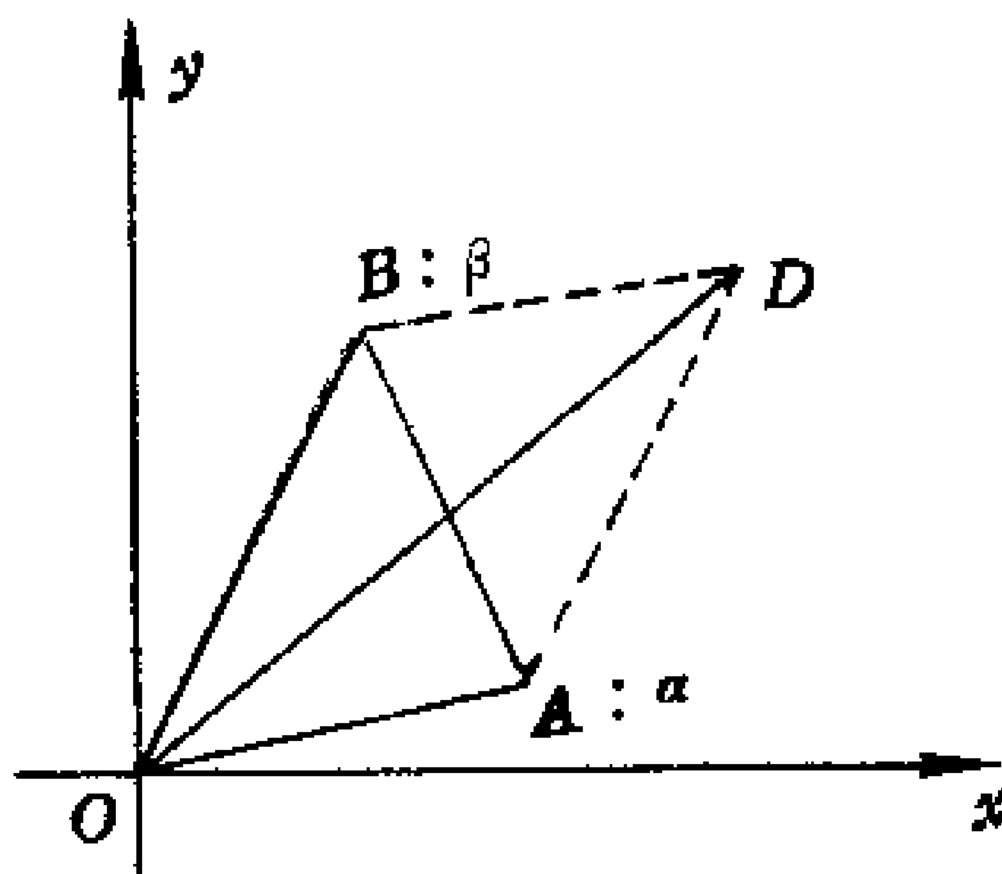
$$|\alpha-\beta|^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1),$$

$$\therefore\quad |\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2(\rho_1^2+\rho_2^2)=2\{|\alpha|^2+|\beta|^2\}.$$

显然，如果α与β就是复平面S的两点A与B，（右图），则上面的等式就是

$$\overline{OD}^2+\overline{AB}^2=2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2)$$

即平行四边形对角线之长的平方和，等于两邻边长的平方和的2倍。



指导图 1·1

【例 3】 （1）设复数列$\{a_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

（这称为Cauchy定理）

（2）设复数数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，

试证：

$$\lim\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)=ab.$$

（这称为Cesarō定理）

【证明】 这两个定理，在实数的情形下，是成立的**【附注】**在复数的情形下，我们设：

$$a_n=\alpha_n+i\beta_n,\quad a=\alpha+i\beta.$$

因为$a_n\to a$，∴ $\alpha_n\to\alpha$，$\beta_n\to\beta$。由实数的情形

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=\alpha,\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}=\beta,$$

$$\therefore\quad\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\longrightarrow a.$$

现在为证Cesarō定理，设$a_n=a+P_n$，既然 $a_n\to a$，∴ $|P_n|\to 0$。由Cauchy定理，显然

$$\frac{1}{n}(|P_1|+|P_2|+\cdots+|P_n|)\longrightarrow 0$$

而

$$\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)$$

$$=\frac{a}{n}(b_1+b_2+\cdots+b_n)+\frac{1}{n}(P_1b_n+P_2b_{n-1}+\cdots+P_nb_1)$$

现设$c=\max(|b_1|,\ |b_2|,\ \cdots,\ |b_n|)$则

$$\frac{1}{n}(P_1b_n+P_2b_{n-1}+\cdots+P_nb_1)\leqslant\frac{c}{n}(|P_1|+|P_2|+\cdots+|P_n|)$$

当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}(P_1b_n+P_2b_{n-1}+\cdots+P_nb_1)\longrightarrow 0$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)$$

$$=a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=ab.$$

【附注】 为证这两个定理在实数情形成立，先得证 O.Stolz（斯笃兹）定理：

设 $\lim(x_n-x_{n-1})/(y_n-y_{n-1})$存在（有限或$\pm\infty$），则

$$\lim\frac{x_n}{y_n}=\lim\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

其中数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$y_{n+1}>y_n$，$y_n\to+\infty$.

这个定理在数学分析里对于确定$\frac{\infty}{\infty}$的不定式$\frac{x_n}{y_n}$的极限，要经常用到.

这里不作证明，有兴趣的读者，请查阅《微积分学教程》，（菲赫金哥尔茨著．中译本一卷一分册，第59页）

应用Stolz定理，我们来证明上述的Cauchy定理.

设实数列$\{a_n\}$，$a_n \to a$（有限或无穷），则 $\{b_n\}$，

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \longrightarrow a.$$

事实上，在 Stolz定理中，令$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$y_n = n$，则

$$\lim b_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n = a.$$

例如，在数学分析中，已证明了$n^{\frac{1}{n}} \to 1$，$n \to \infty$，则又有

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \to 1.$$

【例 4】设E_1，E_2，E_3，…为非空闭集合，且

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

如果 E_1 为有界闭集，则至少有一点存在，为 E_n 的公共点．试证之．并说明 $n \leqslant |z| < \infty$，$n = 1, 2, 3, \cdots$，为什么没有公共点存在？

【证明】设E_1为有界．从E_1内取一点P_1，从E_2 内取另一点 P_2，$P_2 \neq P_1$．一般地，从E_n取与P_1，P_2，…，P_{n-1}不一样的点 P_n．继续下去，便得到一个点列 P_1，P_2，…，P_n，…．显然这些点都是E_1的点．因E_1有界，它们的极限点$P \in E_1$，（因 E_1为有界闭集合）、这个点列的子列P_{k_1}，P_{k_2}，…，P_{k_n}，…，从第二项起均属于E_2，这个子数列仍以 P 为极限点，因E_2是闭集，故$P \in E_2$.同理，可证$P \in E_n$．即P 为 E_1，E_2，E_3，…，E_n，…的公共点．

对于E_n：$n \leqslant |z| < \infty$，$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 来说，尽管也有

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

由于E_1无界，它们没有公共点存在，对于任一点$z_0 \in P_n$，$|z_0| < N$，$N > 0$，$z_0 \notin E_n$．

【例 5】设复数z与z'，像为 Riemann 球面上的点A与B．设弦 $\overline{AB}$ 之长为l，试证：

$$l = \frac{|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\ \sqrt{1 + |z'|^2}}\ .$$

【证明】 设 $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$; A 及 B 在球面上的坐标为

$$A = (x_1,\ x_2,\ x_3),\quad B = (x_1',\ x_2',\ x_3')$$

于是,

$$|z - z'|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$= \left(\frac{x_1}{1 - x_3} - \frac{x_1'}{1 - x_3'}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1 - x_3} - \frac{x_2'}{1 - x_3'}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(1 - x_3)^2(1 - x_3')^2}[\{x_1(1 - x_3') - x_1'(1 - x_3)\}^2 +$$

$$\{x_2(1 - x_3') - x_2'(1 - x_3)\}^2]$$

$$= \frac{1}{(1 - x_3)^2(1 - x_3')^2}[(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_3')^2 + ((x_1')^2 +$$

$$(x_2')^2)(1 - x_3)^2 - 2(1 - x_3)(1 - x_3')(x_1x_1' + x_2x_2')]$$

$$= \frac{1}{(1 - x_3)^2(1 - x_3')^2}[(x_3 - x_3^2)(1 - x_3')^2 + (x_3' -$$

$$(x_3')^2)(1 - x_3)^2 - 2(1 - x_3)(1 - x_3')(x_1x_1' + x_2x_2')$$

$$= \frac{1}{(1 - x_3)(1 - x_3')}[x_3(1 - x_3') + x_3'(1 - x_3) -$$

$$2(x_1x_1' + x_2x_2')] \tag{1}$$

但是, 从立体解析几何, 可知

$$\overline{AB}^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2$$

$$= (x_1^2 + x_2^2) + ((x_1')^2 + (x_2')^2) - 2(x_1x_1' + x_2x_2') +$$

$$x_3^2 + (x_3')^2 - 2x_3 \cdot x_3'$$

$$= (x_3 - x_3^2) + (x_3' - (x_3')^2) - 2(x_1x_1' + x_2x_2') + x_3^2 +$$

$$(x_3')^2 - 2x_3x_3'$$

$$= x_3 + x_3' \quad 2x_3x_3' - 2(x_1x_1' + x_2x_2') \tag{2}$$

比较 (1) 及 (2), 可知(§1·3—(4))

$$\overline{AB}^2=(1-x_3)(1-x_3')\ |z-z'|^2=$$

$$=\frac{|z-z'|^2}{(1+x^2+y^2)(1+(x')^2+(y')^2)}.$$

即 $$\overline{AB}=\frac{|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}.$$

【例 6】 我们定义有界集 E 的直径为

$$d(E)=\sup\{|z-z'|;\ z\in E,\ z'\in E\}.$$

试证明：如果 E 为有界闭集合，则必存在两点 z_0, z_0' 使 $d(E)=|z_0-z_0'|$．并且 $E\subset \mathrm{int}(C)$，C 为以 z 为中心，$d(E)$ 为半径的圆周．

【证明】 显然，有点列 $\{z_n\}$ 与 $\{z_n'\}$ 存在，满足下列不等式

$$d(E)-\frac{1}{n}<|z_n-z_n'|\leqslant d(E).$$

因为 E 是有界闭集，$\{z_n\}$ 与 $\{z_n'\}$ 的凝聚点 z_0，z_0' 均 $\in E$．每个 z_0，z_0' 也是子点列的凝聚点，我们特别选取这种点列，因此

$$d(E)=|z_0-z_0'|=\lim_{n\to\infty}|z_n-z_n'|$$

又因设 z 是 E 的定点，z 与 E 的任意一点 z' 的距离 $|z-z'|$ 总是 $\leqslant d$．故 E 被包含在以 z 为中心，$d(E)$ 为半径的圆域内．

【例 7】 试证：当 n 是有理数时，De Moivre公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

也成立．其中 θ 为实数．

【证明】 首先证明 n 是整数时，公式成立．

当 n 是非负的整数时，应用数学归纳法．

因为当 $n=0$ 及 $n=1$ 时，公式显然成立．

假设 $n=k$ 时，公式成立．进一步去证明 $n=k+1$ 时成立．但是，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=(\cos\theta+i\sin\theta)^k\ (\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta+i[\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta]$$

$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

这就是说，公式成立。

当n是负整数时，设$n=-m$（m为正整数），则

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}&=[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}]^m\\&=\left[\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\right]^m\\&=(\cos\theta-i\sin\theta)^m\\&=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^m\\&=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)\end{aligned}$$

其次，证明当n是有理数$\pm q/p$，p，q为无公因子正整数时，公式成立。为此，我们先定义$n=\dfrac{1}{p}$的情形。

由于$\cos p\phi+i\sin p\phi=(\cos\phi+i\sin\phi)^p$仍是复数，令为$\cos\theta+i\sin\theta$，即可令

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^p=\cos\theta+i\sin\theta.$$

于是，$\quad\cos\phi+i\sin\phi=(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{p}}$

我们定义：$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{p}}=\cos\phi+i\sin\phi$ 仍为一复数。

今设 $\quad(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{q}{p}}=\cos\Phi+i\sin\Phi$，

从而 $\quad(\cos\theta+i\sin\theta)^q=(\cos\Phi+i\sin\Phi)^p$

$$\cos q\theta+i\sin q\theta=\cos p\Phi+i\sin p\Phi$$

于是 $\;p\Phi=q\theta$，$\quad\Phi=\dfrac{q}{p}\theta$。即

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{q}{p}}=\cos\frac{q}{p}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta.$$

公式成立。

【例 8】设复变数z_1与z_2满足下列关系：

$$\alpha z_1\bar{z}_1+\bar{a}z_1\bar{z}_2+a\bar{z}_1z_2+\beta z_2\bar{z}_2=0. \qquad (1)$$

其中α,β为实数，a为复数．试证：当$\alpha\beta-a\bar{a}<0$时，比值$\frac{z_1}{z_2}$位于某一圆周或直线上．（上式左边称为z_1与z_2的Hermite形）

【解】设$a=\gamma+i\delta$，$\frac{z_1}{z_2}=x+iy$．代入上述关系式．则得

$$\alpha(x^2+y^2)+2(\gamma x+\delta y)+\beta=0. \qquad (2)$$

即 $z=\frac{z_1}{z_2}$ 位于这个曲线上．而当 $\alpha\beta-a\bar{a}<0$时，这条曲线是圆周．

显然，当$\alpha=0$时，（2）是直线；当$\alpha\neq0$时，它是圆周．

从解析几何，（2）是圆周，圆心为$\left(-\frac{\gamma}{\alpha},\ -\frac{\beta}{\alpha}\right)$，半径为

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{4\left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\delta^2}{\alpha^2}-\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\gamma^2+\delta^2-\alpha\beta}.$$

而 $a\bar{a}=(\gamma+i\delta)(\gamma-i\delta)=\gamma^2+\delta^2$．因之，只有当

$$\alpha\beta-a\bar{a}<0,\quad 即\ \alpha\beta<\gamma^2+\delta^2$$

时R才存在．这样一来，有了圆心和半径，圆周可作出．

总之，$\frac{z_1}{z_2}$ 在 $\alpha\beta-a\bar{a}<0$ 的条件下，位于某一圆周或直线上．

【例9】试证：函数

$$w=\frac{z-i}{z+i},\quad z\neq-i, \qquad (1)$$

把S_z平面的直线$x=a$，$y=b$分别映射成S_w平面的圆周族．又$x=0$及$y=-1$的象分别是直线$v=0$及$u=1$．

【证明】 设$z=x+iy$，$w=u+iv$， 则

$$u+vi=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i},$$

并得

$$u=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2},\quad v=\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}. \qquad (2)$$

为求S_z上的平行于两坐标的直线的像，我们把（1）式变形为

$$z=i\frac{1+w}{1-w} \tag{3}$$

便得

$$x=\frac{-2v}{(1-u)^2+v^2},\quad y=\frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \tag{4}$$

于是，S_z上的直线$x=a$与$y=a$，分别是S_w上的圆周

$$(u-1)^2+\left(v+\frac{1}{a}\right)^2=\frac{1}{a^2},\ (a\neq 0)$$

$$\left(u-\frac{a}{a+1}\right)^2+v^2=\frac{1}{(a+1)^2},\quad (a\neq -1) \tag{5}$$

又直线$x=0$与$y=-1$，分别代入（2），则其在S_w的像分别为直线$v=0$与$u=1$。

读者试绘出其图形。

三、习题解答

习　题(1·1)

1. 【解】

$$2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$5i=0+5i=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

$$a>0,\ a+ai=a\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=a\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a<0,\ a+ai=-a\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}i\right)=$$

$$= -a\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi - i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

2. 【解】

$$\frac{z+2}{z-1} = \frac{(x+2)+iy}{(x-1)+iy} = \frac{(x+2)+iy}{(x-1)+iy}\cdot\frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$$= \frac{(x+2)(x-1)+y^2+i[y(x-1)-y(x+2)]}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{x^2+x-2+y^2}{(x-1)^2+y^2},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) =$$

$$= \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}.$$

3. 【解】

由$z^4+i=0$，故$z=\sqrt[4]{-i}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$

所求方根为：$z_k = \cos\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}$，

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

于是，$z_0 = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$，

$z_1 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$，

$z_2 = \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}$，

$z_3 = \cos\frac{11}{8}\pi + i\sin\frac{11}{8}\pi$.

4. 【证明】

令　$z=x+yi$，$w=u+iv$，则

$z+w=(x+u)+(y+v)i$，

于是 $\mathrm{Re}(z+w)=x+u=\mathrm{Re}z+\mathrm{Re}w$，$\mathrm{Im}(z+w)=(y+v)=$

$=\mathrm{Im}z+\mathrm{Im}w$。

5．【证明】

事实上，我们已知 $|z|=|x+yi|\leqslant|x|+|y|$．只要证左边的不等式成立就可．

因为 $(|x|-|y|)^2\geqslant0$，$\therefore$ $2|xy|\leqslant x^2+y^2$．但是

$$(|x|+|y|)^2=|x|^2+|y|^2+2|xy|\leqslant2(x^2+y^2)=2|z|^2$$

$\therefore$ $|z|\geqslant\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}$。

6．【解】

由所给的等式，去分母得

$$x-iy=(ax-by)+i(ay+bx)$$

$$x=ax-by，\ y=-(ay+bx)$$

即 $(a-1)x=by$，$(a+1)y=-bx$

$\therefore$ $\dfrac{a-1}{b}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-b}{a+1}$，$a^2-1=-b^2$，

$\therefore$ $a^2+b^2=1$。

7．【证明】

应用数学归纳法，当$n=1$时，等式成立

$$z+w=z+w。$$

现设$n=k$时，等式成立，即

$$(z+w)^k=z^k+\binom{k}{1}z^{k-1}\cdot w+\binom{k}{2}z^{k-2}\cdot w^2+\cdots+\binom{k}{k}w^k$$

进而证明：$n=k+1$ 时，等式也成立．因为

$$(z+w)^{k+1}=(z+w)^k(z+w)$$

$$=\left[z^k+\binom{k}{1}z^{k-1}\cdot w+\cdots+\binom{k}{k}w^k\right](z+w)$$

$$=z^{k+1}+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{0}\right]z^kw+\left[\binom{k}{2}+\right.$$

$$+\binom{k}{1}\Big]z^{k-1}w^2+\cdots+\left[\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right]zw^k+$$

$$+\binom{k}{k}w^{k+1}$$

$$=z^{k+1}+(k+1)z^kw+\frac{(k+1)k}{2!}z^{k-1}w^2+$$

$$+\cdots+(1+k)zw^k+w^{k+1}$$

$$=z^{k+1}+\binom{k+1}{1}z^kw+\binom{k+1}{2}z^{k-1}w^2+\cdots$$

$$+\binom{k+1}{k}zw^k+\binom{k+1}{k+1}w^{k+1}$$

因为$n=1$时公式成立，所以$n=1+1=2$时成立．公式对于任意的自然数都成立．

8．【证明】

1）已知1的n次方根为：

$$w_k=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1.$$

设其中不为1的一个根为w，并令

$$R=1+w+w^2+\cdots+w^{n-1} \tag{1}$$

于是

$$wR=w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}+w^n \tag{2}$$

两式相减，有

$$R(w-1)=w^n-1\quad 或R=\frac{w^n-1}{w-1}.$$

因为 $w\neq1$，但$w^n=1$，　∴ $R=0$．

2）为了证明 $1+w_1^k+w_2^k+\cdots+w_{k-1}^k=0$．由 w_k 中取 $k=1$ 时的方根，设为Q

$$Q=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=w_1$$

于是， $Q^2=\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)=w_2$，（即$w_k$中$k=2$时的方根）

同理， $Q^3=\left(\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}\right)=w_3$，

……………………

$Q^{n-1}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{n-1}=w_{n-1}$，

从而 $1+w_1{}^k+w_2{}^k+\cdots+w^k{}_{n-1}=1+Q^k+Q^{2k}+\cdots+Q^{(n-1)k}$

$$=\frac{1-Q^{nk}}{1-Q^k}=\frac{1-1}{1-Q^k}=0$$

其中 $Q^{nk}=(Q^n)^k=1$。

9．【证明】

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$， $z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$

$$\therefore\quad \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta=\sum_{k=0}^{n}z^k \qquad (1)$$

而

$$\sum_{k=1}^{n}z^k=1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{(1-z^{n+1})(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})}$$

$$=\frac{1-z^{n+1}-\bar{z}+z^n}{2-(z+\bar{z})}$$ （这里应用了$z\bar{z}=|z|^2=1$）

$$\therefore\quad \sum_{k=0}^{n}z^k=\frac{1}{2-2\cos\theta}[1-\cos(n+1)\theta-\cos\theta+\cos n\theta+$$

$$i[-\sin(n+1)\theta+\sin\theta+\sin n\theta] \qquad (2)$$

（1）与（2）相等，则

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\frac{1-\cos(n+1)\theta-\cos\theta+\cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n}{2}\theta \Big/ \sin\frac{\theta}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \frac{-\sin(n+1)\theta + \sin\theta + \sin n\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta \Big/ \sin\frac{\theta}{2}.$$

10. 【证明】

令 $w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$,

（1）当 $|z| = 1$时，则 $|z|^2 = z\bar{z} = 1$，于是

$$|w|^2 = w \cdot \bar{w} = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \times \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{1 - z_0\bar{z}}$$

$$= -\frac{\bar{z}z - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0}{1 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + \bar{z}_0 z_0 \cdot z\bar{z}}$$

$$= \frac{|z|^2 + |z_0|^2 - (z_0\bar{z} + \bar{z}_0 z)}{1 + |z_0|^2 \cdot |z|^2 - (z_0\bar{z} + \bar{z}_0 z)}$$

$$= \frac{1 + |z_0|^2 - (z_0\bar{z} + \bar{z}_0 z)}{1 + |z_0|^2 - (z_0\bar{z} + \bar{z}_0 z)} = 1.$$

$\therefore\quad |w| = 1.$

（2）当 $|z|<1$，由 $w = \dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$，可得 $z = \dfrac{w + z_0}{1 + \bar{z}_0 w}$，于是

$$|z|^2 = z\bar{z} = \frac{w + z_0}{1 + \bar{z}_0 w} \times \frac{\bar{w} + \bar{z}_0}{1 + z_0\bar{w}}$$

$$= \frac{w\bar{w} + \bar{z}_0 \cdot w + z_0\bar{w} + z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0 \cdot w\bar{w} + \bar{z}_0 w + z_0\bar{w}}$$

$$= \frac{|w|^2 + |z_0|^2 + \bar{z}_0 w + z_0\bar{w}}{1 + |z_0|^2 |w|^2 + \bar{z}_0 w + z_0\bar{w}} = |z|^2 < 1,\ (\text{因 } |z|<1).$$

这样，可有

$$(1 - |z_0|^2)\,|w|^2 < 1 - |z_0|^2,\quad |w|^2 < 1.$$

$\because\quad |z_0| < 1,\quad \therefore\quad |w| < 1.$

11. 【解】

1）因 $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2.$$

但 $z_1\bar{z}_2$ 是 $z_2\bar{z}_1$ 的共轭数（为什么？）并且

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2) \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\bar{z}_1 z_2|$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2|$$

$=(|z_1|+|z_2|)^2$.

$\therefore\quad |z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

2）把1）中所证的不等式，应用于z_2及z_1-z_2，便有

$$|z_1|=|z_2+z_1-z_2|\leqslant|z_2|+|z_1-z_2|$$

$\therefore\quad |z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$.

互换z_1与z_2，同理可得

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_2|-|z_1|=-(|z_1|-|z_2|)$$

故有　$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

习　题(1·2)

1．【解】

1）S_z的开右半平面；

2）S_z的闭右半平面；

3）带域，其边界平行于实轴，到实轴的距离分别为$|a|$，$|b|$；

4）闭角域，夹角边是从原点出发的两条射线，它们与正实轴的交角分别为α与β；

5）虚轴；

6）圆周$C=\{z: |z_0-z|=R\}$，以z_0为中心，半径为R；

7）开圆域是z_0为中心，R为半径的圆周的内部；

8）闭圆域，圆周的内部加圆周；

9）闭圆环，原点为中心，R，R'为半径的两圆周所围成的区域加两圆周的点的全体。

2．【证明】

因为$f(z)$在圆域$|z|<1$内一致连续，即对于任意的$\varepsilon>0$，有$\delta>0$存在，当$|z-z'|<\delta$，恒有

$$|f(z)-f(z')|<\varepsilon,\quad (|z|<1,\quad |z'|<1)$$

而点列$\{z_n\}$，$z_n\to1$，并且适当选取N_0，使当$n>N_0$时，

$$|\zeta - z_n| < \frac{\delta}{2},$$

于是，当 $n > N_0$，$m > N_0$ 时，

$$|z_n - z_m| \leqslant |\zeta - z_m| + |z_n - \zeta| < \delta,$$

$$\therefore \quad |f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n)$$

存在。

3．【证明】

取圆域 $|z| < 1$ 内任意一点z_0，要证 $f(z)$在z_0点连续，依在一点连续的定义，即对于任意的$\varepsilon > 0$，有$\delta > 0$存在，使当 $|z - z_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

因此证明的关键是对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，如何去求 $\delta > 0$，使 $|z - z_0| < \delta$内的z，满足 $\{|z - z_0| \leqslant \delta\} \subset \{z: |z| < 1\}$ 且有（1）式存在。

由（1），因 $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$，故

$$\left|\frac{1}{1 + z^2} - \frac{1}{1 + z_0^2}\right| = \frac{|z_0^2 - z^2|}{|1 + z^2|\,|1 + z_0^2|}$$

$$= \frac{|z_0 + z|}{|1 + z^2|} \frac{|z_0 - z|}{|1 + z_0^2|} < \frac{2\,|z_0 - z|}{|1 + z^2|\,|1 + z_0^2|} \qquad (2)$$

但 $|1 + z^2| \geqslant 1 - |z|^2 = (1 - |z|)(1 + |z|) \geqslant 1 - |z| \geqslant 1 - (|z_0| + |z - z_0|)$, $\qquad (3)$

如果 $\{|z - z_0| \leqslant \delta\} \subset \{z: |z| < 1\}$，则由（3）得

$$|1 + z^2| \geqslant 1 - (|z_0| + \delta) > 0.$$

于是（2）式变成下式

$$\left|\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+z_0^2}\right|<\frac{2\delta}{|1+z_0^2|\,(1-(|z_0|+\delta))}$$

显然令

$$\frac{2\delta}{|1+z_0^2|\,(1-|z_0|-\delta)}=\varepsilon,\ \text{则得}$$

$$\delta=\frac{\varepsilon\,|1+z_0^2|\,(1-|z_0|)}{2+\varepsilon\,|1+z_0^2|}.$$

当$\varepsilon>0$给定，δ便可求出．我们就有（1）式，即：

对于任意的$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，当$|z-z_0|<\delta$，便有（1），故$f(z)$在z_0处连续，因为$z_0\in\{z:|z-z_0|<\varepsilon\}$是任意点，即$f(z)$在圆域$\{z:|z|<1\}$内为连续．

现在来证$f(z)$在$\{z:|z|<1\}$内不一致连续．为此，只须证圆域里的特殊点，（1）式不成立即可．现取$z_1=\frac{n}{n+1}i$，$z_2=\frac{n-1}{n}i$，这些点都$\in\{z:|z|<1\}$，而且

$$|z_1-z_2|=\frac{1}{n(n+1)},$$

当n充分大时，为任意小．但是

$$\left|\frac{1}{1+z_1^2}-\frac{1}{1+z_2^2}\right|=\left|\frac{1}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}-\frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right|$$

$$=\left|\frac{(n+1)^2}{2n+1}-\frac{n^2}{2n-1}\right|=\left|\frac{2n^2-1}{(2n)^2-1}\right|$$

$$=\left|\frac{1-\frac{1}{2n^2}}{2-\frac{1}{4n^2}}\right| \qquad (4)$$

当$n\to\infty$时，（4）式右端$\to\frac{1}{2}$．

这时，对于$0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$，尽管$|z_1-z_2|$可以任意小，但（4）式左端不能$<\varepsilon$，即$\dfrac{1}{1+z^2}$在圆域$|z|<1$内不是一致连续的。

4. 【证明】

已知函数$f(z)$在B内连续且一致连续。故对于任一$\varepsilon>0$，总有$\delta>0$存在，使当

$\{|z_1-z_2|<\delta\}\subset B$时，有

$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$。

对于这样的δ，自然有

$$|z_n-z_0|<\frac{\delta}{2},\quad |z_m-z_0|<\frac{\delta}{2},\quad m,\ n\ 相当大。$$

于是，

$$|z_m-z_n|\leqslant|z_m-z_0|+|z_n-z_0|<\delta$$

$$|f(z_m)-f(z_n)|<\varepsilon,\ 或\ |f(z_{n+p})-f(z_n)|<\varepsilon,\ p\geqslant 0$$

依Cauchy收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=w_1$必存在。

为证明$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$的存在与$\{z_n\}$无关，我们另取一个数列$\{z_n'\}$，$z_n'\to z_0$。同理可以证明：

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n')=w_2.$$

的存在。只要进一步证明$w_1=w_2$，便可以证明问题的结果。我们用反证法，设$w_1\neq w_2$，并令$|w_1-w_2|=2\varepsilon$。

由于由上式有$|f(z'_n)-w_2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|f(z_n)-w_1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

及 $|z_n'-z_n|\leqslant|z_n'-z_0|+|z_n-z_0|<\delta$，

$$|f(z_n')-f(z_n)|=|f(z_n')-w_2+w_1-w_1+w_2-f(z_n)|$$

$$\geqslant|w_1-w_2|-|f(z_n')-w_2|-|f(z_n)-w_1|$$

$$>2\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

而这与 $f(z)$ 的一致连续性矛盾，故 $w_1=w_2$。即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ 的存在与 $\{z_n\}$ 的选择无关。

5. 【证明】

因为 $z_n\to z_0, w_n\to w_0$，故对任意的 $\varepsilon>0$，有 N 存在，当 $n\geqslant N$ 时，

$$|z_n-z_0|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |w_n-w_0|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因之，① $|(z_n\pm w_n)-(z_0\pm w_0)|=|(z_n-z_0)\pm(w_n-w_0)|$

$$\leqslant|z_n-z_0|+|w_n-w_0|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

②我们令 $M=\sup\{|z_n|\}$，$|w_0|=A$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|z_n-z_0|<\frac{\varepsilon}{2A},\quad |w_n-w_0|<\frac{\varepsilon}{2M},$$

从而

$$|z_nw_n-z_0w_0|=|z_nw_n-z_nw_0+z_nw_0-w_0z_0|$$
$$=|z_n(w_n-w_0)+w_0(z_n-z_0)|\leqslant|z_n|\,|w_n-$$
$$-w_0|+|w_0|\,|z_n-z_0|$$

$$<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+A\cdot\frac{\varepsilon}{2A}=\varepsilon.$$

③为证：$\left|\frac{z_n}{w_n}-\frac{z_0}{w_0}\right|=\left|\frac{z_nw_0-z_0w_n}{w_nw_0}\right|$

$$=\frac{|z_nw_0+z_nw_0-z_0w_0-z_0w_n|}{|w_n|\,|w_0|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|w_0|\,|z_n-z_0|+|z_0|\,|w_n-w_0|}{|w_n|\,|w_0|}\qquad(\text{I})$$

如果(I)的右端$<\varepsilon$，问题就解决了．为此，设$|w_0|=A\neq 0$（因$w_0\neq 0$），$|z_0|=B$．由于$z_n\to z_0$，$w_n\to w_0$，故对于任意的ε(不妨设$0<\varepsilon<\frac{A}{2}$)，有$N$存在，使当$n\geqslant N$时，

$$|z_n-z_0|<\varepsilon,\quad |w_n-w_0|<\varepsilon.$$

即$|w_0|-\varepsilon<|w_n|<|w_0|+\varepsilon$，或$|w_n|>A-\varepsilon>\frac{A}{2}$．

代入(I)便得

$$\left|\frac{z_n}{w_n}-\frac{z_0}{w_0}\right|<\frac{A\cdot\varepsilon+B\cdot\varepsilon}{A\cdot\frac{A}{2}}=\varepsilon\cdot\frac{2(A+B)}{A^2}.$$

因为右端的$2(A+B)/A^2$是常数，ε可以任意小．故结论正确．

6．【证明】

因为 $\rho_n{}^2=|z_n|^2=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$

及$|z_n|=\sqrt{n+1}$，

$$\therefore\quad |z_{n+1}-z_n|=\left|1+\frac{i}{\sqrt{1}}\right|\left|1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|\left|1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right|\cdots$$

$$\cdots\left|1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right|\left|\left(1+\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right)-1\right|=\left|\frac{iz_n}{\sqrt{n+1}}\right|=1.$$

又因

$$\theta_n=\arg z_n=\arg\left(1+\frac{i}{\sqrt{1}}\right)+\arg\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+$$

$$+\arg\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)(\bmod 2\pi),$$

$$\theta_{n-1}=\arg z_{n-1}=\arg\left(1+\frac{i}{\sqrt{1}}\right)+\arg\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+$$

$$\arg\left(1+\frac{i}{\sqrt{n-1}}\right)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{\theta_n-\theta_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\arg\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

由于 $0<\theta_n-\theta_{n-1}<\frac{\pi}{2}$， $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\approx\frac{1}{\sqrt{n}}$ （$\approx$表近似于）

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{\theta_n-\theta_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)=\frac{1}{2}.$$

依Stolz定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n}{\theta_n}=\frac{1}{2}.$$

7. 【证明】

直线可以看成是半径为无穷大的圆周．但 Jordan 闭曲线不通过无穷远点，它把 S 分成两个区域，一为有限，一为无穷（含∞的区域）现．在要证明直线也把平面 S 分成两个区域，而直线都要过无穷远点．

现在假定直线l把 $\hat{S}$ 分成两部分G_1与G_2．进一步来证明G_1 与 G_2都是区域一连通的开集合；然后再证明l是G_1与G_2的公共边界．

为证G_1是区域，取任一点$z_0\in G_1$，并令 $d=\inf\{|z-z_0|, z\in l\}$．作圆域$B(z_0,\rho)=\{z: |z-z_0|<\rho,\ \rho<d\}$．显然$B(z_0,\rho)\subset G_1$，即$z_0$是$G_1$的内点．由$z_0$的任意性，可知$G_1$是开集合．为证开集$G_1$为连通的开集合，我们任取两点$z_1$，$z_2\in G_1$，用直线段$h$连接$z_1$与$z_2$，则$h$上的一切点必都 $\in G_1$，不然的话，则h上至少有一点P，不属于G_1，则必$\in l$或$\in G_2$．

如果$P\in l$，这意味着h与l有交点P，因h连接z_1与z_2，于是z_1与z_2必有一点 $\in G_2$，这与z_1与z_2都是G_1的内点矛盾．如果 $P\in G_2$，同理有矛盾．这样说来G_1是连通的开集合，是区域．同理，可证G_2也是

区域。

为证l是G_1与G_2的公共边界，我们任取一点$z'\in l$，并作z'点的邻域$B(z',\ \rho)$，$\rho>0$。则在每一个$B(z',\ \rho)$内既含有属于G_1的点也含有不属于G_1的点（它含有l的点）。依边界点的定义，z'为G_1的边界点。同理，在每一个$B(z',\rho)$内既有属于G_2的点，也有不属于G_2的点，故z'也是G_2的边界点。因此z'是G_1与G_2的公共点。由$z'\in l$的任意性，故l是G_1，G_2的公共边界。

8．【证明】

设$z=x+iy$，$w=u+iv$，代入$w=z^2$，则得$w=x^2-y^2+2xyi$，于是得方程组：

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy. \tag{1}$$

就x与y解之，可得

$$x=\pm\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}} \tag{2}$$

因为要满足（1）式的$2xy=v$，故x与y的值只能是两组。

当$u=a$，$v=a$时，得$x^2-y^2=a$及$2xy=a$，显然它们是两族双曲线，并互相正交。

如果把z与w分别表示成极坐标形式：

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad w=R(\cos Q+i\sin Q)$$

于是得方程组

$$R\cos Q=\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=\rho^2\cos2\theta,$$

$$R\sin\theta=2\rho^2\cos\theta\sin\theta=\rho^2\sin2\theta.$$

这样得 $R=\rho^2$，$Q=2\theta+2k\pi$，k为整数。

这就是要求的结论。

读者试绘制其图形。

第二章　微商与解析函数

前曾说过，由于复变函数最初伴随着实变函数共存在数学的分析领域，故许多基本概念与定理和实函数的相类似．这在第一章已明显地看到．尽管这样，不能认为复函内容不过是实分析的推广．其实从本章起，当问题一旦涉及到复变函数的可微性时，它就和数学分析的实函数之间，马上表现出非常深刻的差异．原来，只要复变函数在某一个区域$G\subset S$的每一点，都有一阶微商存在时，就可以立刻推导出，它在G的每一点都有任意阶导数存在（见第三章§3·5）．不但如此，它还在G的每一点的邻域($\subset G$)内可以展开成幂级数（第四章§4·4）等等．解析函数这些特征，对于数学分析中的实变函数来说，都是难以想象的．其所以如此，最根本的原因，就在于复变函数的可微性比实变函数的要求强得多．

本章的主要目的在于建立微商概念，进而建立起解析函数概念，讨论如何判定函数的解析性，即复变函数成为解析函微，应适合的条件，并以此来验证初等函数的解析性，最后讨论用多项式逼近函数的问题．复数域函数的逼近是复变函数论里正在发展的重要领域．

§2·1　复变函数的微商和解析函数概念

1．微商和微分

设区域G的单值函数为 $w=f(z)$，$z\in G$ 是任一点，如果存在着有限极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

则称这个函数在点 z 处具有导数（或可微的）． 这个极限便称为 $f(z)$的**微商**或**导数**．简记为 $f'(z)$．

如果引进 $\Delta w=\Delta f(z)=f(z_0+\Delta z)-f(z)$，便可写成

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{dw}{dz} \tag{2}$$

如果 $f(z)$在每一点 $z\in G$，都有 $f'(z)$存在，则称 $f(z)$ 在G内**是可微的**（或**可导的**，或**单演的**）

由此可见，微商的概念和实函数的情形在形式上是一样的．但必须注意，在实数域内，不等式 $|\Delta x|<\delta$，表示着点 $x+\Delta x$位于 Ox 轴上的线段 $(x-\delta,\ x+\delta)$内，所谓（1）式的极限存在，$\Delta x\to 0$ 是在这个线段内进行的．而在复数域内，$|\Delta z|<\delta$ 表示着点 $z+\Delta z$ 位于圆域 $B(z,\delta)$内，极限（1）的存在，必须"不依赖于点 $z+\Delta z$趋近于z的方式"．因为$z+\Delta z\to z$的路径可以是多种多样的，如果随着 $z+\Delta z\to z$所用的方式（比如所沿曲线不同）不同时，所得的（1）式的极限 $f'(z)$值也不同，称 $f(z)$ 是**多演函数**（polygenic）．关于这种函数的讨论，是复变函数论的又一课题．我们把"不依赖于 $z+\Delta z\to z$的方式"，极限（1）存在，称$f(z)$为**单演函数**（monogenic）．

关于微分的概念也在形式上和实数域的一样，这就是设

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z)+\eta$$

于是 $\Delta w=(f'(z)+\eta)\Delta z=f'(z)\Delta z+\eta\Delta z$

其中η随Δz一起趋近于０，我们把

$$f'(z)\cdot\Delta z$$

称为Δw的**线性部分**，或函数 $f(z)$ 的**微分**：

$$dw=f'(z)dz,\qquad f'(z)=\frac{dw}{dz}$$

定理1　设 $f(z)$ 在 $z\in G$ 点处可导，则在 z 处连续.

【证明】 由于

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z+\Delta z)-f(z)]=\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\cdot f'(z)=0$$

故 $f(z)$ 在 z 处连续.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（证毕）

依定理1，可知设 $f(z)$ 在区域 G 内可导，必在 G 内连续. 即 $f(z)$ 的连续性已包含在可微性之中，反之，并不一定成立.

【例1】　设 $f(z)=\mathrm{Re}z=x$.

显然，此函数在 S_z 内是连续的. 但在任意点处是不可导的，因为差商为

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta z}$$

当 z 沿与 y 轴平行的直线，使 $\Delta z\to 0$ 时，此时，$\Delta x=0$.

$$\therefore\ \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=0.$$

当 z 沿与 x 轴平行的直线，使 $\Delta z\to 0$ 时，此时，$\Delta y=0$.

$$\therefore\ \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=1$$

极限不存在. 故 $f(z)=x$ 是不可导的.

【例2】　同理，$w=\bar{z}$，$z=x+iy$ 在 S_z 内是连续的，但对任意一点是不可导的.

事实上，

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\bar{z}+\overline{\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

当 $\Delta z\to 0$ 而取实数时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=1$；　当 $\Delta z\to 0$ 而取纯虚数时，

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=-1$，故极限不存在，即不可导.

关于复变函数的和、差、积、商，复合函数的导函数定理与数学分析的实变函数的情形，形式上一致. 故不一一证明了.

（a） 设 $f(z)=c$（复常数），则 $f'(z)=0$。

（b） $\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right]'=\sum_{k=1}^{n} f'_k(z)$，

（c） $[f_1(z)f_2(z)]'=f_2(z)f_1'(z)+f_1(z)f_2'(z)$。

（d） $\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]'=\dfrac{f_2(z)\cdot f_1'(z)-f_1(z)\cdot f_2'(z)}{[f_2(z)]^2}$， $f_2(z)\neq 0$。

等等。

2．解析函数概念

设函数 $w=f(z)$ 在 $z_0\in G$ 的一个邻域 $B(z_0,\rho)\subset G$ 的每一点导数 $f'(z)$ 都存在，则称 $f(z)$ 在点 z_0 处是解析的，称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**解析点**。

设函数 $w=f(z)$ 在区域 G 的每一点处都是解析的，则称 $f(z)$ 为 **G 内的解析函数**。

这里要特别注意：所谓函数 $f(z)$ 在一点 z_0 处解析，是指 **$f(z)$ 在 z_0 某一邻域的每一点都有导数存在**。因之，对于区域 G 的一个单独点，我们也称 $f(z)$ 在这个单独的点解析，但必须包括函数在这个点的邻域内 $B(a,\rho)=\{z:|z-a|<\rho\}$ 的各点都可导。

有这种例子，函数在一点可导，但在其邻域内函数未必是可导的。

例如，函数 $f(z)=xz$ 是 S_z 的连续函数，在原点可微但在原点处非解析。

这是因为，令 $z=x+iy$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，$z$ 与 $z+\Delta z$ 为 S_z 的两点，则

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{(x+\Delta x)(z+\Delta z)-xz}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=z\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+x+\Delta x。 \qquad (1)$$

因为当$z=0$时，$f'(0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$

存在，所以$f(z)$在点$z=0$时是可微的。

但$f(z)$在$z=0$点却不是解析的。因为当$z=0$时，$f'(0)$存在，而在$z=0$的邻域$B(z:|z|<\rho)$，$z\neq 0$时，比值（1）的极限在$\Delta y=0$，$\Delta x\to 0$时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=z+x$；在$\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$时，为$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=x$。显然在邻域$B$内，$z\neq 0$时，比值（1）的极限不存在，也就是当$z\neq 0$时，$f'(z)$不存在。依定义，函数在$z=0$点是不解析的。

因之，我们应切实注意，所谓在一点解析的函数，必须在此点某一邻域内每一点都有导数存在。

在实变函数的情形下，所谓函数$f(x)$在区间(a,b)内解析意指在每一点$x_0\in(a,b)$的邻域$B(x_0,\rho)\subset(a,b)$内能展成收敛的幂级数的连续函数，这个函数$f(x)$称为(a,b)内的解析函数。在本书第四章里可知，复变解析函数也能在任一点$z_0\in G$的邻域内展开成幂级数；那里也证明了，能在z_0点展成幂级数的函数是解析函数，这与$f(z)$在z_0的邻域$B(z_0,\rho)$内可导是等价的。故我们把在$z_0\in G$及其邻域内$f'(z)$存在的函数，称为z_0处的解析函数。有的书称之为正则、正则解析、单演等，我们统一称之为解析函数。

3. C.—R.条件（方程）

我们从解析函数的定义，可知复变解析函数（简称解析函数）的特征之一是这类复变函数在其定义域G里的每一点都是可微的。

解析函数的另一个特征是函数$f(z)=u+iv$的u与v满足C.—R.条件（Cauchy-Riemann（哥西—黎曼）条件）

定理2 函数$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域G内为解析的必要条件是函数$u(x,y)$与$v(x,y)$具有连续的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，

$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$且满足方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1}$$

我们把（1）式称为$C.—R.$方程或$C.—R.$条件．

【证明】 设在G内，$f(z)$为解析．依定义，导数

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y},\quad z=x+iy\in G, \tag{2}$$

存在，其值与$\Delta z\to 0$的方式无关，于是

令$\Delta z=\Delta x\to 0$，$\Delta y=0$，则由（2）得

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

令$\Delta z=i\Delta y\to 0$，$\Delta x=0$，则由（2）得

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}\right)=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{4}$$

既然函数为解析，$f'(z)$的存在与$\Delta z\to 0$的方式无关，故（4）与（3）相等，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

由之便得（1）式．

关于另一个结论：四个偏导数都连续，需待第三章的导函数$f'(z)$连续，才能证明，这里先承认下来．

（证毕）

定理3 函数$f(z)=u+iv$，$z=x+iy$，在G内为解析的充分条件是u与v在点$(x,y)\in G\subset S_z$处有连续偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$存在，且满足$C.—R.$方程．

【证明】 从u与v的可微性出发，在$(x,y)\in G$的邻域内，由

于偏导数存在且连续及中值定理，于是

$$\Delta u = u(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - u(x,y)$$

$$= [u(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - u(x,y+\Delta y)]$$

$$+ [u(x,y+\Delta y) - u(x,y)]$$

$$= \Delta x\frac{\partial}{\partial x}u(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y) + \Delta y\frac{\partial u}{\partial y}u(x,y+\theta_2\Delta y)$$

$$= \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \Delta x\varepsilon_1 + \Delta y\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2\Delta y$$

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$；$\varepsilon_1, \varepsilon_2$与 Δx，Δy一起趋于0．

同理，$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y$

其中 ε_3，ε_4与 $\Delta x, \Delta y$一起趋于0．

因此，

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)$$

$$+ (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y\Bigg] \qquad (1)$$

又因u与v合于 C.—R. 条件，将其中的$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$分别以$-\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial x}$代入，及

$$\left|\frac{(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x}{\Delta z}\right| = |\varepsilon_1+i\varepsilon_3|\frac{|\Delta x|}{|\Delta z|},$$

$$\left|\frac{(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta z}\right| = |\varepsilon_2+i\varepsilon_4|\frac{|\Delta y|}{|\Delta z|},$$

其中当$\Delta z\to 0$时，$|\varepsilon_1+i\varepsilon_3|\to 0$，$\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|\leqslant 1$；$|\varepsilon_2+i\varepsilon_4|\to 0$，$\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\leqslant 1$．

由(1)式，

$$\therefore\ \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由于偏导数存在，故$f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$存在，即定理3成立。

（证毕）

把定理2及定理3合在一起，便有定理4。

定理4 函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域G内为解析函数的必要充分条件是$u(x,y)$与$v(x,y)$具有连续的偏导数，且满足$C.$—$R.$ 方程。

应用直角坐标与极坐标间的关系，设$z=\rho e^{i\theta}$，则$f(z)=u(\rho,\theta)+iv(\delta,\theta)$，其 $C.$—$R.$方程为

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}. \tag{A}$$

同样，设 $f(z)=R(x,y)e^{i\phi(x,y)}$，则$C.$—$R.$方程为

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \phi}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{B}$$

请读者自己验证(A)与(B)两式的成立。

依$C.$—$R.$条件，$f'(z)$有下表达形式：

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y+iv_x=u_x-u_yi=v_y-iu_y \tag{C}$$

或
$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\ \frac{\partial f}{\partial y}. \quad \text{（称为形式导数）} \tag{D}$$

这可由定理的（c）式，得形式表达式：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=\frac{\partial f}{\partial x}$$

要注意解析函数理论在数学物理中的许多重要应用，都与$C.$—$R.$方程有关系。这可以从解析函数和$C.$—$R.$方程的关系来导得。

4. 解析函数的性质

（a） $f(z)$在G内解析，则必连续（§2·1已证过）；

（b） 如果 $f_1(z)$与 $f_2(z)$在G内解析，则函数

$$f_1(z)\pm f_2(z);\ f_1(z)\cdot f_2(z);\ \frac{f_1(z)}{f_2(z)},\ f_2(z)\neq 0$$

在 G 内解析；

（c）设 $w=f(z)$ 是 z 的解析函数，而 $z=\phi(t)$ 是 t 的解析函数，则 $f(\phi(t))$ 是 t 的解析函数，并且

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t))=\frac{df(z)}{dz}\cdot\frac{d\phi(t)}{dt}.$$

或 $$f'(\phi(t))=f'(z)\cdot\phi'(t).$$

这些性质，由于导数定义，极限定理、代数运算的法则、复数域等这些概念和法则与实数域的逐字逐句相类似，且（b）与（c）是成立的．这里只列举而不一一证明了．

从定理 2 和定理 3，可知 $C.-R.$ 方程很重要，因为它给出了判别函数为解析的可靠方法．

【例 1】 应用定理 3，试证函数 $f(z)=z^3+1$ 在 S_z 上解析，并导出它的 $C.-R.$ 方程．

【解】 设 $f(z)=u+iv$，$z=x+iy$，于是得

$$u=x^3-3xy^2+1,\ v=3x^2y-y^3,\ z\in S_z.$$

于是 $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy$，$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy$，$\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$．

在 S_z 上，它们都连续，且合于 $C.-R.$ 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故 $f(z)$ 解析．

【例 2】 设函数

$$f(z)=\frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2},\ z\neq 0,\quad f(0)=0.$$

试证 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不解析．

【证明】 显然函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处连续，在 S_z 内连续．$f(z)$ 的实部与虚部 u 与 v 的四个偏导数在原点都存在，但因

$$u=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2},\ v=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2};\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2)(3x^2)-(x^3-y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2},$$

故，当 $y=0$，$x\to0$ 时，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1$。

同理，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-1,\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1,\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}=1,$

且满足 $C.-R.$方程。

但 $f'(0)$不存在，故依定义，函数 $f(z)$在 $z=0$处不解析。

【例3】 设函数 $w=f(z)$在G内为解析函数，试证：

（i）如果 $f'(z)\equiv0$，$z\in G$，则 $f(z)$ 在G内为常数；

（ii）如果 $f(z)$ 的实部、虚部、模及辐角四项中有一项是常数，则 $f(z)$ 为常数；

（iii）如果 $\overline{f(z)}$也是解析函数，则 $f(z)$为常数。

【证明】

（i）因为设 $f'(z)\equiv0$，由本节3的（C）式，可知$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$全为0，通过对实函数的积分，得$u$ 与 v 均为常数，从而 $f(z)$为常数。

（ii）设 u 为常数，则由$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，及

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ 从而 $f(z)$恒为常数。

同理，当 v、$|f(z)|$、$\arg z$为常数时，$f(z)$为常数。

比如 $|f(z)|$ 为常数时，则 $u^2+v^2=c$（常数），可得方程组。

$$\therefore\quad 2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+2v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ 2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+2v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

因$f(z)$解析，将$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$代入，解方程组，便得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0。$$

从而 $f(z)$ 为常数。

5. 单叶解析函数及其反函数

反函数的定义和实函数的类似。

设在区域 $G\subset S_z$ 内给定函数 $W=f(z)$，由函数的定义，z 在 G 内变动时，对应的函数值的全体所组成的集设为 D（理论上，G 和 D 是集合，实用上是区域）。

我们在 D 内取任一值 $w=w_0$；则区域 G 内必有一点 $z=z_0$，使得函数在 z_0 所取的值恰好是 w_0，即：

$$w_0=f(z_0)。$$

显然 z 的值可能是许多个，因此 D 内任一值 w 将与一个或多个 z 的值相对应。这种对应确定着 D 的单值或多值函数 $z=F(w)$，或记为 $z=f^{-1}(w)$。我们称之为 $w=f(z)$ 的**反函数**。习惯上把 $F(w)$ 的自变量仍用 z 表示，称 $F(z)$ 或 $f^{-1}(z)$ 为 $f(z)$ 的反函数，称 $f(z)$ 为**直接函数**。例如 $w=z^2$ 为直接函数，$w=\sqrt{z}$ 为反函数等。

如果 $f(z)$ 与 $F(w)$ 都是单值函数，称之为**双方单值函数**。

如果 $w=f(z)$ 是 $G\subset S_z$ 的解析函数，当 $z_1\neq z_2$ 时，有 $f(z_1)\neq f(z_2)$，则称 $w=f(z)$ 为 G 的**单叶解析函数**，G 为**单叶性区域**。

数学分析中曾称：在区间 X 内定义的连续单调增加（减小）的函数 $y=f(x)$，在其函数值所在的区间 Y 内必存在单值反函数 $x=f^{-1}(y)$；反函数在 Y 内连续、单调增加（减小）。

在复变函数论里有下面的定理：

定理5 单叶解析函数 $f(z)$，$z\in G\subset S_z$ 的一阶导数 $f'(z)\neq 0$，$z\in G$；存在反函数 $z=f^{-1}(w)$，$f^{-1}(w)$ 仍是单叶解析函数；$D=f(G)$ 仍是单叶性区域；且

$$[f^{-1}(w)]'f'(z)=1，\text{或}\ [f^{-1}(w)]'=\frac{1}{f'(z)}。$$

关于这个定理将在第六章§6·2—2、3里予以证明.

§2·2 解析函数与调和函数的关系

1. 调和函数概念

所谓调和函数，就是这样的函数 $u(x,y)$，它是 x,y 的二元实函数，它在区域$G\subset S_z$内具有连续的二阶偏导数，且满足微分方程（或称 Laplace方程）：

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

设两个二元实函数$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$都是区域 $G\subset S$ 的调和函数，且满足$C.—R.$方程，则称它们为**共轭调和函数**.

2. 解析函数与调和函数间的关系

设函数$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，在区域$G\subset S_z$内解析，且u与 v 在G内都有连续的二阶偏导数. 由第三章，我们将看到，如果 $f(z)$在G内解析，则 $f'(z)$ 在G内也解析，因之，$f(z)$的二阶偏导数为：

$$f''(z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

存在，故u与v的二阶偏导数存在，由 $f''(z)$的连续性，便知这些偏导数也在G内连续. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

进而有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial v^2}{\partial y\partial x}.$$

相加，得 Laplace 方程：

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

同样，有$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

这样一来，u与v都满足 Laplace方程，且满足 $C.$—$R.$方程，u与v是共轭调和函数。

这样说来，当函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是 $G\subset S_z$ 的解析函数时，$u(x,y)$与$v(x,y)$都是调和函数。由于它们满足$C.$—$R.$方程，故它们又是共轭调和函数。

对于任意选取的两个G内的调和函数u与v，所组成的函数 $u+iv$，一般说来，不一定是解析函数，这是显然的。要使$u+iv$ 在G内解析，必须这样做：任取一个调和函数u，就可以用$C.$—$R.$方程来确定v，如果已知 $\Delta u=0$，亦可确定v。由于

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

则得 $$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c\ （常数）.$$

其中：$(x_0,y_0)\in G(x,y)\in G$，c 是实常数，这样确定的v除c外是唯一的。

这样确定的u与v所共同构成的函数$u+iv=f(z)$，必在G内解析。

【例1】 设 $u(x,y)=y^3-3x^2y$，试求 $f(z)=u+iv$.

【解】设 $u=y^3-3x^2y$，由 $C.$—$R.$ 方程，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy=\frac{\partial v}{\partial y}，及\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

解之得：$v=-3xy^2+\phi(x)$，及 $\phi'(x)=3x^2,\phi(x)=x^3+c$（其中$c$为常数）．

故 $v=-3xy^2+x^3+c$.

显然u与v都满足 Laplace方程，故

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=y^3-3x^2y+i(-3xy^2+x^3+c)$$
$$=i(z^3+c)$$

为所求的解析函数。

一般地说，下列定理成立：

定理 1 对于每一个在单连通区域 $G\subset S_z$ 内的调和函数 $u(x,y)$，都可以构造一个 G 内的解析函数 $f(z)$，以 $u(x,y)$ 为实部或为虚部，可能只差一个常数（实或纯虚数）。

由以上所论，调和函数和解析函数之间有如此的密切关系，必然由于解析函数的重要性和实践意义，而带来调和函数的重要意义和实践的意义。例如，调和函数在物理上反映了大量的客观事物规律，平面稳定流动在无源无旋区域内的势函数与流函数；平面静电场在无电荷区域内的势函数与力函数；平面热流场在无热源的区域内的流函数与温度；等等，都是调和函数。而且在流体力学上，从势函数不难导得稳定平面流场的复势（解析函数）$f(z)$，与复速度 $\overline{f'(z)}$。因之，关于调和函数的概念和理论，随着科学技术的发展，产生了许多推广。如亚调和函数，多重调和函数等，并在数学物理方程和积分方程的问题中，有了广泛的应用。

习　题 (2·1)

1. 设区域 G 的函数 $w=f(z)=u+iv$，$z=x+iy$ 在 G 内有连续的偏导数。依变换 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=-\frac{i}{2}(z-\bar{z})$，试证：

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

如果 $f(z)$ 在 G 内解析，则：

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\equiv 0.$$

2. 问下列函数：

$\bar{z}$，z^2，e^z，$\cos\bar{z}$，$z\in S_z$。

哪些为解析函数，为什么？

3. 在习题1的假设下，设u与v具有连续的二阶偏导数，试证：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}.$$

4. 试求满足下列条件的解析函数$f(z)=u+iv$。

① $u=\frac{y}{x^2+y^2}$，且 $f(1)=0$。

② $u=\frac{1}{2}(x^2+1)$，且 $f(-i)=i$。

5. 试求下列函数的实部和虚部，及 $C.$—$R.$方程。

① $\frac{1+z}{1-z}$，$z\neq 1$，$z\in S_z$。

② $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$，$z\neq 0$，$z\in S_z$。

6. 试证：函数$f(z)$与$\overline{f(\bar{z})}$ 在 S_z内同时为解析函数。

7. 试证：函数 $f(z)=xz^2$在S_z上连续，当$z=0$时可导，但在S_z上不是解析函数。

§2·3 某些初等函数的解析性

初等复变函数是复数域的最简单、最基本的常用的函数类。它的许多性质和实数域的实变函数的相类似，是实变函数性质在复数域的推广。但在推广的过程中，出现了许多新性质，如指数函数的周期性；对数函数的无穷多值性；正弦函数和余弦函数的模的无界，等等。从这些函数的特性来看，只有这类函数从实数域推广到复数域后，才较完满地揭示它们的本质。

这一节主要讨论初等函数的解析性，这可从它们的可微性来判定。

我们把初等代数函数和初等超越函数合称初等函数。什么叫初

等代数函数呢？

1. 初等代数函数

把复变数 z 和常数经有限次的 +、－、× 运算所组成的函数称为多项式或有理整式。其形为：

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,\quad (a_n\neq 0).$$

称为n次多项式，n是正整数。设w适合方程：

$$P_0+P_1(z)w+P_2(z)w^2+\cdots+P_n(z)w^n=0. \qquad (1)$$

其中 $P_k(z)$，$k=0,1,2,\cdots,n$ 都是z的多项式，我们称w为z的代数函数。

当 $n=1$，$P_n(z)$为常数，w为z的多项式。当 $n=1$，$P_n(z)$非常数，称w为z的有理分式函数简称有理函数。它是多项式的商。所谓初等代数函数就是能由（1）式解出的z的显函数。

非代数函数的函数称为超越函数。

每一个常数是一个解析函数，其导数为 0 。$w=z$ 是最简单非常数的解析函数，其导数为 1 . 因为两个解析函数之和与积仍是解析函数。因之，每个n次多项式：

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,\quad a_n\neq 0.$$

仍是平面S_z的解析函数。其导数为：

$$P'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}.$$

依代数基本定理，当$n\geqslant 1$时，$P(z)$在S_z上至少有一个零点。所谓零点α，就是使$P(\alpha)=0$的点，因之，可写成连乘积：

$$P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)=a_n\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)$$

其中α_1，α_2，$\cdots$，α_n都是 $P(z)$ 的零点。如果其中的α有m个相同，则称α是$P(z)$的m阶零点。这时

$$P(z)=(z-\alpha)^mP_h(z),\quad P_h(z)\neq 0.$$

其中 $P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(m-1)}_{(\alpha)}=0$，而$P^{(m)}_{(\alpha)}\neq 0$。

设$P(z)$与$Q(z)$均为多项式，且无公共零点，依定义，

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

为有理函数.

2. 幂函数和根式函数

① 幂函数

把形如 $w=z^n$, n 是正整数的函数称为幂函数. 这类函数在 S_z上为z的连续函数, 而且导数

$$w'=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=nz^{n-1},\quad z\in S_z.$$

存在, 故z^n为S_z的解析函数. 当 $z\neq 0$时, $f'(z)\neq 0$.

多项式的每一项都是幂函数, 每一项又都解析. 于是多项式 $P(z)$为S_z的解析函数.

② 函数 $w=\dfrac{1}{z}$

这个函数显然是上述幂函数 z^n 当 $n=-1$ 时的情形, 在第32页中我们已经说明过, 它是逆元素, $z\cdot z^{-1}=1$, $z\in S$, $z^{-1}=\dfrac{1}{z}$. 当 $z\neq 0$ 时, 它在S_z内解析. $\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$, $z\neq 0$.

首先, 这个函数所作的映射称为**反演映射**. 它把 $\widehat{S}_z$的原点和无穷远点分别映射成$\widehat{S}_w$的无穷远点和原点. 把邻域$B(0,\rho)\subset\widehat{S}_z\longrightarrow B'(\infty,R')\subset\widehat{S}_w$; 把$B(\infty,R)\subset\widehat{S}_z\longrightarrow B'(0,\rho')\subset\widehat{S}_w$. 基于函数 $w=\dfrac{1}{z}$的这个特性, 我们利用它, 使对函数$f(z)$ 在 $B(\infty,R)$ 内性质的研究, 转化成对 $f(z)$在 $B(0,\rho)$内性质的研究 (参看 §4·8—2, §6·4—1等).

其次, 如果把两对应复平面S_z与S_w重合 (轴都重合), 于是 $w=$

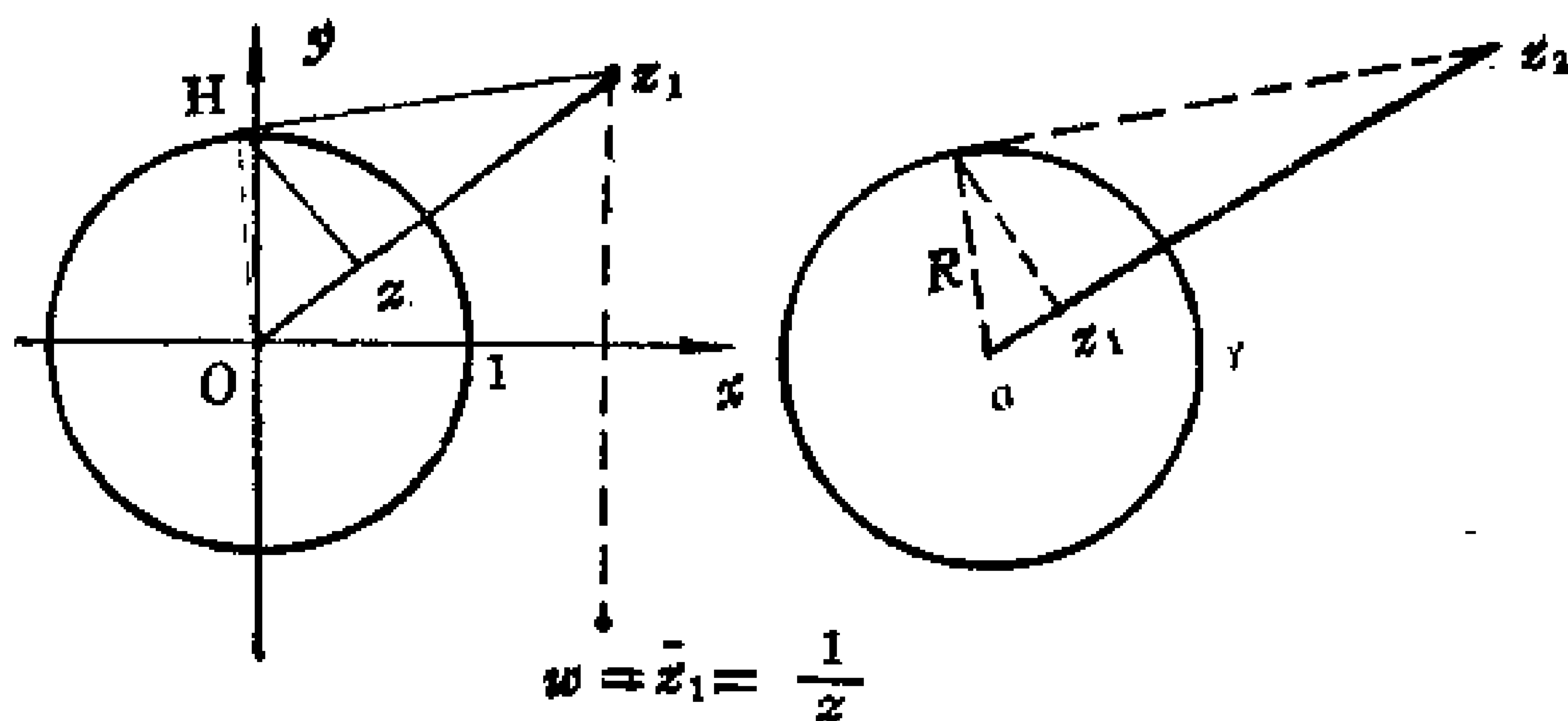


图2·1

$\frac{1}{z}$，变成$\bar{z}_1=\frac{1}{z}$（图2·1）。这是因为，令 $z_1=\frac{1}{\bar{z}}$，则

$$\frac{|z_1|}{1}=\frac{1}{|\bar{z}|}=\frac{1}{|z|}.$$

即

$$|z_1|\,|z|=1,$$

$$\arg z_1=-\arg\bar{z}=\arg z. \qquad (1)$$

怎样作出（图2·1）和$w=\bar{z}_1=\frac{1}{z}$点呢？

以O为中心作单位圆，过 z 作$\overline{Oz}$的垂线交单位圆周于H点，过H作圆的切线与$\overline{Oz}$的延长线交于z_1点。然后作关于Ox轴作z_1的对称点$\bar{z}_1$，即为所求．即

$$w=\bar{z}_1=\frac{1}{z}.$$

事实上，由几何性质，可知$\overline{Oz}$：$\overline{OH}=\overline{OH}$：$\overline{Oz_1}$即得（1）式。

这样已知点 z，便可在$\overline{Oz}$的延长线上，由（1）式的 $|z_1|\,|z|=1$ 而得到点z_1。再作z_1的关于Ox轴的对称点$\bar{z}_1$，便得到点，

$$w = z_1 = \frac{1}{z}.$$

我们把从点 z 到点$\frac{1}{z}$的映射（变换）称为**反演映射（变换）**。或称**关于单位圆 $|z|=1$的反演映射（变换）**。

我们把满足关系式（1）的两点z 与 z_1称为关于单位圆周的对**称点**，当然 z_1 与z要分别位于圆外和圆内，并位于由原点引出的射线的同一侧。

如果以a为中心作一圆周 $r=\{z: |z-a|=R\}\subset S_z$，点$z_1\in \text{int}r$，$z_2\in \text{ext}r$，且同位于从圆心$a$出发的射线的同一侧．我们把$z_1$与$z_2$满足关系式：

$$|z_1-a|\ |z_2-a|=R^2 \tag{2}$$

时，称为**关于圆周r的对称点**。（参看§6·4—4）

显然，满足（1）式的点z与z_1是满足（2）式的特殊情形。

③ 根式函数

设$w\neq 0$，我们把 $w=z^n$ 的反函数，记为：

$$z=\sqrt[n]{w}=w^{\frac{1}{n}},\quad n>1 \text{ 是自然数．} \tag{1}$$

称z为w的n次根式函数．习惯上，把$\sqrt[n]{z}$称为z^n的反函数。

如果令 $z=\rho e^{i\theta}\in G$，$w=re^{i\phi}, 0<\phi<2\pi$，则

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\quad \theta=\frac{\phi+2k\pi}{n},\quad k=0,\ 1, 2,\ \cdots,\ n-1$$

这时（1）式有n个分枝：

$$z_k=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

当 $k=0$时，$z_0=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\phi}{n}}=\sqrt[n]{w}$，（$0<\arg w<2\pi$）是 n 个分枝的主枝．

我们把平面S_w从原点沿正实轴剪开，得区域 $E=\{S_w\sim(\text{Re}w\geqslant 0,\ \text{Im}w=0)\}$，函数 $z_0=\sqrt[n]{w}$ 便在D内单值连续，这个函数的值

域，因 $\theta=\frac{\phi}{n}$，(既然 $0<\arg w<2\pi$) 自然是 $0<\arg z<\frac{2\pi}{n}$，即函数 $w=z^n$的单叶性区域G_0为角域：

$$G_0=\left\{z: 0<\arg z<\frac{2\pi}{n},\ 0<|z|=\rho<\infty\right\}.$$

（参看§6·6—1）依§2·1—5定理5，可知在角域 G_0 内，$w=z^n$ 是单叶解析函数，它的反函数 $z=\sqrt[n]{w}$ 在D内也是单叶解析．并且

$$(\sqrt[n]{w})'=\frac{1}{(z^n)'}=\frac{1}{n}z^{1-n}=\frac{1}{n}w^{\frac{1}{n}-1}.$$

习惯上，称$\sqrt[n]{z}$ 是z^n的反函数，于是

$$\frac{d}{dz}(\sqrt[n]{z})=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.$$

同理，其他分枝z_k也都是D内的解析函数。

3. 指数函数和对数函数

①指数函数及其特性

应用 Euler 公式，称

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y),\ z=x+iy\in S_z.$$

为指数函数。e^x是模 $|e^z|$，y是辐角 $\mathrm{Arg}z$，实部、虚部为：

$$u(x,y)=e^x\cos y,\ v(x,y)=e^x\sin y.$$

有的书把e^z写成 expz．(exp 是 exponential（指数的）缩写)．

指数函数e^z具有以下的特性：

1）当 $y=0$ 时，$e^z=e^x$，而 $e^x>0$，∴ $e^z\neq0$.

2）e^z 在 S_z 上解析，依C.—R. 条件及偏导数存在且连续来判定．

3）$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]=e^{z_1+z_2}$.

4）e^z为以$2\pi i$为周期的周期函数，因为

$$e^{z+2k\pi i}=e^xe^{(y+2k\pi)i}=e^x[\cos(y+2k\pi)+i\sin(y+2k\pi)]$$
$$=e^xe^{iy}=e^z. \qquad (k\text{为整数})$$

故$2k\pi i$是e^z的周期，$k=1$时，周期最小（基本）为$2\pi i$。

除此而外，e^z 没有其他周期．否则，设l是它的周期，依周期函数的定义，应有：

$$e^{z+l}=e^z,\quad 即 e^l=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=e^{2k\pi i}.$$

$$\therefore\quad l=2k\pi i,\ k 是整数.$$

因此，周期是指数函数e^z的特征之一。

②对数函数 $\mathrm{Log}z$ 及 $\log z$

在实变数的情形下，通常是把对数函数 $\ln y$或 $\log_e y$ 定义为指数函数 $y=e^x$ 的反函数．我们用同样的办法来定义复数域的对数函数。

设取任意的复数 z，$z\neq 0$．我们把满足方程式：

$$e^w=z$$

的w称为z的对数函数，并记为

$$w=\mathrm{Log}z.$$

现令 $w=u+iv$，$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，得

$$e^{u+iv}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$e^u(\cos v+i\sin v)=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

于是

$$e^u=\rho=|z|;\quad \cos v=\cos\theta,\ \sin v=\sin\theta.$$

$$u=\log\rho=\log|z|;\quad v=\theta+2k\pi,\ k\ 为整数.$$

$$\therefore\quad w=u+iv=\log|z|+i(\arg z+2k\pi).$$

我们有：$\mathrm{Log}z=w=\log|z|+i(\arg z+2k\pi)$，$k$ 为整数．

在这里，当点$z\neq 0$一定时，$\log|z|$是唯一确定的，而 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$，$k$是整数，是无穷多值的，故

$$\mathrm{Log}z=\log|z|+\mathrm{Arg}z$$

是无穷多值的函数．这是从指数函数 $e^w=z$的周期性也可以预见到的事实．

我们把$\mathrm{Arg}z$的主值 $\arg z$（$-\pi<\arg z\leqslant\pi$）所确定的值，作为$\mathrm{Log}z$的主值或主枝，并记为 $\log z$，即：

$$\log z=\log|z|+i\arg z,\quad -\pi<\arg z\leqslant\pi.$$

即 $$\operatorname{Log} z=\log z+2k\pi i,\ k\ \text{是整数}.$$

当z是正实数时，$\arg z=0$，$\log z=\log|z|$。这便是普通的对数函数。因此可以说$\log z$是通常（实）对数函数在复数域的推广。

【例】 $\log 1=0$，$\operatorname{Log}1=\log 1+i\operatorname{Arg}1=2k\pi i$；

$\log(-1)=\pi i$，$\operatorname{Log}(-1)=(2k+1)\pi i$；

$\log i=\dfrac{\pi}{2}i$，$\operatorname{Log} i=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$；

$$\operatorname{Log}(2+3i)=\log|2+3i|+i\arg(2+3i)+2k\pi i$$
$$=\frac{1}{2}\log 13+i\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2k\pi\right)\ k\text{为整数}.$$

现在来讨论$\operatorname{Log} z$的主枝$\log z$的解析性。

首先，由于 $\log z=\log|z|+i\arg z$, $z\neq0$. 当 $z\neq0$时，$\log|z|$在平面S_z上到处连续。但 $\arg z$在原点未定义，在负实轴上不连续。这是因为，在负轴上任取一点 $P(x,0)$，$x<0$，则当点$z\in S_z$从上半平面 $\longrightarrow P(x,0)$时，

$$\lim_{z\to P}\arg z=\lim_{y\to 0}\arg(x+iy)=\pi,\ y>0;$$

而当$z\in S_z$从下半平面 $\longrightarrow P(x,0)$时，

$$\lim_{z\to P}\arg z=\lim_{y\to 0}\arg(x+iy)=-\pi,\ y<0.$$

由此可见，$\arg z$在负轴上不连续。

由于 $z=0$时，$\log|z|$及$\arg z$无意义；在负轴上 $\arg z$不连续，故把S_z从原点起沿负轴剪开（即去掉 $\{x\leqslant0,\ y=0\}$），得区域 $G=[S_z\sim\{x\leqslant0,\ y=0\}]$。函数 $\log|z|+i\arg z=\log z$在G内，当$z\in G$沿任一曲线 $\longrightarrow z_0$ 时，极限

$$\lim_{z\to z_0}\log z=\log z_0$$

都存在，故 $\log z$ 在G内连续。

其次，依§2·1—5定理5，主枝 $\log z$是 e^w的反函数，$\log z$ 在区域G内解析，且：

$$(\log z)'=\frac{1}{(e^w)'}=\frac{1}{e^w}=\frac{1}{z}.$$

至于 $\mathrm{Log}z$的其他各分枝 $\log_k z$ 的解析性，可同样证明.

因为e^w是以 $2\pi i$ 为周期的函数，它的单叶性区域是以平行于实轴的两条直线为边，宽为2π的带域。这就是对数函数 $\log z$ 的值域D。

$D_0=\{w: 0<\mathrm{Im}w<2\pi,\ -\infty<\mathrm{Re}w<\infty\}$，（参看§6·6—2）。

同样可以证明函数 $\log(1+z)$在S_z平面上从 -1 沿负轴到 $-\infty$ 剪开所得的区域上解析，且

$$[\log(1+z)]'=\frac{1}{1+z}.$$

关于$\mathrm{Log}z$有下述性质：

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(z_1z_2)&=\log|z_1z_2|+i\mathrm{Arg}(z_1z_2)\\&=\log|z_1|+\log|z_2|+i\mathrm{Arg}z_1+i\mathrm{Arg}z_2\\&=\mathrm{Log}z_1+\mathrm{Log}z_2,\end{aligned}$$

$$\mathrm{Log}\frac{z_1}{z_2}=\log\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+i\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Log}z_1-\mathrm{Log}z_2,\ 等等,$$

其中z_1、$z_2\neq0$、∞。这些性质可以类似于实数域时的证明。

4．三角函数和反三角函数

①三角函数

我们从 e^{iz} 及 e^{-iz} 把等式：$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$，

$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$。分别称为正弦函数和余弦函数。

1）当 z 为实数时，它们就是实函数，并保留许多性质。如：

$\cos(-z)=\cos z$，$\sin(-z)=-\sin z$

$(\sin z)'=\cos z$，$(\cos z)'=-\sin z$

$\sin^2z+\cos^2z=1$，

$\sin 2z = 2\sin z\cos z$，$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$，等等，
这些公式都可以从定义来导得。

2）当z_1，$z_2 \in S_z$时，则：

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$。

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$。

3）函数 $\sin z$为奇函数，$\cos z$ 为偶函数。

这可由对实变函数奇、偶性的检验来证明。

4）$\sin z$ 及 $\cos z$ 的零点分别是 $k\pi$ 和 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$，其中$k$是整数。

事实上，由 $\sin z = 0$，可得 $e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i}$，即

$e^{2i(x+iy)} = e^{2k\pi i}$，$\therefore$ $x = k\pi$，$y = 0$。

$z = x + iy = k\pi$，k 是整数。

同理，$\cos z$的零点，是方程$\cos z = 0$ 的根$\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$。

5）$\sin z$ 与 $\cos z$都是以 $2k\pi$（k 为整数）为周期，以2π为最小周期（或基本周期）的周期函数。

事实上，$\sin(z+2k\pi) = \frac{1}{2i}[e^{i(z+2k\pi)} - e^{-i(z+2k\pi)}]$

$$= \frac{1}{2i}[e^{-y}e^{+ix} - e^{y}e^{-ix}]$$

$$= \frac{1}{2i}[e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}]$$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z。$$

同理，可证$\cos z$以$2k\pi$为周期。

它们都在 $k=1$ 时，为最小周期2π。

6）$\sin z$ 和 $\cos z$都是$z \in S_z$的解析函数。

这可以从e^{iz}及e^{-iz}的解析性来证得。

关于其他的三角函数，如正切、余切、正割、余割分别用下列关系式来定义并记为：

$$\mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \mathrm{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}\ \text{等.}$$

其中 $\mathrm{tg}z$ 和 $\mathrm{ctg}z$ 都是以π为最小周期的周期函数，并分别在去掉$z=\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi$与去掉 $z=k\pi$的S_z平面上解析（k为整数），并且

$$(\mathrm{tg}z)'=\frac{1}{\cos^2 z},\ (\mathrm{ctg}z)'=\frac{-1}{\sin^2 z},\ \mathrm{ctg}z=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+z\right).$$

必须注意：尽管正弦、余弦函数由实数推广到复数时，有许多性质在推广过程中保留着，但不是全部，而是部分．例如，在复变数的情形下，不能说 $|\sin z|\leqslant 1$，或 $|\cos z|\leqslant 1$．因为通过计算，

$$\sin i=\frac{e^{-1}-e}{2i}\approx 1.17i,\quad \cos i\approx 1.54.$$

一般地讲，$\sin z$是无界的，$z\in S_z$．

例如，令 $x=\pm\frac{\pi}{2}$，$y>0$时，则

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left[e^{\frac{\pi}{2}i}e^{-y}-e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{y}\right]=\frac{1+e^{2y}}{2e^{y}}.$$

因为 $(1-e^y)^2\geqslant 0$，$\therefore\ |\sin z|>1$，并且

$$\sin z=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x.$$

$$|\sin z|=\sqrt{\frac{1}{4}\left[(e^y+e^{-y})^2\sin^2 x+(e^y-e^{-y})^2\cos^2 x\right]}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}.$$

当 $y\to\infty$时，$|\sin z|\to\infty$．

* ②反三角函数

既然三角函数可由指数函数来定义，自然会预料到反三角函数

与对数函数有关，下面说明反三角函数是用对数函数来表示的。

设函数 $z=\sin w=\frac{1}{2i}(e^{iw}-e^{-iw})$。我们把正弦函数的反函数称为反正弦函数，记为

$$w=\operatorname{Arcsin}z.$$

由 $z=\frac{1}{2i}(e^{iw}-e^{-iw})$ 可以得出 $e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}$，即

$$w=\operatorname{Arcsin}z=-i\operatorname{Log}(iz+\sqrt{1-z^2}).\qquad(1)$$

由于$\sqrt{1-z^2}$是两个值，对数函数是无穷多值，故$\operatorname{Arcsin}z$ 是无穷多值函数。当根式与对数都取单值时，反正弦函数也是单值．并记为 $\arcsin z$ 即

$$w=\arcsin z=-i\log(iz+\sqrt{1-z^2}).\qquad(2)$$

称为 **Arcsinz** 的主值或主枝。

当$z=\pm1$时，$w=-i\log(\pm i)=-i[\log|\pm i|+i\arg(\pm i)]$

$$=\pm\frac{\pi}{2},$$

当$z\neq\pm1$时，由$\sqrt{1-z^2}$的两个值，（2）式的

$$(iz+\sqrt{1-z^2})(iz-\sqrt{1-z^2})=-1.$$

两端取对数并乘以$-i$，得

$$-i[\log(iz+\sqrt{1-z^2})+\log(iz-\sqrt{1-z^2})]$$

$$=-i\log(-1)=\pm\pi.\qquad(3)$$

（3）式两端都是复数．而左端是（2）式的值（因$\sqrt{1-z^2}$是两个值）之和，即$\arcsin z$的两个值之和．因为（3）式中左端等于右端：$\pm\pi+0\cdot i$．故$\arcsin z$ 两个值之和的实部和虚部分别为$\pm\pi$和0。于是每个值的实部必须位于$[-\pi,\pi]$ 之中，两个值中只有一个值的实部属于$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$中，我们就把这个 $\arcsin z$ 的值取为主值，即

$$w=\arcsin z=-i\log(zi+\sqrt{1-z^2}),$$

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}(\arcsin z)<\frac{\pi}{2}.$$

这个函数（主值）arcsin$z$为解析函数，依反函数求导法则，

$$(\arcsin z)'=[i\log(iz+\sqrt{1-z^2})]'=\frac{1}{(\sin w)'}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 w}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\quad z\neq\pm 1.$$

同理，我们把$z=\cos w$的反函数称为**反余弦函数**，记为Arccos$z$。由cos$w$的指数表示式，可得

$$\mathrm{Arccos}\,z=-i\ \mathrm{Log}(z+i\sqrt{1-z^2})$$

其主值为$\arccos z=-i\log(z+i\sqrt{1-z^2})$，

$$(\arccos z)'=-i/\sqrt{z^2-1}.$$

同样，$z=\mathrm{tg}\,w$的反函数称为**反正切函数**，记为

$$\mathrm{Arctg}\,z=\frac{1}{2i}\mathrm{Log}\frac{i-z}{i+z}.$$

等等。

*5. 双曲线函数和反双曲线函数

1）我们用下列等式分别定义双曲线函数：

$$\sinh z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}),\ \cosh z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}),\ \mathrm{tgh}\,z=\frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$\coth z=\frac{1}{\mathrm{tgh}\,z},\quad \mathrm{sech}\,z=\frac{1}{\cosh z},\quad \mathrm{csch}\,z=\frac{1}{\sinh z}.$$

依定义，$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$。当$z=i$时，则

$$\cos i=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)=\cosh 1.$$

又 $$\sin(2+3i)=\frac{1}{2i}[e^{i(2+3i)}-e^{-i(2+3i)}]$$

$$=\frac{1}{2i}[e^{-3}(\cos 2+i\sin 2)$$

$$-e^{3}\{\cos(-2)+i\sin(-2)\}]$$

$$=\frac{i}{2}(e^{3}-e^{-3})\cos 2+\frac{1}{2}(e^{3}+e^{-3})\sin 2$$

$$=i\sinh 3\cdot\cos 2+\cosh 3\cdot\sin 2.$$

其中的自变量用弧度来测量。

2）我们用双曲线函数的反函数定义**反双曲线函数**，例如用，$z=\cosh w=\frac{1}{2}(e^{w}+e^{-w})$定义，并得**反双曲线余弦**：

$$w=\mathrm{Arccosh}z=\mathrm{Log}(z+\sqrt{z^{2}-1}).$$

同理，$\mathrm{Arcsinh}z=\mathrm{Log}(z+\sqrt{z^{2}+1})$.

$$\mathrm{Arctgh}z=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+z}{1-z}.$$ 等等。

*6．一般的幂函数和一般的指数函数

前面曾讨论过$w=z^{n}$，n为自然数的幂函数，和$e^{z}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\right)$.

现在要讨论：

①任意指数的幂a^{α}

其中设$a\neq 0$，∞，为任意的数，α为任意复数。

我们称

$$a^{\alpha}=e^{\alpha\mathrm{Log}a}\ \text{或}\ a^{\alpha}=\exp(\alpha\mathrm{Log}a) \quad (1)$$

为一般的幂，其中 $a\neq 0$，$a\neq\infty$。

显然，幂a^{α}是无穷多值的，我们把

$$a^{\alpha}=e^{\alpha\log a}$$

规定为a^{α}的主值。

【例1】$i^{i}=e^{i\mathrm{Log}i}=e^{i(\log|i|+i(\arg i+2k\pi))}$

$$=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

其主值为$k=0$时，$i^{i}=e^{-\frac{\pi}{2}}$。

可见i^i的值全部为正实数.

【例2】试证$i^2=-1$.

【证明】因为 $i^2=e^{2\mathrm{Log}\,i}=e^{2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}$

$$=\cos(\pi+4k\pi)+i\sin(\pi+4k\pi)=-1.$$

我们用一般的幂a^α，来证明下列定理：

*定理1　设$a\neq0$是S里的任意数. 则a^α的值，

1）　当α是整数时为一值；

2）　当α为任一有理数$\frac{p}{q}$，q为自然数，$\frac{p}{q}$为既约分数时，它有q个值，同位于一个圆周上；

3）　当α是无理数时，它有无穷多个值；

4）　当α为任一复数时，a^α为无穷多值.

【证明】对于幂 $a^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Log}\,a}$，

1）　当 $\alpha=n$（任意整数）时，a^n是连乘积，为一值. 因为，

$$a^n=e^{n(\log|a|+i\mathrm{Arg}\,a)}$$

$$=|a|^n[\cos(n\mathrm{Arg}\,a)+i\sin(n\mathrm{Arg}\,a)]$$

$$=|a|^n[\cos(n\arg a)+i\sin(n\arg a)]$$

显然，只要a一定，$\arg a$就一定，a^n为一值.

2）　当 $\alpha=\frac{p}{q}$ 时，$a^{\frac{p}{q}}$ 实际上是a^p的q次根式$\sqrt[q]{a^p}$. 如1）所论，a^p 是一值，$\sqrt[q]{a^p}$便有q个根式，同位于同一圆周上.

现用 $a^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Log}\,a}$ 的关系式来证明这个事实. 因为，

$$a^{\frac{p}{q}}=|a|^{\frac{p}{q}}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\mathrm{Arg}\,a\right)+i\sin\left(\frac{p}{q}\mathrm{Arg}\,a\right)\right]$$

$$=|a|^{\frac{p}{q}}\left[\cos\left(\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right)\right]$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ q-1.$$

显然它有q个值，这q个值都位于以原点为中心，半径为$|a|_+^{\frac{p}{q}}$的圆周上，而且它们是这个圆周的内接正q边形的顶点，它的主值为$|a|_+^{\frac{p}{q}}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\arg a\right)+i\sin\left(\frac{p}{q}\arg a\right)\right]$.

3）当$\alpha=\rho$（无理数）时，取有理数列$\{r_n\}$，$r_n\to\rho$，则$\{a^{r_n}\}$，$a^{r_n}\to a^\rho$，于是数列

$$\{|a|_+^{r_n}[\cos(r_n\mathrm{Arg}a)+i\sin(r_n\mathrm{Arg}a)]\}$$

所趋近的极限为

$$|a|_+^{\rho}[\cos(\rho\mathrm{Arg}a)+i\sin(\rho\mathrm{Arg}a)].$$

这样，a^ρ的所有值，将依$\mathrm{Arg}a$的一切值来确定。由于$\mathrm{Arg}a$的值是无穷的，所以a^ρ的值构成无穷集合。事实上，a^ρ的辐角的诸值中，没有数值能相差$2k\pi$（k是整数）。因为不然的话，如果对于整数k_1与k_2，$k_1\neq k_2$，能有

$$2k_1\pi\rho-2k_2\pi\rho=2k\pi,$$

则
$$\rho=\frac{2k\pi}{2(k_1-k_2)\pi}=\frac{k}{k_1-k_2}.$$

ρ便是有理数了，但ρ是无理数。

因此，a^ρ的值构成无穷集合，并且这无穷多个值同位于一个圆周上，圆心是原点，半径是$|a|_+^\rho$的圆周。

4）当α是任意复数时，我们由定义

$$a^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Log}a}\text{ 或 }a^\alpha=\exp(\alpha\mathrm{Log}a).$$

设　$\alpha=\xi+\eta i$，$a=re^{i\phi}$，则

$$\mathrm{Log}a=\log r+i(\phi+2k\pi),$$

从而
$$\begin{aligned}a^\alpha&=\exp[(\xi+\eta i)\mathrm{Log}a]\\&=\exp[\xi\log r-\eta(\phi+2k\pi)+i\{\xi(\phi+2k\pi)+\eta\log r\}]\end{aligned}$$

当$\eta\neq0$时，则a^α有无穷多个值，它们都分布在圆周族：

$$|w|=\exp[\xi\log r-\eta(\phi+2k\pi)],\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

上。圆周的半径是

$$R_k=\exp[\xi\log r-\eta(\phi+2k\pi)]=R_0e^{-2k\pi\eta},$$

$$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

这些半径全体形成两个几何级数：当 $k>0$，公比为 $e^{-2\pi\eta}$；当 $k<0$，公比为 $e^{2\pi\eta}$。同时，a^{α}的值的辐角

$$\theta_k=\xi(\phi+2k\pi)+\eta\log r=\theta_0+2k\pi\xi,$$

形成算术级数，公差为 $\pm 2\pi\xi$。

显然，当 $\eta=0$时，α 是实数。

(证毕)

有必要指出，关于幂，在实数的情形下，有公式：

$$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta},\quad a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta},\quad (ab)^{\alpha}=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$$

而在指数是复数时，这些幂的公式，就不一定成立。因为，

设 $\qquad a=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，

则 $\qquad a^{\alpha}=e^{\alpha\log\rho+i(\theta+2k\pi)\cdot\alpha}$，$k$为整数，

$$\mathrm{Log}\,a^{\alpha}=\alpha\log\rho+\alpha i(\theta+2k\pi)+2m\pi i,\quad m\text{ 为整数},$$

$$\therefore\quad (a^{\alpha})^{\beta}=\exp[\alpha\beta\log\rho+\alpha\beta i(\theta+2k\pi)+2\beta m\pi i].$$

但是另一方面

$$a^{\alpha\beta}=\exp[\alpha\beta\log\rho+\alpha\beta i(\theta+2k\pi)],\quad k\text{ 为整数}.$$

即β不是整数时，则

$(a^{\alpha})^{\beta}$ 就不一定等于 $a^{\alpha\beta}$。

②一般的幂函数 z^{μ}

我们根据幂的一般概念，用关系式

$$z^{\mu}=e^{\mu\,\mathrm{Log}\,z},\quad z\neq 0,\quad \mu\text{ 为任意的复数},$$

来定义 z^{μ}。因 $\log z$ 是无穷多值函数，当取$\mathrm{Log}\,z$的主枝 $\log z$，称$e^{\mu\log z}$为它的主枝。由于$\log z$在剪开过的S_z上连续，故函数$z^{\mu}=e^{\mu\log z}$在沿实轴从$-\infty$到0 剪开过的S_z内是单值连续的。而且它的导函数可由复合函数求导方法而求得。即令 $\zeta=\log z$，

$$\frac{d}{dz}(z^{\mu})=\frac{d}{d\zeta}(e^{\mu\zeta})\frac{d\zeta}{dz}=\mu e^{\mu\zeta}\cdot\frac{1}{z}=\mu z^{\mu-1}.$$

③一般的指数函数a^{z}

我们用关系式

$$w = a^z = e^{z\mathrm{Log}a},\quad a \neq 0.$$

所定义的函数，称为**一般的指数函数a^z**，其中z是任意的复数．显然它是无穷多值函数，其主枝为

$$w = a^z = e^{z\log a}.$$

是S_z平面上的解析函数。

当$a = e$时，便得通常的指数函数e^z。

*7．关于初等超越函数的定义

初等超越函数，由以上所论，我们是以指数函数e^z为基础而导得的；同时e^z也是用$e^x(\cos y + i\sin y)$来定义的．当然，也可以用另外的方法来定义．例如，把e^z定义为微分方程$\dfrac{df}{dz} = f$合于初始条件$f(0) = 1$的解；或先用积分$\int_1^z \dfrac{dt}{t}$来定义对数函数，而后把指数函数定义为对数函数的反函数，并在这些基础上定义或导出其他函数来．自然这些方法要建立在微分方程解和积分概念的基础上．我们也可以用幂级数来定义如下：

因为e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $\arcsin x$等函数，依Taylor展开式，分别有：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};\qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

它们在$x \in [a, b]$内解析．级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n};\qquad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}$$

依次对于$x \in (0, 2)$，$x \in (-1, 1)$分别是收敛级数。

我们把上述级数的x，形式地换成z，进而讨论级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!};\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!;\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}/(2n)!;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(z-1)^n/n;$$

$$z+\sum_{n=1}^{\infty}1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)z^{2n+1}/(2^n\cdot n!(2n+1)).$$

前三个是复平面S_z内的收敛级数；后两个分别在圆域 $|z-1|<1$及$|z|<1$内收敛。我们依次定义为：

e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\log z$, $\arcsin z$.

这种定义方法，是应用了第七章解析开拓的思想。这种定义方法，显然是可取的，有些书就是这样定义的。

关于初等超越函数，数学分析里曾以指数、对数、三角、反三角函数等四种为基本的初等超越函数。由于复数的应用，Euler 公式的作用，三角和反三角函数就可以用指数函数和对数函数来表示。因此，在复变函数论里，只以指数和对数函数为基本的初等超越函数。从这一点也显示了复变函数优越的地方。它把在实数域上各不相干的四种基本的初等超越函数，统一变成两种。

从以上的讨论中，我们也看到如何把这些函数在实数域的性质，自然地推广到复数域上去，在这种推广过程中，不但许多性质被保留，而且又出现（或获得）新的性质。例如：指数函数的周期性，对数函数的无穷多值性；$\sin z$，$\cos z$不再保持有界；等等。这些新性质只有把函数从实数域推广到复数域时，才能阐述清楚。而对复数域上的多值函数的讨论，更具有重要意义。因为只有这时才能弄清多值函数的本质。当然关于函数多值性的彻底阐明，还有待于解析开拓概念的引入（这个问题集中在第七章里讨论）。

关于某些初等函数的映射性质和其他性质，则集中到第六章里讨论。

§2·4* 用多项式逼近函数

1. "偏差"和一致收致

类似于数学分析的实变函数列的极限，设 $G\subset S_z$，给出函数列 $\{f_n(z)\}$，如果对于每一点 $z_0\in G$，$\{f_n(z_0)\}$ 存在极限 $f(z_0)$，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z_0)，或 f_n(z_0)\to f(z_0).$$

则称 $\{f_n(z)\}$ 在 G 内收敛于极限 $f(z)$，即 $f_n(z)\to f(z)$。

我们把一个数 a 与另一个数之差的绝对值（或模）$|a-b|$ 称为 a 与 b 的偏差。设闭区域 $\overline{G}$ 上任意两个连续函数 $f(z)$ 与 $\phi(z)$，称差的绝对值的最大值为它们在 $\overline{G}$ 上的偏差，记为

$$\rho(f,\phi)\equiv\max_{z\in\overline{G}}|f(z)-\phi(z)|$$

如果在 $\overline{G}$ 上的 $f(z)$ 与 $\{f_n(z)\}$ 的偏差

$$\{\rho(f_n,f)\}=\rho(f_1,f),\ \rho(f_2,f),\cdots,\ \rho(f_n,\ f),\cdots$$

的极限为 0，即 $\rho(f_n,\ f)\to 0$，称 $\{f_n(z)\}$ 一致收敛于函数 $f(z)$，记为：

$$f_n(z)\rightrightarrows f(z),\quad z\in\overline{G}.$$

显然，设 $\{f_n(z)\}$ 一致收敛于 $f(z)$，则 $\{f_n(z)\}$ 必收敛于 $f(z)$（或 $f_n(z)\to f(z)$）。这是因为如果 $f_n(z)\rightrightarrows f(z)$，则 $\rho(f_n,f)\to 0$。于是

$$|f_n(z)-f(z)|\leqslant\rho(f_n,f)<\varepsilon.$$

和数学分析的证明一样，设 $\overline{G}$ 上的连续函数列 $\{f_n(z)\}$，$f_n(z)\rightrightarrows f(z)$，则 $f(z)$ 也是连续函数。

2. 用多项式逼近函数

设在某一点 z_0 处有邻域 $B(z_0,\rho)$ 存在，某一多项式列 $\{P_n(z)\}$ 在 $B(z_0,\rho)$ 内一致收敛于函数 $f(z)$，则称函数 $f(z)$ 在 z_0 处可以用多

项式逼近到任意程度.

例如，$\{P_n(z)\}$，$P_n(z)=1+z+z^2+\cdots+z^n$一致收敛于$\frac{1}{1-z}$.

故函数$\frac{1}{1-z}$在 $z=0$ 处可以用$P_n(z)$来逼近. 这是因为在 $z=0$的闭邻域 $\bar{B}(0,\rho)=\{z: |z|\leqslant\rho,\ \rho<1\}$ 内

$$\left|(1+z+\cdots+z^n)-\frac{1}{1-z}\right|=\frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}=\frac{\rho^{n+1}}{1-\rho}.$$

因为 $\rho<1$，当$n\to\infty$时，$\rho\to0$，即 $P_n(z)$在 $z=0$ 的邻域B内一致收敛于$\frac{1}{1-z}$.

〔例2〕 试证$\cos z$可以用多项式 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$来逼近.

事实上，由于 $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$，而

$$\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n\rightrightarrows e^{iz},\quad \left(1-\frac{iz}{n}\right)^n\rightrightarrows e^{-iz}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n+\left(1-\frac{iz}{n}\right)^n\right]\rightrightarrows\cos z.$$

或 $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\rightrightarrows\cos z.$$

定理1 设函数 $f(z)$ 在 $G\subset S_z$内连续，如果函数在G内每一点处都可以用多项式来逼近，则 $f(z)$ 在G内为解析函数；反之，如果函数 $f(z)$在G内解析，则它可以用多项式来逼近.

这个定理的前一部分将在 §3·5—6 给出证明，后一部分将在§4·4—1内证明.

函数能用多项式逼近这一性质，在复变函数论里具有重大意义，它是从分析领域里分离出来的又一复变函数论分枝. 这一领域

的发展正在方兴未艾中，它已发展成为现代的很有实用价值的领域——逼近论和函数构造论（实变数的与复变数的）.

习　　题 (2·2)

1. 试证明

① $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$.

② $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$.

③ $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

④ $\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z$, $\frac{d}{dz}\sin z=\cos z$.

⑤ $\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2$.

⑥ $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$.

2. 试求$\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 存在与否?

① 当z沿从原点出发的直线向无穷远点趋近.

② 当z沿双曲线$xy=1$ 的枝向无穷远点趋近.

③ 当z沿 $y=x^2$ 向无穷远点趋近.

3. 设多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

的零点全部都位于上半平面 $\mathrm{Im}z>0$. 并且假设 $a_\nu=\alpha_\nu+i\beta_\nu$, α_ν, β_ν 是实数，$\nu=0,1,2,\cdots,n$ 则

$$U(z)=\alpha_0z^n+\alpha_1z^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}z+\alpha_n$$

与

$$V(z)=\beta_0z^n+\beta_1z^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}z+\beta_n,$$

只能有实数零点，试证之.

4. 求下式的值:

① $\mathrm{Log}_n(-i)$及$\log(-i)$. ② $e^{1-\frac{\pi}{2}i}$ 及 $e^{k\pi i}$.

③ $\sqrt[3]{-8}$. $\sqrt{3+4i}$. 及 $(3+4i)^{1+i}$.

5. 设 $f(z)=f(x+iy)$, 若 $z\in G$是解析函数，试证:

① $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(x+iy)|^2=4|f'(x+iy)|^2$.

② $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log(1+|f(x+iy)|^2)$

$$=\frac{4|f'(x+iy)|^2}{(1+|f(x+iy)|^2)^2},$$

其中假设函数u与v的二阶偏导数存在。

6． 试证：

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(x+ky)=\sin\left(x+\frac{n}{2}y\right)\sin\frac{n+1}{2}y/\sin\frac{y}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(x+ky)=\cos\left(x+\frac{n}{2}y\right)\sin\frac{n+1}{2}y/\sin\frac{y}{2}.$$

其中 $\sin\frac{y}{2}\neq 0$。

7． 试证$w=\cos z$把直线$\mathrm{Re}z=$常数变成椭圆，把直线$\mathrm{Im}z=$常数变成双曲线。

8． 试求函数值：① $w=z^i$。 ② $w=z^{\frac{3}{4}}$。 ③ z^{π}。

9． 试证：

$$z=\mathrm{tg}\left[\frac{1}{i}\mathrm{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

学　习　指　导

一、内容与要求

这一章主要讨论两个问题：

①用微分法讨论复变函数，定义解析函数概念。解析函数当它展开成幂级数（在解析点的邻域内）后看得更清楚，它是由通常的四种有理运算增添取极限这一运算而导得的函数类(§4·4)。

本章还讨论了 $f(z)=u+iv$ 与$C.$—$R.$方程，调和函数，多项

式逼近间的关系．第三章将要用积分，第四章用级数，第六章用几何等方法来进一步揭示解析函数的性质．函数论基本上是围绕这些问题展开的．

这里再一次提请注意，所谓在一点处解析的函数，必须不但在这个点可导而且还要在这个点的邻域内的点导数都存在．

要切实理解和掌握解析函数概念，深入理解判定函数为解析的条件．

调和函数与解析函数的关系，特别密切，而且这也说明它们之间的内在联系．引入了调和函数和共轭调和函数概念，使解析函数的结构特点，显示得就更加清晰了．所谓调和函数，就是具有连续的二阶偏导数且满足 Laplace方程的二元实函数 $u(x,y)$．所谓共轭调和函数，就是满足 $C.-R.$ 方程的两个调和函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$．

已知两个共轭调和函数u与v，便构成解析函数$u+iv$．反之，已知解析函数，则它的实部与虚部都是调和函数，且互为共轭，随便两个调和函数，显然不一定组成解析函数．

要求读者从已知的调和函数$u(x,y)$，去求共轭调和函数$v(x,y)$，以组成解析函数．

②关于初等函数的讨论，是本章的第二个主题．初等函数类是在科学发展的过程中，从各种各样的函数中选出来的．它是最简单、最基本的并经常遇到的函数类．在实际应用中，也占有重要地位．在其他函数的研究中，也经常用到它们的特性．因之初等数学曾用初等方法，数学分析曾用极限讨论过，但都限于实数范围．现在推广到复数域，大部分性质被保留下来，但也出现不少新性质．书上指出的指数函数的周期性，以 $2\pi i$ 为基本周期；对数函数的多值性等等．过去只限于实数范围，初等函数的特性揭露的还不完善，只有推广到复数域，它们的特性，才较为揭露的深入一些．

今后经常讨论初等函数的特性．再高一级的学科也要讨论这种函数的性质．许多问题也常用它们的性质来阐述和解决．

因之，弄清初等函数（实的或复的）的性质，是十分必要的。这里要求读者特别要把指数函数和对数函数的性质搞得深透一些。

尽管我们讨论了多种单值函数和多种多值函数，但在单值函数中，则以指数函数为核心；在多值函数中，则以对数函数为核心。而这两种函数，又互为反函数。眼前要把初等函数的代数、分析性质弄得深透一些。关于它们的几何性质，集中到第六章共形映射里讨论。当然也可以把第二章和第六章关于初等函数的几何性质合并在一起。有的书就是这样处理的。

二、例　题

【例 1】　解方程

① $e^z=1+\sqrt{3}\,i$. ② $\log z=\frac{\pi i}{2}$.

【解】

① 由 $e^z=1+\sqrt{3}\,i$，$z=x+iy$，得

$$e^x(\cos y+i\sin y)=1+\sqrt{3}\,i$$

$$\begin{cases}e^x\cos y=1\\ e^x\sin y=\sqrt{3}\end{cases}$$

解之，得 $e^{2x}=4$，$x=\log 2$。

$$e^{\log 2}\cos y=1,\ \cos y=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y=\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2}=\arccos\frac{1}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

从而　$z=x+iy=\log 2+\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$.

② 因为

$$\log z=\log|z|+i\arg z=\frac{\pi i}{2},\quad z=e^{\frac{\pi i}{2}},\quad |z|=1.$$

$$\therefore\ \arg z=\frac{\pi}{2},\ \text{因之，}z=i.$$

【例 2】设已知 $u=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$，求 $v(x,y)$，使

$$f(z)=u+iv,\quad z\in G\subset S_z,$$

为解析函数，且 $f(1+i)=\frac{1}{2}\log 2$。

【解】 为求v，则由$C.$—$R.$方程，因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\therefore\quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$ $u(x,y)$ 为调和函数。

因v是 $f(z)$的虚数部分，而 $f(z)$ 在 G内解析，故v是u的共轭调和函数。又

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

因之，由后一等式，得 $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\phi(x)$。

$$\therefore\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}+\phi'(x)=\frac{-y}{x^2+y^2},$$

$\phi'(x)=0$，$\phi(x)=c$（常数）。

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+c\right),\quad z=x+iy\in G.$$

依所给条件，$f(1+i)=\frac{1}{2}\log 2+i(\operatorname{arctg}1+c)=\frac{1}{2}\log 2$

$\therefore\quad c=-\frac{\pi}{4}$。

所求的 $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{\pi}{4}$，

$$f(z)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{\pi}{4}\right).$$

【例3】 求解析函数 $f(z)$，使当 $z=0$时，其值为0，并且具有实数部分为：

$$\frac{x(1+x^2+y^2)}{1+2x^2-2y^2+(x^2+y^2)^2} \qquad (1)$$

【解】 设 $z=x+iy$，$f(x+iy)=u+iv$，其中u为已知。并设

$$f(x+iy)=u(x,y)+i\int_0^x -u_y\ (x,0)\,dx+\int_0^y u_x(x,y)\,dy$$

都是单值的。由所设条件，则：

$$f(z)+\overline{f(z)}=2u(x,y)，而u(x,y)=\frac{x(1+x^2+y^2)}{1+2x^2-2y^2+(x^2+y^2)^2}.$$

$$\therefore\quad f(z)+\overline{f(z)}=\frac{2x(1+x^2+y^2)}{1+2x^2-2y^2+(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(z+\bar{z})(1+z\bar{z})}{1+z^2+\bar{z}^2+z^2\bar{z}^2}=\frac{z}{1+z^2}+\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}.$$

这就是说所求的函数为

$$f(z)=\frac{z}{1+z^2}.$$

显然当$z=0$时，$f(z)=0$，它的实部为已知的（1）式。

【例4】 试证：

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

【证明】 先求多项式 $(1-z)^n-1$ 的诸非零的零点的乘积的 $\frac{1}{2^{n-1}}$倍，于是解

$$(1-z)^n-1=0，\ 或\ (1-z)^n=1.$$

得n个根为

$$z_k=1-\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

其中，当$k=0$时，$z_0=0$；

当$k=1$时，$z_1=1-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

$$=\cos 0-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

依三角函数差，和倍角公式，及 Euler公式，得：

$$z_1=2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}-2i\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$=-2i\sin\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)=-2i\sin\frac{\pi}{n}\,e^{i\frac{\pi}{n}};$$

同理，$k=2$时，$z_2=-2i\sin\frac{2\pi}{n}\,e^{i\frac{2\pi}{n}}$；

……………………………………

$k=n-1$时，$z_{n-1}=-2i\sin\frac{n-1}{n}\pi e^{i\frac{n-1}{n}\pi}$.

因此，$z_1z_2\cdots z_{n-1}$

$$=(-i)^{n-1}2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\pi\right)}$$

$$=(-i)^{n-1}2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi e^{i\frac{n-1}{2}\pi}$$

$$=(-i)^{n-1}2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi\left(\cos\frac{n-1}{2}\pi+i\sin\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

(A)

当$n=$偶数时，$(-i)^{n-1}=(-1)(\pm i)$，$\cos\frac{n-1}{2}\pi=0$，$\sin\frac{n-1}{2}\pi=\pm1$；

当$n=$奇数时，$(-i)^{n-1}=\pm1$，$\cos\frac{n-1}{2}\pi=\pm1$，$\sin\frac{n-1}{2}\pi=0$.

这样由(A)得

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{1}{2^{n-1}}z_1z_2\cdots z_{n-1} \qquad \text{(B)}$$

由于 z_1, z_2, $\cdots$, z_{n-1} 是方程 $(1-z)^n-1=0$ 的非零的零点，且

$$(1-z)^n-1=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})(z-z_0),\ z_0=0.$$

两边都展开得

$$-\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}z^{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}z^n$$

$$=z^n+(-1)^{n-1}(z_1\ z_2\cdots z_{n-1})\cdot z^{n-1}+\cdots$$

比较两端 z^{n-1} 的系数，显然有

$$n=z_1z_2\cdots z_{n-1},\quad \binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

代入(B)式，则得所证的结果。

【例5】 设映射为：

$$z=w+e^w,\quad z=x+iy,\quad w=u+iv \tag{1}$$

试求对应于 $u=$常数，$v=$常数诸直线，在 S_z 上的曲线方程。并求对应于直线 $v=0$ 和 $v=\pi$ 的像 $\in S_z$。

【解】 由（1）可得

$$x=u+e^u\cos v,\quad y=v+e^u\sin v \tag{2}$$

消去 v，则得对应于 $u=$常数的曲线为：

$$x-u=e^u\cos\left(y\mp\sqrt{e^{2u}-(x-u)^2}\right).$$

这是因为从（2）可得

$$(x-u)^2+(y-v)^2=e^{2u}(\sin^2v+\cos^2v)=e^{2u},$$

$$v=y\mp\sqrt{e^{2u}-(x-u)^2} \tag{3}$$

当 $v=$常数，消去 u，因

$$\frac{x-u}{y-v}=\text{ctg}\,v,\quad u=x-(y-v)\text{ctg}\,v$$

故对应于 $v=$常数的曲线为

$$y-v=e^{x-(y-v)\text{ctg}\,v}\cdot\sin v. \tag{4}$$

又直线 $v=0$ 是从 $y=0$ 变来的，因为 $v=0$ 时代入（4）式得 $y=0$。与直线 $v=\pi$ 对应的是 $\in S_z$ 的直线：

$$y=\pi,\quad -\infty<x\leqslant-1.$$

【例 6】 借助于函数

$$w=(e^{-i\alpha}z)^{\frac{2\pi}{\beta-\alpha}} \qquad (1)$$

其中 $0\leqslant\alpha<\beta<2\pi$，把角域 $\alpha<\arg z<\beta$ 映射成沿非负的实轴剪开的S_w（参看第六章）．

【解】（1）的两端取对数得

$$\log w=\frac{2\pi}{\beta-\alpha}(\log z-i\alpha)$$

$$\log|w|+i\arg w=\frac{2\pi}{\beta-\alpha}(\log|z|+i\arg z-i\alpha)$$

$$\therefore\quad \arg w=\frac{2\pi}{\beta-\alpha}(\arg z-\alpha)$$

由于 $0\leqslant\alpha<\arg z<\beta<2\pi$，$\therefore$ $0<\arg w<2\pi$.

这就是说S_w，必须是从原点沿正实轴剪开．在这个区域上的函数（1），把角域 $\alpha<\arg z<\beta$变成从零点起沿正实轴剪开的S_w.

【例 7】 设函数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$

在圆域 $|z|\leqslant\rho$ 内解析，并设

$$\int_0^{2\pi}e^{i(k-l)\theta}\,d\theta=\begin{cases}0, & \text{当 } k\neq l \text{ 时.}\\ 1, & \text{当 } k=l \text{ 时.}\end{cases}$$

试证，设 $z=\rho e^{i\theta}$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^2d\theta=|a_0|^2+|a_1|^2\rho^2+\cdots+|a_n|^2\rho^{2n}.$$

【证明】由 $f(\rho e^{i\theta})=a_0+a_1\rho e^{i\theta}+a_2\rho^2e^{2i\theta}+\cdots+a_n\rho^ne^{in\theta}$,

$\overline{f(\rho e^{i\theta})}=\bar a_0+\bar a_1\rho e^{-i\theta}+\bar a_2\rho^2e^{-2i\theta}+\cdots+\bar a_n\rho^ne^{-in\theta}$.

则由所设条件.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\overline{f(e^{i\theta})}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[a_0\bar a_0+a_1\bar a_0\rho e^{i\theta}+a_2\bar a_0\rho^2e^{2i\theta}+\cdots$$

$$+\bar a_1a_0\rho e^{-i\theta}+a_1\bar a_1\rho^2+\bar a_1a_2\rho^2e^{2i\theta}+\cdots]d\theta$$

$$= |a_0|^2 + |a_1|^2\rho^2 + |a_2|^2\rho^4 + \cdots + |a_n|^2\rho^{2n}.$$

【例 8】 设一圆柱体，下底为圆域 $|z| \leqslant \rho$，侧面直立于圆周 $|z| = \rho$ 上，上面的曲面是函数：

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

的 $|f(z)|$，试证此柱体的体积为：

$$\pi\rho^2\left(\frac{|a_0|^2}{1} + \frac{|a_1|^2\rho^2}{2} + \frac{|a_2|^2\rho^4}{3} + \cdots + \frac{|a_n|^2\rho^{2n}}{n+1}\right)$$

【证明】 设 $z = \rho e^{i\theta}$，并由例题 7，则所求的体积为：

$$v = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^\rho \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \rho^{2k+1}\right) d\rho.$$

【例 9】 设函数：

$$w = f(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$$

$$= a_{-n} z^{-n} + \cdots + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

在环域 $r \leqslant |z| \leqslant R$ 上解析．函数把这个环域映射后，所得的区域的面积为：

$$\pi \sum_{k=-n}^{n} k\,|a_k|^2 (R^{2k} - r^{2k})$$

试证之．

【证明】 设 $w = f(x+iy) = u + iv$，应用数学分析的求面积的公式，映射后的面积为：

$$A = \iint\limits_{r \leqslant |z| \leqslant R^2} du dv = \iint\limits_{r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R} \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dx dy$$

$$= \int_r^R \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| \rho d\rho d\theta.$$

但是从数学分析及 $f(z)$ 在环内解析必有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}; \text{且} f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

于是，

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$=\left|\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}\right|^2=|f'(z)|^2.$$

因此，

$$A=\int_r^R\int_0^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\rho d\rho d\theta=2\pi\int_r^R\left(\sum_{k=-n}^{n}k^2|a_k|^2\rho^{2k-1}\right)d\rho$$

$$=\pi\sum_{k=-n}^{n}k|a_k|^2(R^{2k}-r^{2k}).$$

其中应用了$f'(z)=\sum\limits_{k=-n}^{n}ka_nz^{k-1}$，$|f'(z)|^2=f'(z)\overline{f'(z)}$等。

三、习题解答

习　题（2·1）

1．　【证明】

如果把$f(z)$视为x,y的函数$f(x,y)$，则由变换，f可以看成是z与$\bar{z}$的函数$f(z,\bar{z})$，因之依求导公式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{aligned}\qquad\text{(A)}$$

因为，$f(z)$ 是z的函数，$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$只是一个记号．故称（A）式为形式导数．

由§2·1—3 的(D)式，因 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$，故当 $w=f(z)$ 在 $G\subset S_z$ 内解析时，$C.—R.$ 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\equiv 0.$$

2．【解】

设 $z=x+iy$，则：

$$f(z)=z^2=x^2-y^2+i2xy,\quad\therefore\ u=x^2-y^2,\ v=2xy.$$

于是，$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$，$z\in S_z$

显然，偏导数在S_z上连续。

这样说来，u、v在$z\in S_z$上有连续偏导数且满足 $C.—R.$方程，依§2·1定理2，z^2为解析函数．

剩下的$\bar{z}$，$e^{\bar{z}}$，$\cos\bar{z}$在S_z上处处不解析．例如：

$$e^{\bar{z}}=e^{x-iy}=e^x(\cos y-\sin y),$$

$$u=e^x\cos y,\quad v=-e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\cos y.$$

要想使 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，只能当 $y=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$时，($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)才可以这样，函数$e^{\bar{z}}$在S_z上到处都不解析．

同理可证$\bar{z}$，与$\cos\bar{z}$在S_z上不解析．

3．【证明】

由题1的（A），

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+i\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(-i)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}.$$

4. 【解】

① $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{-2y^3+6x^2y}{(x^2+y^2)^3}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}$.

$\therefore\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. （$u$ 为调和函数）

设u的共轭调和函数为v，于是

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad(2)$$

由（2）得 $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\phi(x)$ （3）

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\phi'(x)$$

与（1）比较，$\therefore\ \phi'(x)=0$，$\phi(x)=c$（常数）. 所求的函数为

$$f(z)=\frac{y}{x^2+y^2}+i\left(\frac{x}{x^2+y^2}+c\right).$$

但因 $f(1)=0$，即 $f(1)=\dfrac{0}{1+0}+i\left(\dfrac{1}{1+0}+c\right)=0$，$\therefore\ c=-1$.

所求函数为：

$$f(z)=\frac{y}{x^2+y^2}+i\left(\frac{x}{x^2+y^2}-1\right).$$

②同上法。

5. 【解】

①令 $z=x+iy$，则

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{[1-(x^2+y^2)]+2iy}{(1-x)^2+y^2}.$$

$$u=\frac{1-(x^2+y^2)}{(1-x)^2+y^2},\quad v=\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}.$$

在S_z上除点(1, 0)外，有导数：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{[(1-x)^2+y^2](-2x)-[1-(x^2+y^2)]2(1-x)(-1)}{[(1-x)^2+y^2]^2}$$

$$=\frac{2(1-2x+x^2)-2y^2}{[(1-x)^2+y^2]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2[(1-x)^2+y^2]-4y^2}{[(1-x^2)^2-y^2]^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{4y(1-x)}{[(1-x)^2+y^2]^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4y(1-x)}{[(1-x)^2+y^2]^2},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

② $$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z}=\frac{|z|^2\cdot z+\bar{z}}{2|z|^2}$$

$$=\frac{x(x^2+y^2+1)+iy(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}.$$

$$u=\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)},\quad v=\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}.$$

除原点外，在S_z上可微分：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

6. 【证明】

设 $f(z)=u+iv$，在点z_0解析，则在z_0的邻域$B(z: |z-z_0|<\rho)$内有

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \qquad (1)$$

故有 $$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial x}=-\frac{\partial v(x,-y)}{\partial(-y)},\quad \frac{\partial u(x,-y)}{\partial(-y)}=\frac{\partial v(x,-y)}{\partial x} \qquad (2)$$

这是因为函数：

$$\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y),\quad z\in B(z_0,\rho).$$

依C·—R·条件，应有

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial x}=\frac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial(-y)},$$

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial(-y)}=-\frac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial x}.$$

此即（2）式。由于 $u(x,-y)$，$-v(x,-y)$ 存在连续的偏导数，且合于 C·—R·条件，依定理2，$\overline{f(\bar{z})}$为解析函数。$f(z)$ 在上半平面解析，$\overline{f(\bar{z})}$便在下半平面解析。

反之，设 $\overline{f(\bar{z})}$为解析，则 $f(z)$ 也解析。

7. 【证明】

在S_z平面上，$f(z)$是连续的，这是显然的。由于差商：

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(x+\Delta x)(z^2+2z\Delta z+(\Delta z)^2]-xz^2}{\Delta z}$$

$$=\frac{2(xz+z\Delta x)\Delta z+(x+\Delta x)\Delta z^2+\Delta x\cdot z^2}{\Delta z}$$

$$=(x+\Delta x)(2z+\Delta z)+z^2\frac{\Delta x}{\Delta z}$$

∴ 当$z=0$时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta x\cdot\Delta z=0$。

即导数$f'(0)$存在。

但当$z\neq 0$时，沿着$\Delta y=0$，$\Delta x\to 0$时，上述极限为$2xz+z^2$；沿着$\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$时，其极限为$2xz$。即$z\neq 0$时，极限不存在。函数只在$z=0$点可导，但在z_0的邻域内不解析，故结论成立。

习 题 (2·2)

1. 【证明】

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\quad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),$$

① $\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$$=\frac{1}{2}(e^{iz_1}+e^{-iz_1})\cdot\frac{1}{2}(e^{iz_2}+e^{-iz_2})$$

$$-\frac{1}{2i}(e^{iz_1}-e^{-iz_1})\cdot\frac{1}{2i}(e^{iz_2}-e^{-iz_2})$$

$$=\frac{1}{4}[e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}]$$

$$+\frac{1}{4}[e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)})=\cos(z_1+z_2)。$$

②略。

③由于 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$, $e^{-iz}=\cos z-i\sin z$。

∴ $\cos^2 z+\sin^2 z=1$。

④ $\frac{d}{dz}\cos z=\frac{d}{dz}\ \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}(ie^{iz}-ie^{-iz})=-\sin z$。

⑤由于 $\cosh z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \sinh z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$，于是，

$$\begin{aligned}\cosh(z_1+z_2)&=\frac{1}{2}(e^{z_1+z_2}+e^{-z_1-z_2})=\frac{1}{2}(e^{z_1}e^{z_2}+e^{-z_1}e^{-z_2})\\&=\frac{1}{4}(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})\\&\quad+\frac{1}{4}(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}-e^{-z_2})\\&=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2.\end{aligned}$$

其余的等式可以同理证明。

2. 【解】

①设 $\arg z=\theta$，当 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{Re}z=x\to\infty$，$|e^{z}|=e^{x}\to\infty$。

$\therefore\quad e^{z}\to\infty$。

当 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\mathrm{Re}z=x\to-\infty$，$|e^{z}|=e^{x}$，$e^{z}\to0$。

当 $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{Re}e^{z}=\cos y$ 在 -1 与 1 之间振动，e^{z} 的极限不存在。

② z 沿双曲线时，如以正负实轴为渐近线，极限值为∞与0，故极限不存在。

③ 沿抛物线 $y=x^2$，在第一象限和第二象限的一枝，极限值为∞或0。所以极限不存在。

3. 【证明】

$$P(z)=U(z)+iV(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),\ a_0\neq0.$$

并设x是方程 $U(x)=0$ 或 $V(x)=0$的根，则

$$U(x)+iV(x)=U(x)-iV(x)\text{或}U(x)+iV(x)=-[U(x)-iV(x)],$$

即 $$a_0(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)=\pm\overline{a_0(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)}=\pm\bar a_0(x-\bar z_1)(x-\bar z_2)\cdots(x-\bar z_n),$$

要这个等式成立，x 必须是实数。

事实上，假设x位于上半平面，则

$$|x-z_\nu|<|x-\bar{z}_\nu|,$$

对于所有的ν，

$$\left|a_0\prod_{\nu=1}^{n}(x-z_\nu)\right|<\left|a_0\prod_{\nu=1}^{n}(x-\bar{z}_\nu)\right|.$$

同样，可知x不能位于下半平面。

这就是说x只能是实数。

4. 【解】

① $\log(-i)=\log|-i|+i\arg(-i)=\frac{3}{2}\pi i\left(\text{或}-\frac{\pi}{2}i\right)$.

$$\mathrm{Log}(-i)=\log(-i)+2k\pi i$$

$$=\log|-i|+i\arg(-i)+2k\pi i=i\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right),$$

(k为整数)

② $e^{1-\frac{\pi}{2}i}=ee^{-\frac{\pi}{2}i}=e\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$=-ei.$$

$$e^{k\pi i}=\cos k\pi+i\sin k\pi=\begin{cases}1, & \text{当 } k \text{ 为偶数时,}\\ -1, & \text{当 } k \text{ 为奇数时,}\end{cases}$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

③ $\sqrt[3]{-8}=2\sqrt[3]{-1}=2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}},\quad k=0,1,2.$

于是，$w_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}i.$

$$w_1=2e^{i\pi}=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2.$$

$$w_2=2e^{i\frac{5}{3}\pi}=2e^{i\left(\pi+\frac{2}{3}\pi\right)}=2\left[\cos\left(\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

$$=2\left[-\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2}{3}\pi\right]=1-\sqrt{3}i.$$

令 $w=\sqrt{3+4i}$，则 $w^2=3+4i$，$w=u+iv$.

$$\therefore \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 3 \\ uv = 2 \end{cases}$$

解之，$u = \pm 2, v = \pm 1$，$\therefore$ $w = \pm(2+i)$，即$\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$。

$$\begin{aligned}(3-4i)^{1+i} &= e^{(1+i)\mathrm{Log}(3-4i)} \\ &= e^{(1+i)(\log|3-4i| + i\arg(3-4i) + 2k\pi i)} \\ &= 5e^{\mathrm{arctg}\frac{4}{3} - 2k\pi} e^{i(\log 5 - \mathrm{arctg}\frac{4}{3} - 2k\pi)} \\ &= 5e^{\mathrm{arctg}\frac{4}{3} - 2k\pi}\left[\cos\left(\log 5 - \mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)\right. \\ &\quad \left. + i\sin\left(\log 5 - \mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)\right].\end{aligned}$$

5.　【证明】

①设 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$，则

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2) = 2(u_x{}^2 + v_x{}^2 + u\cdot u_{xx} + v\cdot v_{xx}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2) = 2(u_y{}^2 + v_y{}^2 + u\cdot u_{yy} + v\cdot v_{yy}) \qquad (A)$$

但 $f(x+iy)$对于$x+iy\in G$解析，$f'(x+iy)$存在，并且由§2·1—3.（1），

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$|f'(x+iy)|^2 = u_x{}^2 + v_x{}^2 = u_y{}^2 + v_y{}^2.$$

由Laplace方程：　$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$。

把(A)中两式相加，便得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(x+iy)|^2 = 4|f'(x+iy)|^2.$$

②同法可证。但注意其中要应用等式：

$$\begin{aligned}(uu_x + vv_x)^2 + (uu_y + vv_y)^2 &= (u^2+v^2)(u_x{}^2 + v_x{}^2) \\ &= |f(x+iy)|^2|f'(x+iy)|^2.\end{aligned}$$

6.　【证明】

令 $A=\sum_{k=0}^{n}\cos(x+ky)$，$B=\sum_{k=0}^{n}\sin(x+ky)$，则

$$A+iB=\sum_{k=0}^{n}[\cos(x+ky)+i\sin(x+ky)]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}e^{i(x+ky)}=e^{ix}\sum_{k=0}^{n}e^{iky}$$

$$=e^{ix}\frac{1-e^{i(n+1)y}}{1-e^{iy}}=e^{ix}\frac{e^{i\frac{n}{2}y}\cdot\sin\frac{n+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}$$

$$=\left[\cos\left(x+\frac{n}{2}y\right)+i\sin\left(x+\frac{n}{2}y\right)\right]\sin\frac{n+1}{2}y\Big/\sin\frac{y}{2}.$$

分离并使两边的对应项相等，便得证。

7. 【证明】

$z=x+iy$，$w=u+iv$，于是

$$u+iv=\frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right).$$

$$u=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x,\ v=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\sin x.$$

当 $\mathrm{Re}z=x=$常数时，对应地是双曲线

$$\frac{u^2}{\cos^2x}-\frac{v^2}{\sin^2x}=1.$$

当 $\mathrm{Im}z=y=$常数时，对应地是椭圆

$$\frac{u^2}{\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\right)^2}=1.$$

这些曲线以 $w=-1$，$w=1$ 为公共的焦点，两组曲线互相正交。

8. 【解】

①依定义，

$$w=z^{i}=e^{i(\log|z|+i\arg z+2k\pi i)}=e^{i\log|z|}\cdot e^{-(\arg z+2k\pi)}.$$

其中 $z\neq0$，$z\neq\infty$。显然，当 $|z|=1$时，$\log|z|=0$，

$$z^{i}=e^{-(\arg z+2k\pi)},\ k\text{是整数}.$$

它是无穷多值，但都是实数。

当z一定时，$\arg(z^{i})=\log|z|$。即 $\arg w=\log|z|$ 是定值，是 Sw 平面的射线。z^{i} 的无穷多个值都分布在这个射线上。当$k>0$时，诸值的模作成等比级数，公比为 $e^{-2\pi}$，级数收敛于 $w=0$；当 $k<0$ 时，公比为 $e^{2\pi}$，级数收敛于$w=\infty$。

② $w=z^{\frac{3}{4}}=e^{\frac{3}{4}(\log|z|+i(\arg z+2k\pi))}=e^{\frac{3}{4}\log|z|}\cdot e^{i\frac{3}{4}(\arg z+2k\pi)}$

$$=\sqrt[4]{|z|^{3}}\,e^{i\frac{3}{4}(\arg z+2k\pi)}.$$

对于z一定，当$k=0,1,2,3$ 时，它有四个不同的值。这四个值就是以原点为中心，$+\sqrt[4]{|z|^{3}}$为半径的圆周的内接正四边形的顶点。

③ $w=z^{\pi}$（π 是无理数）

$$=e^{\pi(\log|z|+i(\arg z+2k\pi))}=|z|^{\pi}e^{i(\arg z+2k\pi)\pi}$$

它有无穷多个值，但是可数的。对于一定的 z，这无穷多个值稠密地分布在圆周 $|w|=|z|^{\pi}$上。

9. 【证明】

为证等式，实际是证：

$$\operatorname{arctg}z=\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

显然，设 $z=\operatorname{tg}w$，则

$$z=\frac{\sin w}{\cos w}=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{i(e^{iw}+e^{-iw})}=\frac{e^{2iw}-1}{i(e^{2iw}+1)}.$$

$$(iz-1)e^{2iw}=-iz-1,\quad e^{2iw}=\frac{1+iz}{1-iz}.$$

$$\therefore \quad w=\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

即
$$\operatorname{arctg} z=\frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$z=\operatorname{tg}\left[\frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

第三章　复变函数的积分

积分——复变函数的积分，是研究解析函数本身性质的重要工具之一．解析函数的许多重要性质的证明都要用到它．例如，解析函数任意阶导数的存在这个重要性质，就是用积分来证得的．

本章所给出的Cauchy基本定理与Cauchy基本公式特别重要，它们都是复变函数理论的重要基础．本章所论述的主要定理，都是根据这两个定理证得的．以后各章中的主要定理，也都直接地或间接地以它们为基础．因此读者必须切实地掌握好这两个基本定理．

§3·1　复变函数积分的概念

1．复变函数积分的定义

设C为 S_z 平面上的一条以α为起点，以β为终点的光滑（或逐段光滑）曲线，函数$f(z)$在C上连续．如果以分点为：$\alpha=z_0, z_1, z_2, \cdots z_{n-1}, z_n=\beta$，将曲线$C$任意分成$n$个弧段，并在每个小弧段$\widehat{z_{k-1}z_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$上任取一点ζ_k（如图3·1），作出下面的和式：

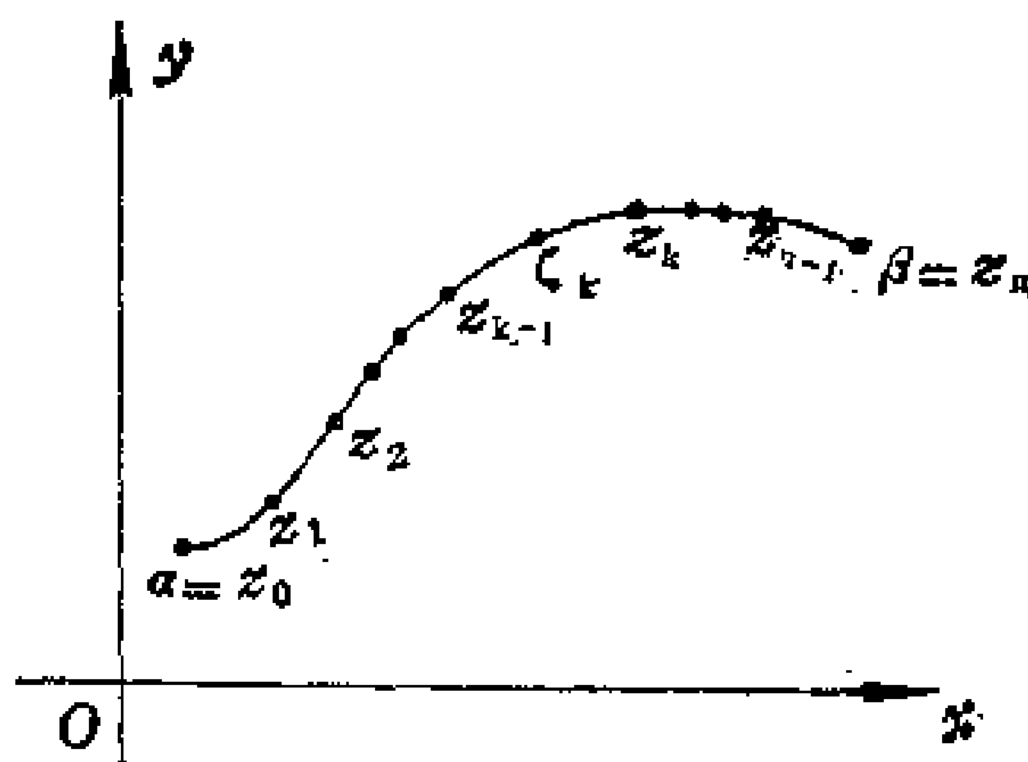


图3·1

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$$

其中：$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$。

如果将上述最大的小弧段的长度记为 δ，当 n无限增加且 δ趋于零时，不论对C的分法及点 ζ_k 的取法如何，Sn都有唯一的极限存在。我们把这个极限值，称为函数 $f(z)$ 沿曲线C从 α 到 β 的积分，并记为：

$$\int_C f(z)dz.$$

即：

$$\int_C f(z)dz=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad (1)$$

其中 $f(z)$ 称为被积分函数，C 称为**积分曲线**或**积分路**。

显然（1）是表示函数 $f(z)$沿C从点α到点 β的积分。积分

$$\int_{C^-} f(z)dz$$

表示 $f(z)$ 沿C从点 β到点 α的积分。

如果C为一条简单闭曲线，则积分：

$$\int_C f(z)dz$$

表示 $f(z)$ 沿闭路C的正向（逆时针方向）的积分。而积分：

$$\int_{C^-} f(z)dz$$

表示 $f(z)$ 沿闭路C的负向（顺时针方向）的积分。

有的书上，将函数 $f(z)$沿曲线C从点 α到点 β 的积分记作：$\int_{C(\alpha,\beta)} f(z)dz$；沿闭路$C$的积分记作：$\oint_C f(z)dz$，等等。

从上述积分的定义，我们容易看出，在特殊情形下，当 C 是 x 轴上的区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，而 $f(z)=u(x)$ 时，这个积分定义就是一

元实函数积分的定义。

此外，当C是S_z平面上的一条光滑（或逐段光滑）曲线时，复变函数积分的定义又与二元实函数的积分，有极密切的联系。即：

设C用参数方程表示为：

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta.$$

于是
$$\begin{aligned} \Delta z_k &= z_k - z_{k-1} = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) \\ &= (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k. \\ &\qquad k = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

设 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$，则

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$$

这时（1）式右端的和式可表示为：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k &= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \\ &\quad + i\sum_{k=1}^{n} [v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \qquad (2) \end{aligned}$$

这个等式的右端恰好是二元实函数曲线积分的和式。

由于曲线积分存在的条件是：曲线C是可求长的；函数$u(x, y)$与$v(x,y)$在C上连续。因此容易看出我们在复变函数积分定义中所给的条件，已经完全满足了曲线积分存在的条件。于是对（2）式两边取极限，则得（1）式为：

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\,dz &= \int_C u(x, y)\,dx - v(x,y)\,dy \\ &\quad + i\int_C v(x, y)\,dx + u(x,y)\,dy \qquad (3) \end{aligned}$$

这个等式说明了：在复变函数积分的定义中所给的条件下，积分是存在的。

本书以后所给出的积分路C，如果不加另外的说明，都是光滑（或逐段光滑）曲线，所谓闭路，指的都是光滑或逐段光滑的简单闭曲线。

2. 复变函数积分的基本性质

从积分的定义，我们容易推得下列简单性质：

1）$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$。

2）$\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$ （k为常数）。

3）$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz.$$

其中曲线C是由曲线 C_1，C_2，…，C_n 顺次连接而成。

4）$\int_C [f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)]dz$

$$= \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz + \cdots + \int_C f_n(z)dz.$$

或 $$\int_C \sum_{k=1}^{n} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_C f_k(z)dz.$$

5）积分的估模．有下面不等式成立：

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant \int_C |f(z)||dz| \leqslant \int_C |f(z)|dS$$

其中dS表示弧长的微分．

这个不等式可由下面的不等式取极限而得到．即：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta S_k.$$

如果在曲线C上，$|f(z)|\leqslant M$；C 的长度为L（M 及 L都是有限正数），则由不等式：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k|\leqslant M\cdot L,$$

取极限可得：

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\leqslant M\cdot L\text{。}$$

这个不等式称为 **$M\cdot L$ 不等式**．以后我们要经常用到它．

3．复变函数积分的计算

显然积分的定义本身，给出了一种计算方法．另外由（3）式

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C u\,dx-v\,dy+i\int_C v\,dx+u\,dy,$$

也明显地表明复变函数积分的计算，可以归结为对二元实函数的曲线积分的计算。

现将曲线C用参数方程表示为：

$$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t) \end{cases},\qquad t_\alpha\leqslant t\leqslant t_\beta\text{。}$$

其复数形式为：

C：$z=x(t)+iy(t)=F(t)$，$t_\alpha\leqslant t\leqslant t_\beta$。

于是，$dz=dx+idy=[x'(t)+iy'(t)]dt=F'(t)dt$。

$$f(z)=u[x(t),\ y(t)]+iv[x(t),\ y(t)]=f[F(t)]\text{。}$$

从而，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\{u[x(t),\ y(t)]+iv[x(t),\ y(t)]\}\cdot$$

$$\cdot[x'(x)+iy'(t)]\,dt=\int_{t_\alpha}^{\beta}f[F(t)]F'(t)\,dt\text{。}\qquad(4)$$

即复变函数积分的计算可以归结为实变函数定积分的计算．

如何应用（4）式计算积分？请看下面几个例题：

【例 1】试计算积分

$$\int_C \mathrm{Re}z\,dz.$$

其中设积分路 C 为：（1）从原点到点 $1+2i$ 的直线段；（2）从原点到点 1，再从点 1 到点 $1+2i$ 的折线段（如图3·2）.

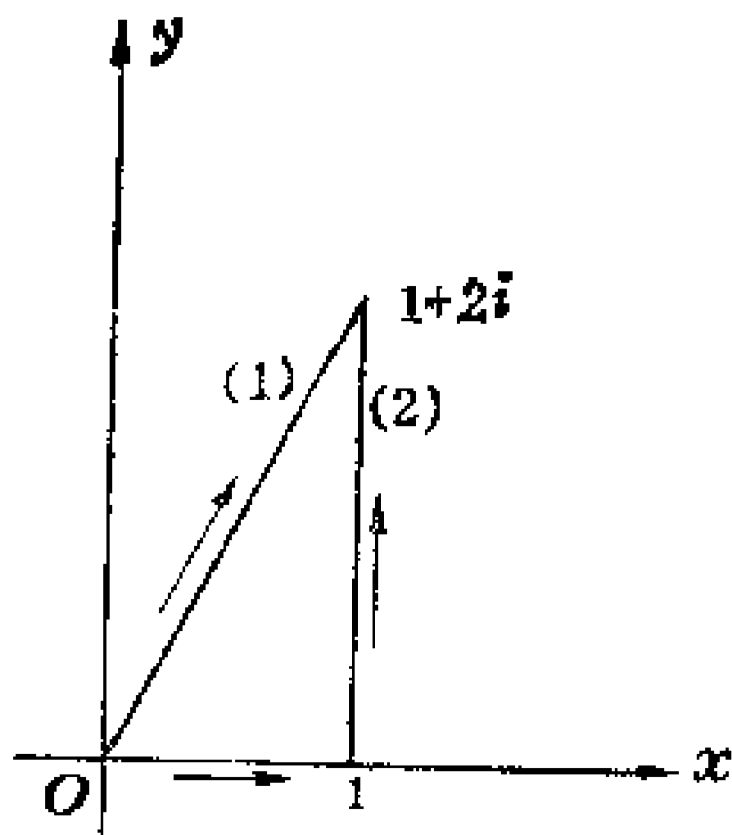


图3·2

【解】（1）从原点到点 $1+2i$ 的直线段的参数方程式为：

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t, \quad 0\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

它的复数形式为：

$$z=(1+2i)t,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则 $$dz=(1+2i)dt,$$

$$\mathrm{Re}z=t.$$

于是得

$$\int_C \mathrm{Re}z\,dz=\int_0^1 t(1+2i)\,dt$$

$$=(1+2i)\int_0^1 t\,dt=(1+2i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(1+2i)=\frac{1}{2}+i.$$

（2）应用积分性质 3），将折线段（2）分成两个直线段，然后进行积分计算.

从原点到点 1 的直线段的方程式为：

$$z=t,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则 $$dz=dt,$$

$$\mathrm{Re}z=t.$$

从点 1 到点 $1+2i$ 的直线段的方程式为：

$$z=1+it,\quad 0\leqslant t\leqslant 2.$$

则 $$dz=idt,$$

$$\text{Re}z=1.$$

于是得：

$$\int_C \text{Re}z dz=\int_0^1 tdt+\int_0^2 1\cdot idt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+it\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{2}+2i.$$

注意：这个积分的两条积分路，尽管其起点与终点相同，但因所沿的曲线不同，所得的积分值也不同。请与下例比较。

【例 2】 试计算积分

$$\int_C z^2dz$$

其中设积分路 C 为：（1）由原点 O 到点 $A(2,1)$ 的直线段；（2）由原点 O 到点 $B(2,0)$ 再到点 $A(2,1)$ 的折线段。（如图3·3）

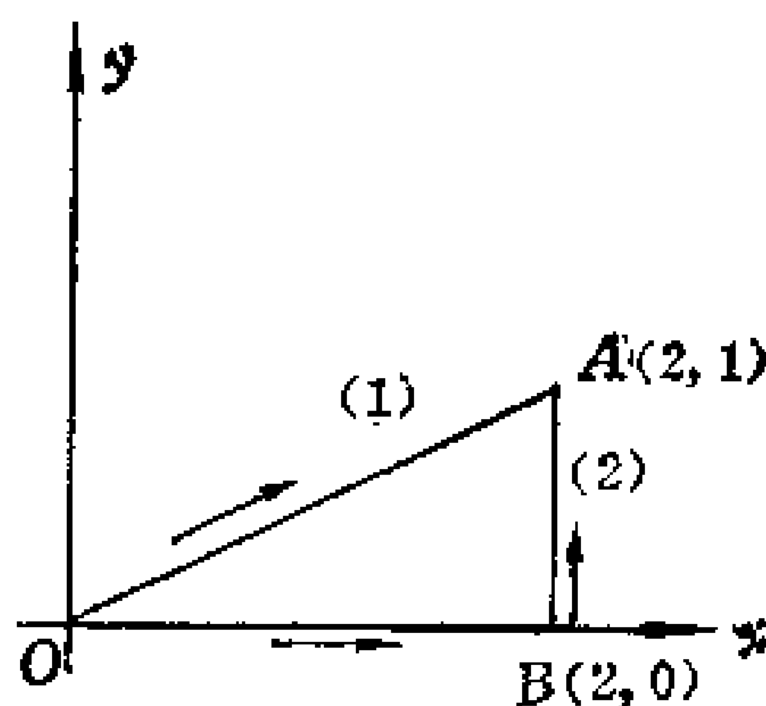


图3·3

【解】（1）OA 直线段方程为：

$$z=(2+i)t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则 $$dz=(2+i)dt,$$

$$z^2=(2+i)^2t^2.$$

于是得：

$$\int_C z^2dz=\int_0^1 (2+i)^2t^2\cdot(2+i)dt=\int_0^1(2+i)^3t^2dt$$

$$=(2+i)^3\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(2+i)^3=\frac{1}{3}(2+11i).$$

（2）OB 直线段方程为：

$$z=t,\qquad 0\leqslant t\leqslant 2.$$

则

$$dz=dt,$$

$$z^2=t^2.$$

BA 直线段方程为：

$$z=2+it,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则

$$dz=idt,$$

$$z^2=(2+it)^2=4-t^2+4it.$$

于是依性质3），得

$$\int_C z^2dz=\int_{OB}+\int_{BA}=\int_0^2 t^2dt+\int_0^1(4-t^2+4it)idt$$

$$=\frac{t^3}{3}\Big|_0^2+\int_0^1(4i-it^2-4t)dt$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{11}{3}i-2=\frac{1}{3}(2+11i).$$

注意：这个积分的两条积分路，尽管所沿的曲线不同，但因其起点与终点相同，所以积分值也相同（与例1比较）。

【例3】 试证明：

$$\int_C\frac{1}{z-a}dz=2\pi i.$$

其中$C=\{z:\ |z-a|=\rho\}$（即以点 a 为中心，以 $\rho>0$ 为半径的圆周）。

【证明】 设 $z-a=\rho e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$（此即为圆周$C$的方程式），则

$$dz=i\rho e^{i\theta}d\theta,$$

于是得，

$$\int_C\frac{1}{z-a}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho e^{i\theta}}\ i\rho e^{i\theta}d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i.$$

以上三个例题都是应用积分的基本性质和公式（4）进行计算的。下面用定义的方法计算两个积分。

【例 4】设简单曲线C的起点为z_0，终点为Z，则积分

（1）$\int_C dz = Z - z_0$.

（2）$\int_C z dz = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2)$.

【解】（1）里的积分的被积函数$f(z)=1$，根据积分定义，则（1）式变为：

$$\int_C dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot \Delta z_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty}(Z - z_0) = Z - z_0.$$

（2）里的积分的被积函数$f(z)=z$，根据积分定义，对C的任意一种分法，作下面两个和式：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}),$$

及
$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}).$$

由于积分是存在的，故有：

$$\int_C z dz = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(S_n + S'_n)$$

$$= \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2).$$

此题当C为简单闭曲线时，它们分别是：

$$\int_C dz = 0;$$

$$\int_C z dz = 0.$$

习　　题 (3·1)

1. 试计算积分

$$\int_C \mathrm{Im} z dz.$$

其中积分路 C 为：

1） 自原点到点 $2+i$ 的直线段，

2） 半圆周：$|z|=1$，$0\leqslant \arg z\leqslant \pi$，且起点为 1，

3） 圆周：$|z-a|=R$ $(R>0)$。

2. 试计算积分

$$\int_C |z| dz.$$

其中积分路 C 为：

1） 自原点到点 $2-i$ 的直线段，

2） 线段 $[-1, 1]$，

3） 半圆周：$|z|=1$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{2}$，且起点为 $-i$，

4） 圆周：$|z|=R$ $(R>0)$。

3. 试计算积分

$$\int_C |z-1|\,|dz|.$$

其中积分路 C 为圆周：$|z|=1$，起点为 1。

4. 试计算积分

$$\int_C \bar{z} dz.$$

其中积分路C为：

（1）自原点$O(0,0)$到点$B(1,1)$的直线段，

（2）自点$O(0,0)$到点$A(1,0)$直线段，再从点A到点$B(1,1)$的直线段。

5．试计算积分

$$\int_C z dz.$$

其中积分路C同上题。

6．证明：

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n=1, \\ 0 & n \text{ 为整数，} n \neq 1. \end{cases}$$

其中C为圆周：$|z-a|=\rho$ $(\rho>0)$。

§3·2 Cauchy 积分定理及其推广

1．Cauchy 积分定理及其证明

读者在数学分析里，已经学过了二元函数的曲线积分．在曲线积分中，我们研究了积分与路无关的问题．对于复变函数的积分来说，也存在着积分与路无关的问题．一般地说，一个函数$f(z)$沿曲线C的积分值与被积函数$f(z)$有关，与积分路C的起点和终点有关，也与C路有关．上一节的例1的积分与例3的积分，都是与路有关的例子．而我们所说的积分与路无关问题，指的是：积分的值只与函数$f(z)$有关，与曲线C的起点、终点有关，而与积分路无关．上一节的例2的积分，就是与路无关的．在数学分析中，我们已经证明了二元实函数积分与路无关和函数沿任意一条闭路积分为零之间是等价关系．那么复变函数究竟在什么条件下，积分与路无关呢？或者说，在什么条件下，复变函数沿任意一条闭路积分为零呢？法国数学家 Cauchy（哥西）在1825年解决了这个问题，并

给出了这个定理．这个问题的解决，对于复变函数论的研究和发展，起着非常重要的作用．它是复变函数理论的基础．有人将它比喻作研究复变函数论的钥匙，事实也是这样．所以我们把这个定理称为**积分基本定理**．或称 **Cauchy 定理**．下面给出这个定理和证明．

定理1　设函数 $f(z)$在单连通区域G内是解析的，则 $f(z)$沿G内任何一条闭路C的积分都为零．即

$$\int_C f(z)\,dz=0,\quad C\subset G\subset S_z.$$

【证明】 对于这个定理的证明我们给出两个方法．其一是 Riemann（黎曼）在补充了一个条件后，应用熟知的 Green（格林）公式，所给出的证明．其二是 Goursat（古莎）给出的证明．后一个证明方法不用再加条件，但很麻烦．所以也写在这里供读者参考．

证明一，在定理1里，补充假定：$f'(z)$在G内连续．（读者很快就会看到，这个条件是解析函数本身所固有的性质）．

由积分定义，而有等式§3·1—1（3）成立．即

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C u\,dx-v\,dy+i\int_C v\,dx+u\,dy.$$

对于上式右端的两个线积分

$$\int_C u\,dx-v\,dy \quad 与 \quad \int_C v\,dx+u\,dy$$

在补充条件下，可知

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

在G内都连续．这样就使得上面两个曲线积分都满足了Green公式的条件．即：

$$\int_C u\,dx-v\,dy=\iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

$$\int_C v dx + u dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

其中 $D = \mathrm{int}(C)$。

再由 $f(z)$ 的解析性，有 $C.\sim R.$ 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

上两式右端得 0 .

$$\therefore \quad \int_C u dx - v dy = 0, \quad \int_C v dx + u dy = 0.$$

从而

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

定理得证。　　　　　　　　　　　　　　　　(证毕)

在上述证明中，显然，没有 $f'(z)$ 在 G 内连续这一补充假定的条件，便不能应用 Green公式. 而且为了应用 Green 公式，需要把 $f(z)$ 写成 $u(x,y) + iv(x,y)$。

* 证明二，其证明如下：

首先，设积分路 $C \subset G$ 为一个三角形△，其周界长设为 L 的情形. 于是，设 $f(z)$ 沿△的积分的模数为M，即：

$$\left| \int_{\triangle} f(z) dz \right| = M \tag{1}$$

我们要证明，$\int_{\triangle} = 0$，就是来证明 $M = 0$。

现把△的每边都二等分，并两两连接这些分点，于是△就被分成了四个全等的三角形，设为 $\triangle_k$，$k = 1, 2, 3, 4$；每个三角形的周界长为 $\frac{L}{2}$（图3·4）. 显然 $f(z)$ 沿三角形△的积分等于沿 $\triangle_k$($k = 1, 2, 3, 4$) 的积分和，即：

$$\int_{\triangle} f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{4}\int_{\triangle k} f(z)\,dz \quad (2)$$

其中沿每一条连接分点的线段的积分，恰好按相反的方向各取一次，因而互相抵消.

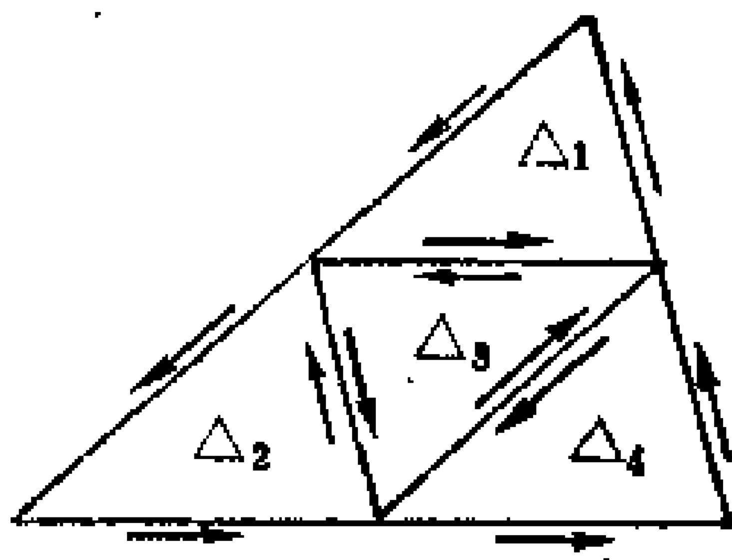


图3·4

既然设 $|\int_{\triangle}|=M$ （(1)式），由（2）式可知：对于三角形$\triangle_k$，至少有一个三角形使得沿它的积分的模$\geqslant\frac{M}{4}$. 我们假定这个三角形是 $\triangle_1$，即有

$$\left|\int_{\triangle 1} f(z)\,dz\right|\geqslant\frac{M}{4},\ \text{其周界长}=\frac{L}{2}.$$

对于 $\triangle_1$，我们重复前面的作法，将它又分成四个全等三角形. 其中至少还有一个三角形设为$\triangle_2^{(2)}$，满足

$$\left|\int_{\triangle_2^{(2)}} f(z)\,dz\right|\geqslant\frac{M}{4^2},\ \text{其周界长}=\frac{L}{2^2}.$$

现在把这种分法无限制地继续下去. 我们将得到一个三角形序列，$\{\triangle_n^{(n)}\}$，$n=0,1,2,\cdots$ 如下：

$$\triangle=\triangle_0^{(0)},\ \triangle_1=\triangle_1^{(1)},\ \triangle_2^{(2)},\ \triangle_3^{(3)},\cdots\triangle_n^{(n)},\cdots$$

其中 ①$\triangle_0^{(0)}\supset\triangle_1^{(1)}\supset\triangle_2^{(2)}\supset\cdots\supset\triangle_n^{(n)}\supset\cdots$.（其中下角表示第$n$次分法，上角表示所取的三角形）.

②它们相应的周界长依次为

$$\frac{L}{2^0},\ \frac{L}{2^1},\ \frac{L}{2^2},\ \cdots,\ \frac{L}{2^n},\ \cdots$$

③ $\left|\int_{\triangle_n^{(n)}} f(z)\,dz\right|\geqslant\frac{M}{4^n}$，$n=0,1,2,\cdots$ (2'). 依"闭集套定理"（第一章 § 1·4—1），当 $n\to\infty$时，$d(\triangle_n^{(n)})\to 0$，必有唯一的一点 $P_0\in\{\triangle_n^{(n)}\}$，且 $P_0\in G$. 这里的闭集套就是三角形套. 集合的

直径→0，就是$\frac{L}{2^n}\to 0$，当 $n\to\infty$ 时，这里的 P_0 不妨设为 z_0，且$z_0\in\triangle\cup\text{int}\triangle$，$\therefore$ $z_0\in G$。

因为 $f(z)$在G内解析，故在点z_0处，$f(z)$具有有限导数$f'(z_0)$。这样，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$ 存在，使当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，总有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$$

存在。亦即

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|<\varepsilon|z-z_0|. \tag{3}$$

当 n 充分大时，$\triangle_n^{(n)}$ 被包含在圆域 $B=\{z\colon |z-z_0|<\delta\}$ 内，因此当 $z\in\triangle_n^{(n)}$ 时，必满足（3）式，而且还有：

$$|z-z_0|<\frac{L}{2^n},$$

从而，

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|<\frac{L}{2^n}\varepsilon.$$

但是由于

$$\int_{\triangle_n^{(n)}}dz=0,\ \int_{\triangle_n^{(n)}}zdz=0 \qquad (\S3\cdot1\text{例 }4)$$

我们得，

$$\int_{\triangle_n^{(n)}}f(z)dz=\int_{\triangle_n^{(n)}}[f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)]dz.$$

于是，

$$\left|\int_{\triangle_n^{(n)}}f(z)dz\right|=\left|\int_{\triangle_n^{(n)}}[f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)]dz\right|$$

$$<\frac{L}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n}\cdot\varepsilon=\varepsilon\cdot\frac{L^2}{4^n}. \tag{4}$$

比较（2'）与（4）可有：

$$\frac{M}{4^n} < \varepsilon \cdot \frac{L^2}{4^n},$$

即 $\quad M < \varepsilon L^2$，而模 $M = \left| \int_{\triangle} \right| \geqslant 0$，

由于 ε 可以任意小，可见 $M = 0$。

其次，讨论当 C 为一多角形周界 P 时的情形。我们用对角线把以 P 为周界的多角形（从一顶点出发），分成三角形（如图3·5，凸五角形从顶点 A 出发分成三个三角形）

于是，

$$\int_P f(z)\,dz = \int_{ABCA} + \int_{ACDA} + \int_{ADEA},$$

应用前面的结果可得：

$$\int_P f(z)\,dz = 0.$$

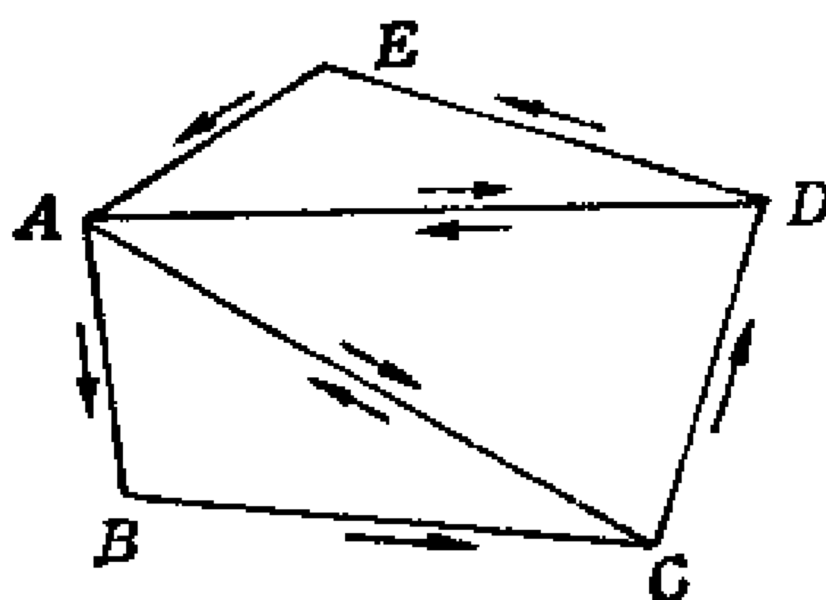


图3·5

以上分别讨论了当 $C \subset G$，C 是三角形，是多角形周界的情形。

最后讨论当 C 为 G 内任意的简单闭曲线时的情形。我们首先证明如下的预理。

预理 1 设函数 $f(z)$ 在区域 $G \subset S_z$ 内连续，$C \subset G$ 是任意一条逐段光滑曲线，则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，在 G 内必有一条端点与 C 相同并内接于 C 的折线 P（如图3·6），$P \subset G$，使

$$\left| \int_C f(z)\,dz - \int_P f(z)\,dz \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

【证明】 取有界闭区域 $\bar{D} \subset G$，并使 $C \subset D$（C 的每一点都是 D 的内点）。依 C，$\bar{D}$ 间的距离，必有正数 d 存在，以 $z \in C$ 为中心作圆域 $B(z,\ d) \subset \bar{D}$，$d < d(C, \bar{D})$。

依连续函数的性质（第一章），函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上连续（因 $f(z)$

在G内解析），必一致连续．亦即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，有 $\delta_1>0$存在，使当 z' 与 $z''\in\bar{D}$，且 $|z'-z''|<\delta_1$ 时，有下列不等式成立：

$$|f(z')-f(z'')|<\frac{\varepsilon}{2L},$$

其中L是曲线C的长度．

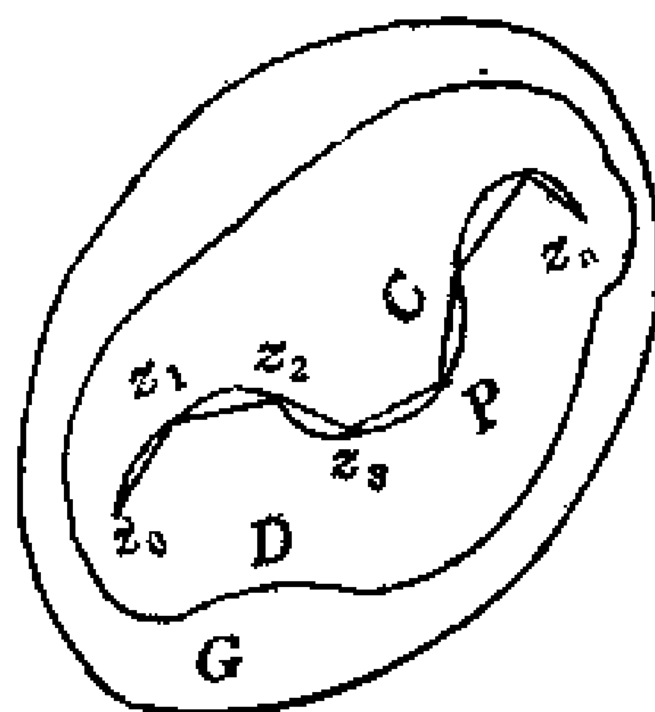


图3·6

现选取 $\delta<\min(\delta_1, d)$，即 δ 小于 δ_1，d 中的最小者．我们就以这样的 δ，在曲线 $C: z=F(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，上取分点

$$z_0=F(\alpha),\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n=F(\beta)$$

使C上的诸对应孤中最长的孤$<\delta$．从而有弦

$$|z_{k+1}-z_k|<\delta,\ k=0,1,2,\cdots,\ n-1.$$

顺次连结C上的诸分点，便形成一条折线P，它的每一段 $P_k=\overline{z_kz_{k-1}}$的长度$<\delta$．故$\overline{z_kz_{k-1}}\subset B(z_k, d)\subset G$．这样的$P$，其每边的长$\leqslant\delta$，端点与$C$的重合，顶点都位于 C上．这条折线P就是所求的折线，亦名C的 δ—接触线．

现在来比较$\int_C f(z)dz$与$\int_P f(z)dz$ 的值，即要证明（5）式成立．为此作积分和（依积分定义），把 ζ_k取为点 z_k，

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k).$$

这个和数当 $\delta\to0$ 时，趋近于$\int_C f(z)dz$，即

$$\int_C f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k)$$

或：

$$\left|\int_C f(z)dz-\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

我们再比较积分和$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k)$与积分$\int_P f(z)dz$的差。

由于

$$f(z_k)(z_{k+1}-z_k)=f(z_k)\int_{P_k} dz=\int_{P_k} f(z_k)dz,$$

而

$$\int_P f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{P_k} f(z)dz.$$

故

$$\left|\int_P f(z)dz-\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{P_k} f(z)dz-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{P_k} f(z_k)dz\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{P_k}[f(z)-f(z_k)]dz\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\max|f(z)-f(z_k)||P_k|. \tag{7}$$

但因 $z\in P_k$，应用不等式：

$$|z-z_k|\leqslant|z_{k+1}-z_k|\leqslant\delta<\min(\delta_1, d)$$

$$\therefore\quad \max_{z\in P_k}|f(z)-f(z_k)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2L}.$$

代入（7），则

$$\left|\int_P f(z)dz-\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1}-z_k)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2L}|P_k|$$

$$=\frac{\varepsilon}{2L}\sum_{k=0}^{n-1}|P_k|=\frac{\varepsilon}{2},\quad \left(\sum|P_k|=L\right). \tag{8}$$

比较（6）和（8）式，便得（5）式，从而预理1得证．即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_P f(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz.$$

应用预理 1 来证当 $C\subset G$ 是简单闭曲线的情形．由预理 1，对于任意的$\varepsilon>0$，作C的δ—接触折线P．这个 δ 总存在，并能使

$$\left|\int_C f(z)\,dz-\int_P f(z)\,dz\right|<\varepsilon.$$

因此，欲证 $\int_C f(z)\,dz=0$． 即证$\int_P f(z)\,dz=0$．

反之，如能证得 $\int_P f(z)\,dz=0$，则：

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=M=0.$$

因为C是简单闭曲线，P如为凸多角形，便可从一顶点出发作出若干三角形．如前所论，必有$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=M=0$．如 P 为非凸多角形，但P的任何两边都不相交， $\mathrm{int}(P)\subset G$．我们把 $\mathrm{int}(P)$分成若干个凸多角形，问题也成立．故定理正确． （证毕）

在这个证明中，我们是先证 $f(z)$ 沿△周界的积分为零；再证沿多角形周界的积分也为零；最后证沿任一简单闭曲线的积分也是零．其中要作简单闭曲线的 δ—接触折线 P (多角形的周界)，即预理 1．自然我们也可以倒过来证明，即先证预理，然后证沿多角形，再证沿三角形的积分为零．即沿简单闭曲线的积分为零．

Cauchy 定理指出：只要区域G是单连通，函数 $f(z)$ 在G内是解析的，则 $f(z)$ 在 G 内积分就与路无关．

我们再来看§3·1中的例子．例 2 中的被积函数 $f(z)=z^2$ 是Sz平面上的解析函数，Sz平面是单连通区域，因此满足了Cauchy 积分定理的条件，其积分就与路无关．

Cauchy 定理给出了积分与路无关的充分条件．我们在下一节中即将看到“连续函数在单连通区域G内解析”，是积分与路无关

的必要条件（Morera 定理），也就是说，只有解析函数在单连通区域内的积分，才能与路无关．§3·1中的例 1，因为被积函数$f(z)=\mathrm{Re}z$，在 Sz 平面内的任何区域内都不解析，故积分与路有关．例 3 中的被积函数是 $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$，积分路 C：$|z-a|=\rho$（>0），因为 $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$ 在 $z=a$ 不解析（没意义），所以 $f(z)$ 在任何包含C的单连通区域内都不解析，积分便与路有关．

显然，应用 Cauchy定理容易判定下列闭路积分为零．

【例 1】 证明积分 $\displaystyle\int_{|z|=10}\sin z dz=0$。

【例 2】 证明积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z\cos z}{z-2}dz=0$。

因为例 1 与例 2 中的被积函数，在某一个包含积分路的单连通区域内解析，故积分均为零．

2．Cauchy 积分定理的推广

定理 2　设简单闭曲线C是单连通区域G的边界，函数$f(z)$在G内解析，在$\bar{G}=G\cup C$上连续，则

$$\int_C f(z)dz=0.$$

这个定理是 Polland（波兰特）在1923年所得的结果．

对于这个定理的严格证明，需要有实变函数论和其他方面的知识，因此就不给出证明了．但是今后要经常用到这个定理．因为这个定理并不要求积分路C必须位于解析区域G内，当C是∂G也可以．

3．Cauchy 积分定理推广到复连通区域

定理 3　设有 $n+1$ 条简单闭曲线 C_0，C_1，…，C_n，曲线C_1，

C_2, …, C_n中的每一条都在其余诸曲线的外部区域内；而所有这些曲线又都 $\subset \text{int}(C_0)$. 于是 C_0, C_1, C_2, …, C_n 围成了一个有界复连通区域 G （如图3·7）设函数 $f(z)$ 在 G 内解析，在 $\overline{G}$ 上连续， $C = \bigcup_{k=0}^{n} C_k$ （G 的全部边界），则

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \tag{9}$$

【证明】 这里的积分路 C 是复连通区域 G 的边界，取其正方向（即保证区域完全位于它前进方向的左边）. 对于 C_0 应取逆时针方向；对于 C_1, C_2, …, C_n 应取顺时针的方向.

即

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-} f(z)\,dz.$$

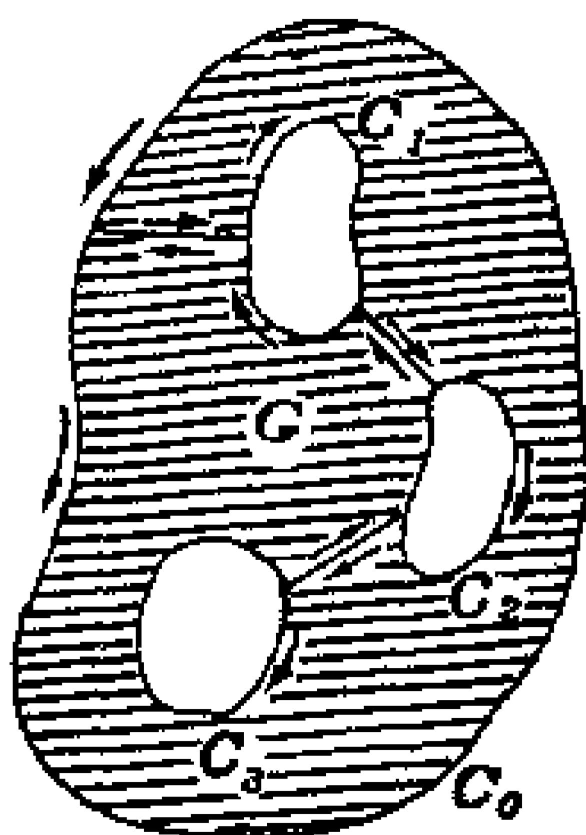


图 3·7

根据积分的基本性质，则有

$$\int_C f(z)\,dz = \left(\int_{C_0} + \int_{C_1-} + \int_{C_2-} + \cdots + \int_{C_n^-}\right) f(z)\,dz.$$

现用完全含于 G 的 n 条补助线段 r_k （$k=1,2$, …, n）来连接 C_1, C_2, …, C_n 如（图3·7）. 于是，复连通区域 G 变成了单连通区域 G'. 然后应用定理 2 即得.

事实上，沿 G' 的边界的积分中，其在全部补助线段 r_k 上的，都是按互反方向各积分一次，并互相抵消。所以剩下的积分是：

$$\int_{C_0} + \int_{C_1^-} + \int_{C_2^-} + \cdots + \int_{C_n^-} = 0.$$

也就是积分

$$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{C_0} + \int_{C_1^-} + \int_{C_2^-} + \cdots + \int_{C_n^-} = 0 \qquad (10)$$

（证毕）

容易看出，根据积分的基本性质，可将（10）式改写成：

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz \qquad (11)$$

这表明凡满足定理3的条件的函数 $f(z)$，沿复连通区域 G 的外部边界的积分，等于沿 G 的内部边界的积分之和。

这个结论在以后的许多定理的证明中都要用到。在积分的计算上它也是有利的工具之一。

【例1】证明

$$\int_{C_0} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{当 } n=1 \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } n \text{为整数，且 } n \neq 1 \text{ 时。} \end{cases}$$

其中 C_0 表示包围点 a 在其内部的任意闭路。

这个例子中的被积函数，和习题（3·1）的题6中的被积函数相同，只是这里的积分路是绕点 a 的任意闭曲线，而前者是圆周 $C = \{z: |z-a| = \rho\}$ 而已。其证明方法，就是利用了（11）式的结果。现证明如下：

【证明】　由于点 $a \in \text{int}(C_0)$，而作圆周 $C = \{z: |z-a| = \rho, \ \rho > 0\}$，使 $C \subset \text{int}(C_0)$（如图3·8）。于是以 C_0 为外部边界，以 C 为内部边界，就构成了一个复连通区域 G。在这个复连通区域 G 内，被积函数 $\frac{1}{(z-a)^n}$ 为解析，满足定理3的条件，因此有

$$\int_{C_0} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{C} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

这样，利用习题3·1 题6的结果，就

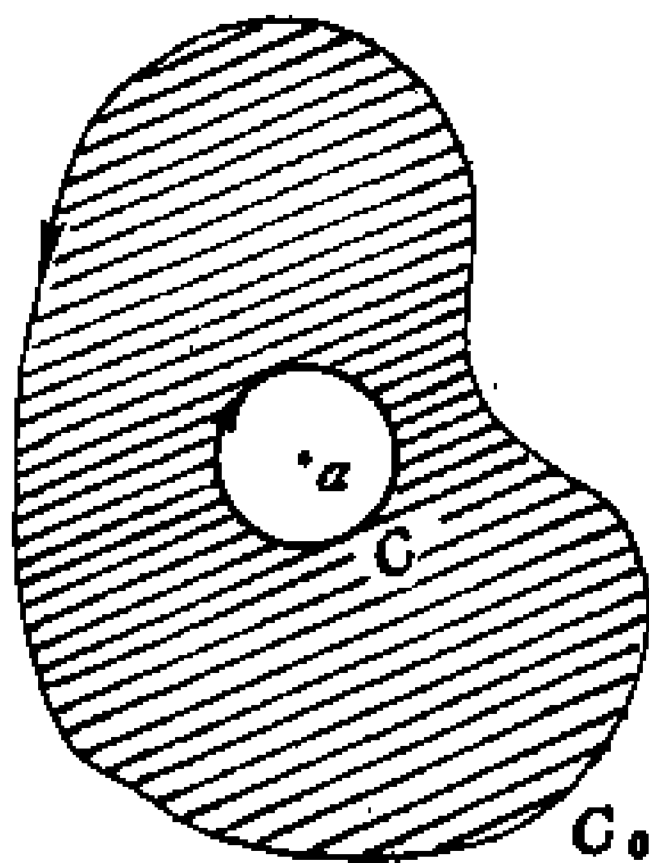


图　3·8

得到了所求证的结果.

这个结果，以后常用，请读者记住.

【例 2】试计算积分 $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$.

其中 C 为绕 0 与 1 两点的闭路.

【解】由于被积函数可以写成：

$$\frac{2z-1}{z^2-z}=\frac{2z-1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}.$$

它们在 z 平面上除 $z=0$ 与 $z=1$ 外为解析. 因此作圆域 $\bar{B}_1=\{z:|z|\leqslant\rho_1\}$ 及 $\bar{B}_2=\{z:|z-1|\leqslant\rho_2\}$，并使 $\bar{B}_1$，$\bar{B}_2\subset\text{int}(C)$. 圆周 $C_1=\partial\bar{B}_1$ $C_2=\partial\bar{B}_2$，$C_1\cap C_2=\phi$. 且互不相含. 于是区域

$$G=\text{int}(C)\sim\bar{B}_1\sim\bar{B}_2$$

便是复连通区域，且 $\partial G=C\cup C_1\cup C_2$（如图 3·9）. 在这个复连通区域内，被积函数解析，满足定理 3 的条件，故应用（11）式便有

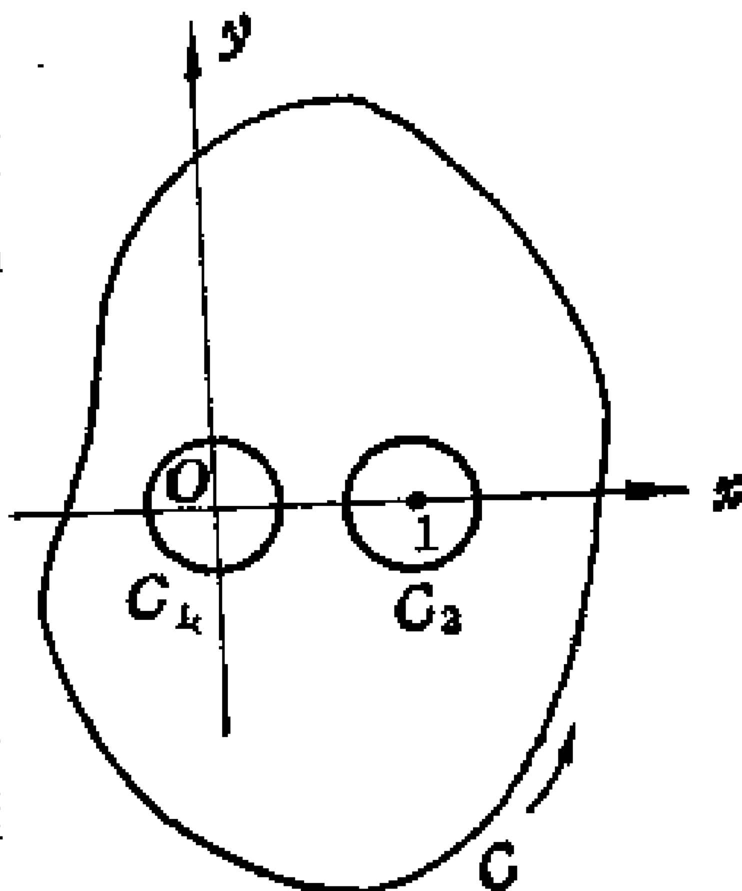


图 3·9

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz=\int_{C_1}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz+\int_{C_2}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz.$$

再应用定理 2 及§3·2例 3 得

$$\int_{C_1}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz=\int_{C_1}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int_{C_1}\frac{1}{z}dz=2\pi i.$$

$$\int_{C_2}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz=\int_{C_2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int_{C_2}\frac{1}{z-1}dz=2\pi i.$$

于是得：

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i.$$

综合定理 2 及定理 3 ，可将 Cauchy定理的推广叙述为：如果函数 $f(z)$ 在区域G 内解析，在$\bar{G}$上连续，则 $f(z)$ 沿G 的边界积分为零。

习　　题（3·2）

1　试用观察法，求得下列积分，并说明根据。

1) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z-2}\, dz.$

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z+4}\, dz.$

3) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{\cos z}\, dz.$

4) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\, dz.$

5) $\int\limits_{|z|=1} ze^z dz.$

6) $\int\limits_C \frac{1}{z}\, dz.$

其中 C 为圆环域：$\frac{1}{2} < |z| < 1$的边界。

2．试计算下列积分：

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2-z}\, dz.$

2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{3z-1}{z(z-1)}\, dz.$

3) $\int\limits_{|z|=2} \frac{2z+3}{z(z+3)}\, dz$.

§3·3 不定积分

1. 积分上限函数的解析性

如上节所论，有了 Cauchy定理，则解析函数 $f(z)$ 在单连通区域G内的积分，只与积分路的起点 z_1与终点 z_2 有关，而与路C无关．因此积分可记为：

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz.$$

其中 z_1 与 z_2 分别称为积分的**下限**和**上限**．如果下限 z_1 固定，让上限在G内变动，则积分

$$\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz,\quad z\in G\subset Sz.$$

为z的单值函数，称为 $f(z)$ 的**积分上限 z的函数**．并记为

$$F(z)=\int_{z_1}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

定理 1　设函数 $f(z)$ 在单连通区域G 内解析，则它的积分上限函数$F(z)$，在G内也是解析函数，且导数 $F'(z)=f(z)$，$z\in G$.

【证明】 只要对G内任一点 z，能证得：

$F'(z)=f(z)$即可．也就是说，由导数定义，只需证得：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$$

或者证得：任意给定一个 $\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，当 $0<|\Delta z|<\delta$时，有不等式

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$$

存在即可。

为此，以点 z 为中心作一个圆周 $C(z,\ \rho)\subset G$，$\text{int}(C)=B(z,\rho)\subset G$（如图3·10）。

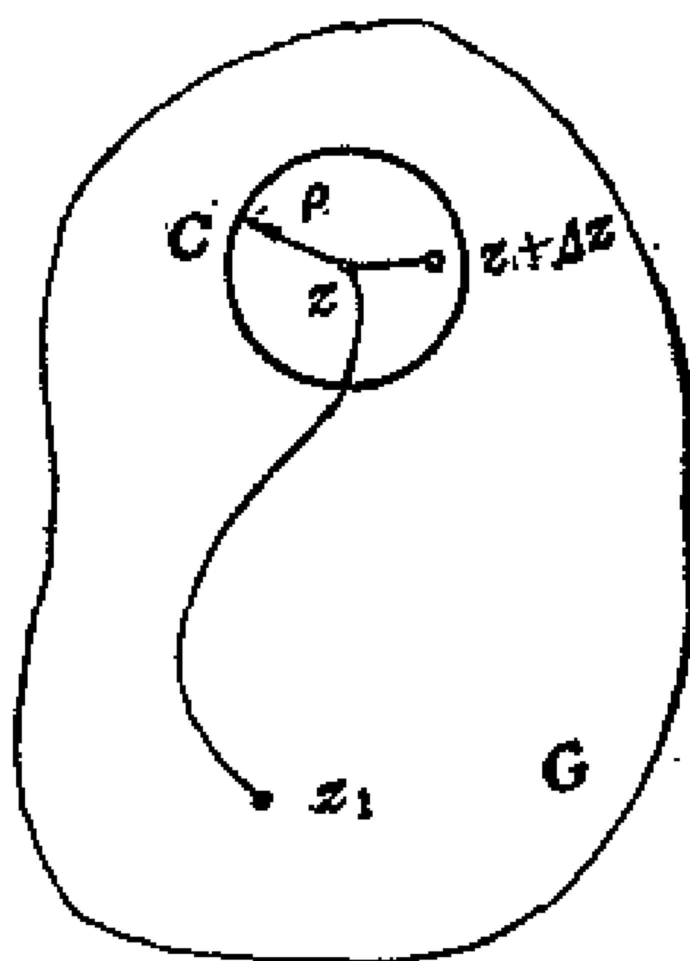


图3·10

取点 $z+\Delta z\in B(z,\ \rho)=\text{int}(C)$，则

$$F(z+\Delta z)=\int_{z_1}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_1}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta-\int_{z_1}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right].$$

由于解析函数 $f(\zeta)$ 在 G 内的积分与路无关，因此令 $f(\zeta)$ 从 z_1 到 $z+\Delta z$ 的积分路通过点 z，并从 z 沿直线段到 $z+\Delta z$。这样可有

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

并且

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta \qquad \left(\text{由§3·1例 4}\int_{z_0}^{z} dz=z-z_0\right)$$

于是得到

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta.$$

根据 $f(z)$ 在 G 内的连续性，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，只要圆周的半径 ρ 足够小，则在一切点 $\zeta\in\text{int}(C)$（或 $|\zeta-z|<\rho$），都有不等式

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$$

成立。于是有：

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|$$

$$<\frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$

这就证明了定理1。

（证毕）

从以上的证明过程中，可以证明下面更一般的情形。

定理2 设函数 $f(z)$ 在单连通区域G内连续，z_0为G内的一个定点，z 为G内的任意一变点，积分

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$$

存在，且与路无关．则 $F(z)$在 G内为解析函数，并且有 $F'(z)=f(z)$。

也就是说，用定理1的证明，就可以证得这个定理。它将在下一节中，证明Morera（莫瑞拉）定理时被应用。

2．不定积分

和数学分析相类似，我们给出不定积分的定义如下：

在区域G内满足 $\varphi'(z)=f(z)$ 的函数 $\varphi(z)$，称为 $f(z)$ 在 G内的一个**不定积分**，或**原函数**．

容易证明：函数 $f(z)$的任意两个原函数之差，都是一个常数．

事实上，设 $\varphi_1(z)$和 $\varphi_2(z)$ 是 $f(z)$ 的任意两个原函数．于是由定义可有

$$[\varphi_1(z)-\varphi_2(z)]'=\varphi_1'(z)-\varphi_2'(z)=f(z)-f(z)=0$$

由第二章 §2·1—4的例3，乃得 $\varphi_1(z)-\varphi_2(z)=k$（常数）．

显然，在定理1和定理2的条件下，$f(z)$ 的积分上限函数 $F(z)=\int_{z_1}^{z}f(\zeta)d\zeta$ 就是 $f(z)$的一个原函数．

3. Newton–Leibniz 公式

下面我们用原函数推得解析函数的定积分计算公式——Newton——Leibniz（牛顿——莱布尼兹）公式。

定理 3 设函数 $f(z)$ 在单连通区域G内解析，$F(z)$是 $f(z)$ 的任意一个原函数，则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

其中 z_1与z_2都是G内的点，$f(z)$沿着z_1 与z_2 间的任一积分路积分。

【证明】 由于$F(z)$是 $f(z)$ 的一个原函数，因此可有：

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + C \qquad (C\text{为常数})$$

令 $z = z_2$，则

$$F(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta + C$$

令 $z = z_1$，则 $F(z_1) = C$.

$$\therefore \quad F(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta + F(z_1).$$

故得证

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta = F(z_2) - F(z_1).$$

（证毕）

应用牛顿——莱布尼兹公式计算解析函数的定积分，就完全和数学分析中计算一元函数的定积分相类似．例如：

$$\int_{z_0}^{Z} z^n dz = \frac{1}{n+1}\,(Z^{n+1} - z_0^{\,n+1}), \quad n \neq -1.$$

$$\int_{z_0}^{Z} e^z dz = e^Z - e^{z_0}.$$

§3·4 Cauchy积分公式

1. Cauchy 积分公式

如以下所论，Cauchy积分公式是由Cauchy积分定理推得的重要成果之一。它也是研究解析函数的重要工具之一。

定理 1 设G是以有限条光滑简单闭曲线C为边界的有界区域（如图3·11），函数$f(z)$在G内解析，在$\overline{G}$上连续。则对于G内的任意一点z，都有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \qquad (1)$$

公式（1）就是著名的Cauchy积分公式，或称积分基本公式。

【证明】设在G内任取一点z_0，只须证得模

$$I=\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta - 2\pi i f(z_0)\right|$$

可以任意小，就能证得（1）式。

为此，我们以$z_0\in G$为中心作圆周$C_\rho(z_0, \rho)=\{z:|z-z_0|=\rho\}$，使$C_\rho(z_0, \rho)\subset G$，（如图3·11）

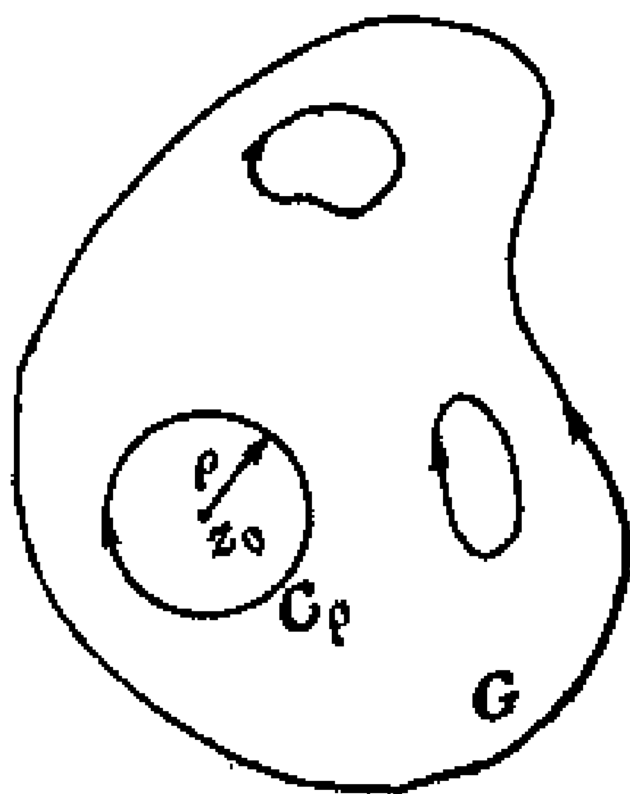


图3·11

在G内，函数$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$只在点$z_0$不解析，但在$G$内挖去闭圆域$B=\{z:|z-z_0|\leqslant\rho\}$的区域上就解析了。于是满足了§3·2的定理3的条件，而有等式：

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \qquad (2)$$

其中 $C_\rho = \partial B = \{z: |z - z_0| = \rho\}$.

又由于

$$2\pi i = \int_{C_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$$

而有

$$2\pi i f(z_0) = \int_{C_\rho} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta. \qquad (3)$$

将（2）及（3）代入I内，则有

$$I = \left| \int_{C\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \int_{C\rho} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right|$$

$$= \left| \int_{C\rho} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \leqslant \int_{C\rho} \frac{|f(\zeta) - f(z_0)|}{|\zeta - z_0|} |d\zeta|.$$

由于 $f(\zeta)$ 在G内连续，故对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|\zeta - z_0| < \delta$ 时，有

$$|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

于是只要圆周C_ρ的半径 ρ取得使$\rho < \delta$．在C_ρ上就有

$$I < \frac{\varepsilon}{\rho} \int_{C\rho} |d\zeta| = \frac{\varepsilon}{\rho} \ 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

由于 ε可以任意的小，故定理得证．　　　　　　（证毕）

这个公式所以重要，就在于它给出了解析函数的积分表示式．它表明了解析函数在区域内部的值，可由函数在区域边界上的值来确定．故亦称“边”**唯一性定理．**

比如说，设 $f(z)$ 是满足定理 1 条件的解析函数．如果这个函数在区域G的边界C上取值总为常数 k，则这个函数在区域内部取值也总为常数 k．这是因为由公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{k}{\zeta - z} d\zeta = k.$$

再比如，如果这个函数在边界 C 上取值的规律为 $f(\zeta)=\zeta^2$（$\zeta\in C$），则这个函数在 G 内部的取值规律亦为 $f(z)=z^2$（$z\in G$）。因为由公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta^2}{\zeta-z}\,dz=z^2.$$

解析函数的这个特征，说明它有强烈的内在联系。

Cauchy 积分公式对于计算一些闭路积分，是很有用的。

【例 1】试计算积分

$$\int_{|z-a|=1}\frac{z^n}{z-a}\,dz$$

【解】由于函数 z^n 在闭圆域 B: $|z-a|\leqslant 1$ 上满足Cauchy积分公式条件。故由公式可得：

$$\int_{|z-a|=1}\frac{z^n}{z-a}\,dz=2\pi i a^n.$$

【例 2】试计算积分

$$\int_{|z|=5}\frac{dz}{z(z^2+1)}.$$

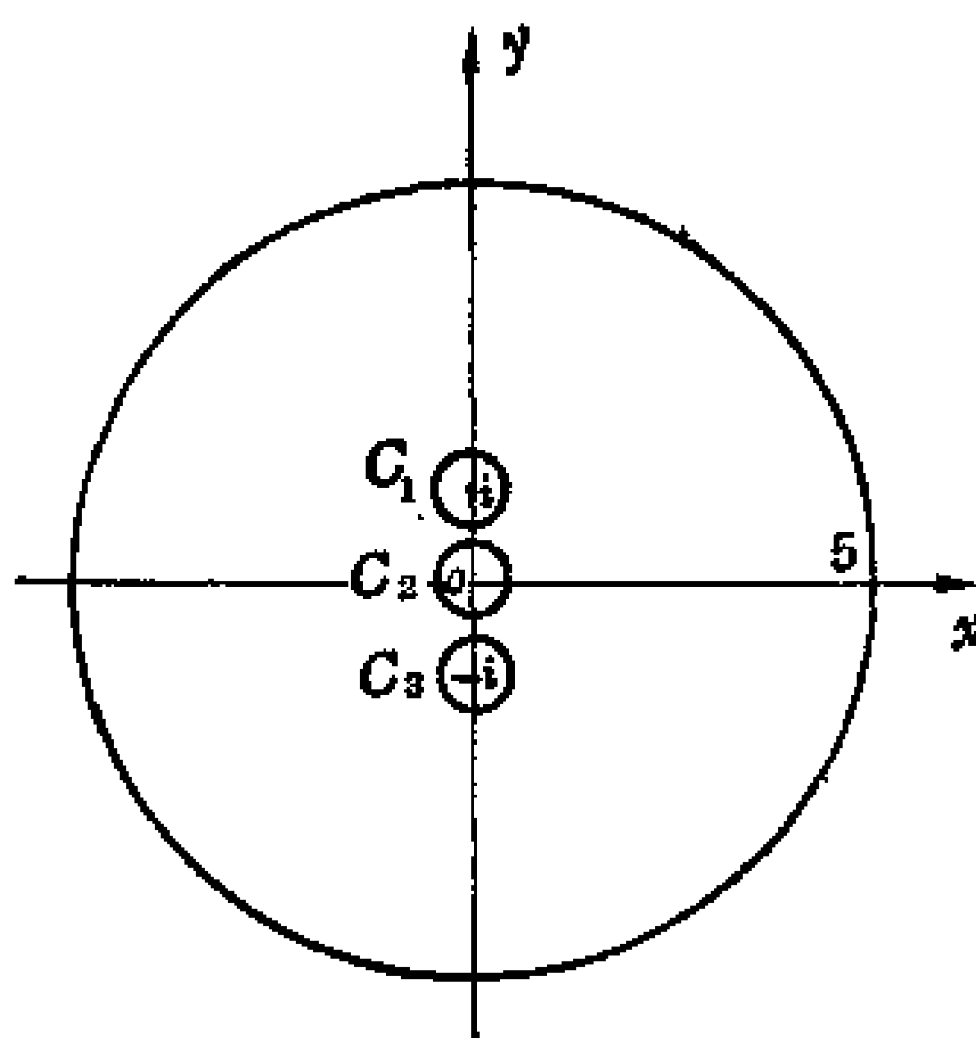


图3·12

【解】由于

$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z(z+i)(z-i)}.$$

因此我们在 $|z|=5$ 内部分别以点 0，$\pm i$ 为中心作三个小圆周 C_1，C_2，C_3（如图3·12）且互不相交，互不包含。则在以 $|z|=5$ 为外边界，以 C_1，C_2，C_3 为内部边界的复连通区域上，被积函数满足§3·2定理 3 的条件。故有

$$\int_{|z|=5}\frac{dz}{z(z^2+1)}=\int_{C_1}\frac{dz}{z(z^2+1)}+\int_{C_2}\frac{dz}{z(z^2+1)}+\int_{C_3}\frac{dz}{z(z^2+1)}.$$

由 Cauchy积分公式

$$\int_{C_1}\frac{dz}{z(z^2+1)}=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i}dz=2\pi i\frac{1}{i(i+i)}=-\pi i,$$

$$\int_{C_2}\frac{dz}{z(z^2+1)}=\int_{C_2}\frac{\frac{1}{z^2+1}}{z}dz=2\pi i\frac{1}{0+1}=2\pi i,$$

$$\int_{C_3}\frac{dz}{z(z^2+1)}=\int_{C_3}\frac{\frac{1}{z(z-i)}}{z+i}dz=2\pi i\frac{1}{-i(-i-i)}=-\pi i,$$

于是得

$$\int_{|z|=5}\frac{dz}{z(z^2+1)}=-\pi i+2\pi i-\pi i=0.$$

2. 算术平均值定理

如果函数 $f(z)$ 在一个圆域 B: $|z-z_0|<r$ 内满足Cauchy积分公式的条件，我们就得到下面的**算术平均值定理**.

定理2 设函数 $f(z)$ 在圆域 B: $|z-z_0|<R$ 内解析，在 $\bar{B}$: $|z-z_0|\leqslant R$上连续，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta. \tag{4}$$

事实上，只要应用 Cauchy积分公式，作代换

$$z-z_0=Re^{i\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

即可得（4）式. （证毕）

这个公式的意义，在于它说明了解析函数在圆心的值等于它在圆周上值的算术平均值.在证明最大模原理时，将用到它（见§3·6）.

习　　题（3·3）

1. 试计算下列积分：

1) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$.

2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2+2} dz$.

3) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$.

4) $\int\limits_{|z|=4} \frac{1}{z^3-3z^2+2z} dz$.

5) $\int\limits_{C} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz$.

其中 C为圆环域：$\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2$的边界.

2. 设

$$f(z) = \int\limits_{|\zeta|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{3}\zeta}}{\zeta - z} d\zeta$$

试求 $f(i)$ 和 $f(-i)$. 又当 $|z|>2$ 时，试求 $f(z)$的值.

§3·5 解析函数的无穷可微性

在数学分析中，我们知道在一个区间内可导的实变函数 $f(x)$，在此区间内不一定具有二阶导数，更谈不上具有高阶导数. 可是在一个区域内的解析函数，它不仅在这个区域内有一阶导数，而且它有任意阶导数. 这个事实，充分地说明了可导的实变函数与可导的复变函数之间的深刻差别. 正因如此，我们才导得了一系列的重要定理.

1. 解析函数的无穷可微性及其证明

定理 1 设闭路C所围成的区域为 G，设函数 $f(z)$在 G 内解析，

在$\overline{G}$上连续。则对G内任意一点 z， $f(z)$ 的任意阶导数都存在，并且有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

【证明】 我们用数学归纳法来证明如下：

显然，当 $n=0$ 时，有

$$f(z)=f^{(0)}(z)=\frac{0!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{2}$$

其中 $0!=1$，（1）式成立。

现证 $n=1$ 时，（1）式也成立。为此，任取一点 $z\in G$，因$z\overline{\in}C$，故设 $d=d(z,C)>0$。取$\frac{d}{2}$，作 z的邻域$B(z,d/2)\subset G$，并取 $z+h\in B\left(z,\frac{d}{2}\right)$，$G\subset|z|\leqslant R$，由导数定义

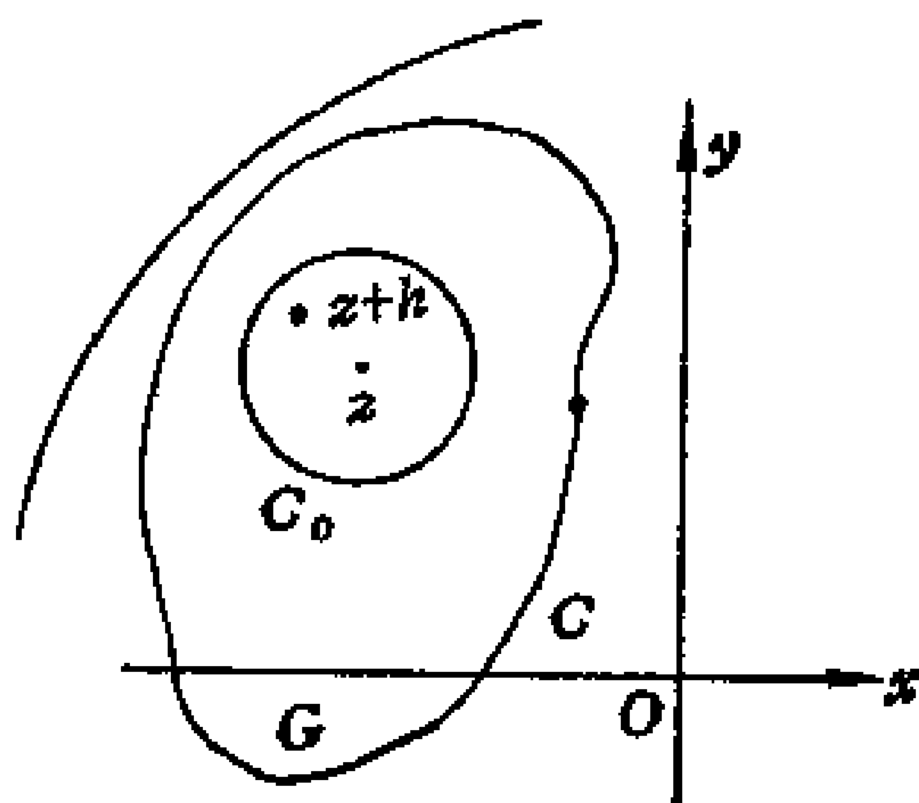


图3·13

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \tag{3}$$

考虑（2）及（3），如能证得

$$I=\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| \tag{4}$$

可以任意小，即可得（1）式当 $n=1$ 时成立。

事实上，根据 Cauchy积分公式而有

$$f(z+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+h)}\,d\zeta$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

$$\therefore\quad \frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{h}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+h)}\right.$$

$$\left.-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-h)}\,d\zeta.$$

将上式代入（4）

$$I=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-h)}-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right]d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)}d\zeta\right|.$$

因为 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上连续，$|f(\zeta)|$ 在 C 上也连续，所以必在 C 上有界．故设 $|f(\zeta)|\leqslant M$，$\zeta\in C$．并且，当 $\zeta\in C$ 时，可有

$$2R>|\zeta-z|\geqslant d,\quad 2R>|\zeta-(z+h)|\geqslant\delta \tag{5}$$

其中 $\delta=d(C_\varepsilon,C)$．

现设 L 为 C 的长度，由此可得

$$I\leqslant\frac{|h|}{2\pi}\int_C\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^2|\zeta-z-h|}|d\zeta|<\frac{|h|}{2\pi}\int_C\frac{M}{d^2\cdot\delta}|d\zeta|$$

$$=\frac{LM|h|}{2\pi d^2\delta}.$$

显然，当 $h\to0$ 时，就有 $I\to0$．这就证得了当 $n=1$ 时，公式（1）成立．

根据数学归纳法，设（1）式对于任一正整数 $n(\geqslant2)$ 都成立，则应证（1）对于 $n+1$ 也成立．即证

$$\lim_{h\to0}\frac{f^{(n)}(z+h)-f^{(n)}(z)}{h}=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}}\,d\zeta \tag{6}$$

当 $z\in G$ 时成立即可（进一步的证明可以略去，以下供参考）．

* 为证（6）式，类似于证（3）式，但方法较繁．不要求掌

握，写在这里供参考。

应用（5）式，并令 $z+h=z'$，则 $z'-z=h$，对于 $z'\in \text{int}(C_0)$，$|z'-z|\leqslant\rho$，于是

$$f^{(n)}(z')-f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{(\zeta-z)^{n+1}-(\zeta-z')^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+1}(\zeta-z')^{n+1}}d\zeta.$$

又令 $\zeta-z=k$，因 $z'-z=h$，$\therefore\ \zeta-z'=k-h$。

从而有

$$\frac{f^{(n)}(z+h)-f^{(n)}(z)}{h}=\frac{n!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{k^{n+1}-(k-h)^{n+1}}{k^{n+1}(k-h)^{n+1}\cdot h}d\zeta$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{(k-h)^n+k(k-h)^{n-1}+\cdots+k^n}{k^{n+1}(k-h)^{n+1}}d\zeta \quad (7)$$

我们来估计（7）与（6）之差，其中设

$$D=\frac{(k-h)^n+k(k-h)^{n-1}+\cdots+k^n}{k^{n+1}(k-h)^{n+1}}-\frac{n+1}{k^{n+2}}$$

$$=\frac{k(k-h)^n+k^2(k-h)^{n-1}+\cdots+k^{n+1}-(n+1)(k-h)^{n+1}}{k^{n+2}(k-h)^{n+1}}$$

（其中分子减数中有 $n+1$ 项，分写成 $n+1$ 项与被减数合并）

$$D=\frac{1}{k^{n+2}(k-h)^{n+1}}\{(k-h)^n[k-(k-h)]+(k-h)^{n-1}\cdot$$

$$[k^2-(k-h)^2]+\cdots+[k^{n+1}-(k-h)^{n+1}]\}$$

$$=\frac{1}{k^{n+2}(k-h)^{n+1}}\{h(k-h)^n+h(k-h)^{n-1}(2k-h)+$$

$$\cdots+h[k^n+k^{n-1}(k-h)+\cdots+(k-h)^n]\}$$

$$=\frac{h}{k^{n+2}(k-h)^{n+1}}\{(k-h)^n+(k-h)^{n-1}(2k-h)+\cdots$$

$$+k^n+k^{n-1}(k-h)+\cdots+(k-h)^n]\}$$

应用（5）式

$$|D|\leqslant\frac{|h|}{\delta^{n+2}\delta^{n+1}}[(2R)^n+(2R)^{n-1}\cdot 2(2R)+\cdots+$$

$$+(n+1)(2R)^n] \leqslant |h| \frac{(n+1)(n+2)(2R)^n}{2\cdot\delta^{2n+3}}$$

由于 $|f(z)|\leqslant M$，$z\in C$，并用L表示C的长度，

$$\therefore \quad \left|\frac{f^{(n)}(z+h)-f^{(n)}(z)}{h}-F(z)\right|$$

$$\leqslant \frac{n!}{2\pi}|h|\frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot\delta^{2n+3}}ML(2R)^n.$$

显然，当 $h\to 0$，右端$\to 0$。

其中 $F(z)$表示（6）式的右端

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(z+h)-f^{(n)}(z)}{h}=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}}\,d\zeta.$$

即
$$f^{(n+1)}(z)=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}}\,d\zeta.$$

已证 $n=0$，$n=1$时（1）式成立。故定理对于任意的 n 都成立。

（证毕）

也有人把（1）式称为**高阶微分公式**。因为由之可以求得 $f(z)$ 的任意阶导数。

从定理1立刻可以得到：**区域G内的解析函数 $f(z)$ 的任意阶导函数，仍然是同区域G内的解析函数。**

应用公式（1）可以计算出下列积分：

【例1】试计算积分

$$\int_C\frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz.$$

其中C是绕点 i 的任意一条闭路（闭积分路）。

【解】对于函数 $f(z)=\cos z$ 来说，应用公式（1）可得

$$\int_C\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\ (\cos z)''|_{z=i}=-\pi i\cos i$$

$$=-\frac{\pi i\,(e+e^{-1})}{2}.$$

【例 2】 试计算积分

$$\int_{|z|=3}\frac{dz}{z(1-z)^3}.$$

【解】 被积函数在闭路 $|z|=3$ 内，有两个非解析点：$z=0$，$z=1$。

分别以 $z=0$ 及 $z=1$ 为中心作两个圆周：$|z|=\frac{1}{2}$ 及 $|z-1|=\frac{1}{3}$（这两个圆周只要都在 $|z|=3$ 内，又不互相包含，互不相交即可）。则

$$\int_{|z|=3}\frac{dz}{z(1-z)^3}=\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{(1-z)^3}}{z}dz$$

$$+\int_{|z-1|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{z}}{-(z-1)^3}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{(1-z)^3}\Big|_{z=0}-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)''\Big|_{z=1}\right]$$

$$=0.$$

2. Cauchy 不等式

由解析函数的n阶导数公式，很容易导得重要的Cauchy不等式。

定理 2 设点 $z_0\in G$，并作圆域$B=\{z:|z-z_0|<\rho\}\subset G$，其边界 $C=\partial B=\{z:|z-z_0|=\rho\}$，并设函数 $f(z)$ 在G内解析，且$|f(z)|$的最大值为 $M(\rho)$。则从 $f(z)$ 的 n阶导数在点 z_0的模，便有下面的不等式：

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!\,M(\rho)}{\rho^n}$$

成立。

【证明】 由定理 1 中的（1）式易得

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}}|d\zeta|$$

$$\leqslant \frac{n!\,M(\rho)\,2\pi\rho}{2\pi\rho^{n+1}} = \frac{n!\,M(\rho)}{\rho^n}.$$

（证毕）

这个不等式称为Cauchy不等式。

当 $n=1$ 时，有

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho}.$$

3. Liouville 定理

利用 Cauchy不等式可以证得解析函数论中另一重要定理，称为 Liouville（刘维尔）定理。

定理 3 设函数 $f(z)$ 在S_z平面上解析，且有界，则 $f(z)$ 必是一个常数。

【证明】由于 $f(z)$ 在S_z平面上有界，可知，必存在一个常数 $M>0$，使得对于S_z平面内的任意一点 z，都有

$$|f(z)| \leqslant M,$$

在 S_z 平面上任取一点 z_0，作圆域 $B(z_0, R) \subset S_z$。并于其上应用 Cauchy不等式，有

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

这个不等式的右端，当 $R\to\infty$ 时为零。故

$$f'(z_0)=0.$$

由点 z_0的任意性，得到 $f'(z)$ 在 S_z 平面上处处为零。因而 $f(z)$ 必为常数（见第二章 §2·1—4例 3）。

（证毕）

4. 代数基本定理及其证明

这个定理是代数学中的著名定理。用纯代数的方法证明它是很

繁的．这里我们给出一个应用 Liouville 定理的复函证明方法，它比较简单．这个定理及其证明如下：

定理 4　设多项式

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,\quad (n\geqslant 1,\ a_n\neq 0).$$

其中系数 $a_0, a_1, a_2\cdots, a_n$ 是复常数，则方程 $f(z)=0$ 在S_z平面内至少有一个根．

【证明】应用反证法．假设函数 $f(z)$ 对于S_z平面内的任何一点都不为零．

令　$F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$

则函数 $F(z)$是S_z 平面上的解析函数．又当 $|z|\to\infty$时，$|f(z)|\to\infty$ (因 $|f(z)|=|z|^n\left|a_n+\dfrac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\dfrac{a_0}{z^n}\right|\geqslant|z|^n\left(|a_n|-\dfrac{|a_{n-1}|}{|z|}-\cdots-\dfrac{|a_0|}{|z|^n}\right)$)，而得$|F(z)|\to 0$．因此$F(z)$又是 S_z 平面上的有界函数．

于是函数 $F(z)$满足 Liouville 定理的条件，$F(z)$ 必为一常数．从而 $f(z)$ 必为一常数．这与定理条件中的 $n\geqslant 1$，$a_n\neq 0$ 相矛盾．故定理得证．　　　　（证毕）

5．Morera（莫瑞拉）定理

定理 5　设函数 $f(z)$ 在单连通区域G内连续．如果沿G内任意一条闭路C 的积分都为零，即

$$\int_C f(z)\,dz=0,$$

则 $f(z)$ 必为G内的解析函数．

【证明】由定理的条件：$f(z)$沿G内任意一条闭路 C的积分为零，即

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

可知 $f(z)$ 在G 内的积分与路无关，因此它的积分上限函数：

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

其中 z_0是G内一固定点，z为G内任意点。

它满足了§3·3中定理 2 的条件，因此 $F(z)$ 在 G 内解析，且 $F'(z)=f(z), z\in G$.

由解析函数的无穷可微性，$F(z)$ 的导数仍解析，即得证 $f(z)$ 在 G内是解析函数。

由 Cauchy 定理和 Morera 定理，实际上给出了定理：函数 $f(z)$在区域G内解析的充分必要条件是 $f(z)$在 G内连续；并且对任意一条闭路 $C\subset G$，就有积分

$$\int_C f(z)dz=0$$

它的必要性可直接由Cauchy定理导得.而充分性可证明如下：

在G内任取一点 z_0，必存在一个圆域：$B=\{z: |z-z_0|<\rho\}\subset G$（只要 ρ取得足够小）．在圆域B内应用 Morera 定理，就可得到 $f(z)$ 在点 z_0 是解析的。由点 z_0 的任意性，即得 $f(z)$ 在G 内是解析的。

Morera 定理，实际上是 Cauchy 定理的逆定理。

6. 可以用多项式逼近的函数的解析性

定理 6 设多项式序列 $\{P_n(z)\}$，$n=1,2,3,\cdots$ 在某一个区域 G内一致收敛于一个函数 $f(z)$，

$$P_n(z)\rightrightarrows f(z).$$

则 $f(z)$ 是G内的解析函数.

【证明】设取任意一条闭曲线 $C\subset G$，且 $\mathrm{int}(C)\subset G$，则多项式序列 $\{P_n(z)\}$ 在C 上一致收敛于连续函数 $f(z)$（因为多项式是连续函数，依第二章§2·4，$f(z)$连续）．这时$\{P_n(z)\}$与 $f(z)$之间有这

样的联系，使得 $\varepsilon>0$ 无论怎样小，总有 $N(\varepsilon)$ 存在，使当 $n>N(\varepsilon)$时，对于 $z\in C$，都有

$$|P_n(z)-f(z)|<\varepsilon.$$

根据积分的性质 4）（ML不等式)，则($M=\varepsilon$)

$$\left|\int_C [P_n(z)-f(z)]dz\right|<\varepsilon\cdot L \quad (L\text{是}C\text{的长度})$$

由于多项式是解析函数，

$$\int_C P_n(z)dz=0$$

$$\therefore \quad \left|\int_C f(z)dz\right|<\varepsilon L.$$

右端可以任意小，即

$$\int_C f(z)dz=0$$

因为C是G内的任意闭曲线，依Morera 定理，$f(z)$ 是G内的解析函数。（证毕）

这个定理说明了：如果区域G 的函数 $f(z)$ 可以用同区域内的多项式来逼近，则 $f(z)$ 是 G内的解析函数。

这个定理证明了§2·4的定理 1 的前半部分的结论。

§3·6 解析函数的最大模原理、Poisson积分

1. 最大模原理

下面要讲的定理 1，就是要讨论的名为最大模原理的问题。

解析函数的最大模原理，是解析函数的一个非常重要的原理。它说明了一个解析函数的模，在区域内部的任何一点都达不到最大值，除非这个函数恒等于常数。

定理 1（**最大模原理**） 设函数 $f(z)$ 在有界区域G内解析，

在$\overline{G}$上连续，且不恒为一个常数，则它的模 $|f(z)|$ 的最大值不能在G的内部达到，而只能在边界上达到。

证明这个原理的方法很多，在这里，我们应用积分的方法给出一种证明。

【证明】由于 $f(z)$ 在$\overline{G}$上连续，根据连续函数的性质可知 $|f(z)|$ 在$\overline{G}$上可达最大值（§1·4—4），并设为M。因此如果能够证明在G内不存在一点 z_0，使$|f(z_0)|=M$，那么定理就证明了。

我们应用反证法。假设在G内存在一点 z_0，使$|f(z_0)|=M$。设C为一圆周，$C=\{z: |z-z_0|=R\}\subset G$。则由算术平均值公式，我们有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta, \quad (0<r<R)$$

因而有

$$M\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta})|\,d\theta.$$

但是 $|f(z_0+re^{i\theta})|$ 是 θ 的连续函数，并且 $|f(z_0+re^{i\theta})|\leqslant M$，因此必须有等式 $|f(z_0+re^{i\theta})|=M$。由此即知在圆周C的内部处处都有 $|f(z)|=M$。

现在考虑G内任意一点 $Z\neq z_0$，在G内作一折线L连接z_0及Z，设 $d(L, \partial G)$是L与G的边界的距离。取一正数 $\rho<d$，对于L上每一点 z，相应地有一个以它自己为中心，以 ρ为半径的圆域$B(z,\rho)$。这些圆域都属于G。由（第一章 §1·4—1）H.—B.定理在L上能取一串点 z_0，z_1，z_2，…，z_{n-1}，$z_n=Z$，使每相邻两点之间的距离小于 ρ，则与它们相对应的 $n+1$ 个圆域把 L盖住。设以 z_0 为中心、以 ρ 为半径的圆周是C_0。因为 $|f(z_0)|=M$，根据上面已证的结果，在$z\in \text{int}(C_0)$，处处都有 $|f(z)|=M$。特别有 $|f(z_1)|=M$，$z_1\in\text{int}(C_0)$。然后以 z_1 为中心，以 ρ 为半径作圆周 C_1。同理可知在$z\in\text{int}(C_1)$，处处都有$|f(z)|=M$。特别有$|f(z_2)|=M$，$z_2\in$ int

(C_2)。继续下去，最后有 $|f(Z)|=M$。所以在 G 内处处有 $|f(z)|=M$。

由此可见 $f(z)$ 是一常数。这与定理条件矛盾。

（证毕）

*2. Poisson 积分公式

定理 2 设函数 $u(x,y)$ 在圆域 $B: |z-z_0|<R$ 内调和，在 $\bar{B}$ 上连续，则对于任意一点 $z=z_0+re^{i\varphi}\in B$，有

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta \tag{1}$$

其中 $u(r,\varphi)=u(z_0+re^{i\varphi})$，$u(R,\theta)=u(z_0+\mathrm{R}e^{i\theta})$。

这个公式称为 **Poisson（波阿松）积分公式**。它类似于解析函数的 Cauchy积分公式，也是表明调和函数在圆域内部的值可用它在边界上的值来表示。这个公式的导得也正是应用了解析函数的 Cauchy 积分公式。

【证明】 由定理 1，在 B 内可构造出一个解析函数

$f(z)=u(z)+iv(z)$

根据解析函数的 Cauchy积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{2}$$

将 $z=z_0+re^{i\varphi}$，$\zeta=z_0+\mathrm{R}e^{i\theta}$ $0\leqslant\varphi,\theta\leqslant 2\pi$ 代入（2）式得

$$f(z_0+re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\mathrm{R}e^{i\theta})\frac{\mathrm{R}e^{i\theta}}{\mathrm{R}e^{i\theta}-re^{i\varphi}}\,d\theta \tag{3}$$

令 z^* 为点 z 关于圆周 $C=\{z:|z-z_0|=R\}$ 的对称点，则 $z^*=z_0+\frac{R^2}{r}e^{i\varphi}$；$z^*\in\mathrm{int}(C)$。因此函数

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}$$

在 $\bar{B}=\{z: |z-z_0|\leqslant R\}$ 内解析，故积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}\,d\zeta=0.$$

亦即

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-\frac{R}{r}e^{i\varphi}}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-Re^{i\varphi}}\,d\theta. \qquad (4)$$

由（3）式减去（4）式，整理后得

$$f(z_0+re^{i\varphi})=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})\ \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\ d\theta \quad (5)$$

两端都分离出实部便得Poisson积分公式（1），即

$$u(z_0+re^{i\varphi})=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+Re^{i\theta})\ \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\ d\theta.$$

当 $r=0$ 时，即有

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+Re^{i\theta})d\theta.$$

（证毕）

这个等式表明："$u(z)$ 在圆心 z_0 处的值等于它在圆周上的值的算术平均值"，这也与解析函数的算术平均值公式相类似.

从以上所给出的几个定理来看，都是由解析函数的性质而推得调和函数相应的类似的性质的. 实际上调和函数有许多性质都是这样得到的.

习　题（3·4）

1．试计算下列积分：

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz$.

2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z+1)^3} dz$.

3) $\int\limits_{|z|=2} \frac{2z^2-z-1}{(z-1)^2} dz$.

2．设在 $|z|\leqslant 1$ 上函数 $f(z)$ 为解析，且

$|f(z)|\leqslant 1$,

试证

$|f'(0)|\leqslant 1$.

3*．设 $f(z)$ 为非常数整函数，又设 R, M 为任意正数．试证满足 $|z|>R$ 且 $|f(z)|>M$ 的 z 存在．

4．设函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，那么这个函数沿 G 内任意闭路积分是否都为零？为什么？

5．对什么样的简单闭曲线 C，有

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^2+z+1}=0.$$

6．设函数 $f(z)$、$g(z)$ 在单连通区域 G 内解析，α，β 是 G 内两点，试证：

$$\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)dz=\Big[f(z)\cdot g(z)\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta g(z)f'(z)dz.$$

7．设

$$f(z)=\int\limits_{|\zeta|=2} \frac{3\zeta^2-2\zeta+1}{\zeta-z} d\zeta.$$

1）试证 $f(1)=4\pi i$,

2）当 $|z|\neq 2$ 时，试求 $f(z)$ 之值．

8．设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 上连续，且 $f(0)=1$，求积分：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\ \frac{dz}{z}\cdots\cdots \qquad (1)$$

并由此表达式证明：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\ d\theta=2+f'(0).$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=2-f'(0).$$

9．求积分

$$\int_C \frac{dz}{z+2}.$$

其中C是圆周 $|z|=1$，并由此证明：

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\ d\theta=0. \qquad (1)$$

10．设函数 $f(z)$ 在单连通区域G内是解析的，且在 G 内的闭曲线 r 上满足 $|f(z)-1|<1$,

证明：

$$\int_r \frac{f'(z)}{f(z)}dz=0.$$

11．设函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析且

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}.$$

试证 $|f^{(n)}(0)|$ 的估值为：

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant(n+1)!\,e.$$

12．设函数$\varphi(\zeta)$ 在一条简单曲线C上连续，那么在不含C上的点的任何区域G内，函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

解析，并且有任意阶导数

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\qquad(n=1,2,\cdots)$$

这里所确定的 $\Phi(z)$的积分，称为 Cauchy 型积分。

13. 如果 $f(z)$ 在 $|z-z_0|>r_0$ 内解析，且

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=A,$$

则对任何正数 $r>r_0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}f(z)\,dz=A.$$

这里 K_r 是圆周 $|z-z_0|=r$。

14. 如果函数在简单闭曲线C的外部区域 G内及 C 上每一点解析，且$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\alpha$，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+\alpha, & \text{当} z\in G\text{时。}\\ \alpha, & \text{当} z\in C\text{的内部区域时。}\end{cases}$$

15. 设 $f(z)$ 在曲线C 所围成的闭区域$\overline{G}$上解析， z_1，z_2，$\cdots$，z_n 为 G 内任意不同的 n 个点，令 $w_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$，试证积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{w_n(\zeta)}\cdot\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

F(z)为次数不高于 $n-1$次多项式，且 $F(z_i)=f(z_i)$，$i=1,2,\cdots,n$。

16. Liouville 定理的几何意义是：非常数整函数的值不能全含于一圆之内。试证非常数整函数的值不能全含于一圆之外。

17. 设 $f(z)$ 是整函数， 且 $|f(z)|\geqslant 1$，证明 $f(z)$ 必是一常数。

18. 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$在区域G 内解析，在$\overline{G}$ 上连续，如果在G的边界上恒有 $f(z)=g(z)$，则在$\overline{G}$上恒有 $f(z)=g(z)$。

19. 设函数 $f(z)$ 在闭区域$\overline{G}$上解析，且恒不为零，如果在边界上有$|f(z)|=M$，则在整个G内有 $f(z)=Me^{i\alpha}$，其中 M，α 都是实常数。

20．试用调和函数的算术平均值公式证明：

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0.$$

其中 $-1<r<1$.

21．证明：如果两个函数 $u_1(x,y)$ 与 $u_2(x,y)$ 在闭域 $\overline{G}$ 内为连续，在 G 内为调和，并且如果在 G 的所有边界点处有 $u_1(x,y)=u_2(x,y)$，则在 G 内恒有 $u_1(x,y)=u_2(x,y)$.

学　习　指　导

一、内容与要求

复变函数的积分，对解析函数性质的深入研究将起着重要的作用．例如解析函数的任意阶导数仍然是解析函数这一重要性质，就是借助积分工具而得到的，其中最重要的是 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式．这两个定理可以称为复变函数论的基础．

这一章的主要内容是：复变函数积分的定义、性质及其运算；Cauchy 定理及其推广；Cauchy 积分公式；解析函数的无穷可微性质；解析函数的最大模原理以及 Cauchy 不等式；Liouville 定理；Morera 定理；代数基本定理的证明．其中最重点的内容是 Cauchy 定理及其推广与 Cauchy 积分公式及其证明方法．

对于这一章的基本要求是：首先确切掌握好 Cauchy定理及其推广的条件与结论．书中§3·2的定理 3，是 Cauchy定理在复连通区域上的推广．它在以后的许多证明问题与积分计算中经常被应用．Morera 定理是 Cauchy 定理的逆定理．由这两个定理，可以

用积分观点给出解析函数的定义，这对解析函数本质的认识也是一个重要方面。因此应很好理解它。

其次是确切掌握 Cauchy 积分公式和 n 阶微分公式的条件及结论，以及它的证明思想和方法。理解定理的重要意义，熟练应用公式以计算有关闭路积分问题。

对于解析函数的最大模原理，要深刻理解它的意义，并能应用这一性质解决一些证明问题。

二、例 题

【例 1】 试证：

$$\left|\int_C \frac{z+1}{z-1}dz\right| \leqslant 8\pi.$$

其中C为圆周 $|z-1|=2$。

【证明】 由积分估模性质有

$$\left|\int_C \frac{z+1}{z-1}dz\right| \leqslant \int_C \left|\frac{z+1}{z-1}\right| |dz| = \int_C \frac{|(z-1)+2|}{2}|dz|$$

而

$$\int_C \frac{|(z-1)+2|}{2}|dz| \leqslant \int_C \frac{|z-1|+2}{2}|dz| = 2\int_C |dz|$$

$$= 8\pi.$$

【例 2】 试证下列积分的值都是 0 。

1) $\displaystyle\int_{|z|=1} ze^{2z}dz$，　　2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z+2}dz$，

3) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2+1}dz$，　　4) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}dz$。

【证明】

1）中的被积函数 ze^{2z}在Sz平面上解析，故由Cauchy 定理积分得0 。

2）中的被积函数$\frac{1}{z^2+2z+2}$在Sz 平面上的无意义点为 $z^2+2z+2=0$ 的根，即$z=-1\pm i$。它们都不在积分路上及其内部，故由 Cauchy定理其积分为零。

3）通过下面的计算即可得其结论。

根据§3·2中的定理 3：

$$\int_{|z|=3}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2+1}+\int_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2+1}\cdot$$

再由 Cauchy积分公式：

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}dz=2\pi i\frac{1}{i+i}=\pi.$$

$$\int_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}dz=2\pi i\frac{1}{-i-i}=-\pi.$$

故得

$$\int_{|z|=3}\frac{dz}{z^2+1}=\pi+(-\pi)=0.$$

4）通过下面计算，即可得其结论。

根据n阶微商公式而有

$$\int_{|z-1|=1}\frac{e^z}{(z^2-1)^2}dz=\int_{|z-1|=1}\frac{\frac{e^z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^z}{(z+1)^2}\right)'\Bigg|_{z=1}$$

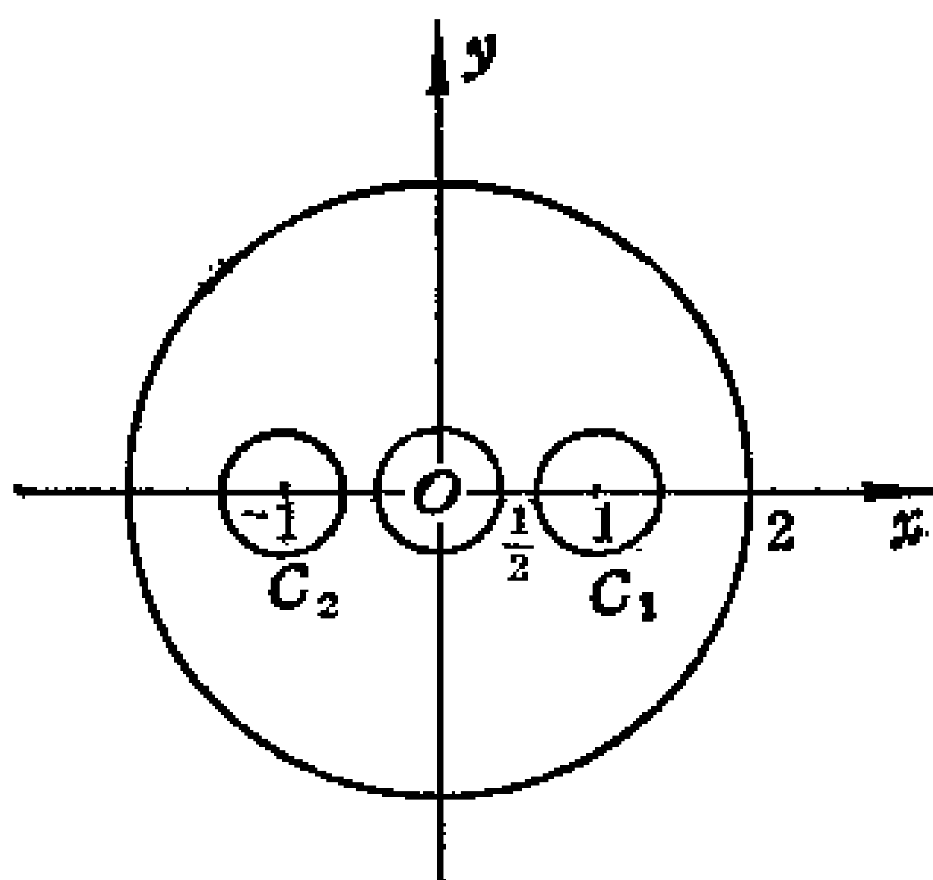
$$=2\pi i\frac{e^z(z-1)}{(z+1)^3}\Bigg|_{z=1}=0.$$

【例 3】试计算积分：

$$\int_C \frac{1}{z^2(z^2-1)}dz.$$

其中 C为环域$\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2$的边界（图3·1）．

【解】由于C为环域$\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2$的边界，$C=|z|=2\cup|z|=\frac{1}{2}$．故得知积分：



指导图 3·1

$$\int_C \frac{dz}{z^2(z^2-1)}$$

$$=\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2(z^2-1)}-\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2(z^2-1)} \qquad (1)$$

依复连通区域的积分，分别以$(-1,0)$，$(1,\ 0)$为中心，$\frac{1}{4}$为半径作圆 C_2，C_1；并作$|z|=\frac{1}{2}$．则（1）中第一个积分为

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2(z^2-1)}=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{z^2(z+1)}}{z-1}dz$$

$$+\int_{C_2}\frac{\frac{1}{z^2(z-1)}}{z+1}dz+\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2(z^2-1)}$$

$$=2\pi i\frac{1}{2}+2\pi i\frac{1}{-2}+\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2(z^2-1)}$$

$$=\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2(z-1)}$$

代入（1）式

故所求的积分为：

$$\int_C \frac{dz}{z^2(z^2-1)} = 0.$$

【例 4】设C是不通过 z_0 的简单闭曲线，试求：

$$g(z_0) = \int_C \frac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3}\, dz$$

的值。

【解】当 $z_0 \in \text{ext}(C)$ 时，根据 Cauchy 定理得$g(z_0)=0$。这是因为被积分函数在 $\text{int}(C)$为解析。

当 $z_0 \in \text{int}(C)$时，根据 n阶微商公式得

$$g(z_0) = \frac{2\pi i}{2!}(z^4+z^2)''\Big|_{z=z_0} = \pi i(12z_0^2+2)$$

$$= 2(6z_0^2+1)\pi i.$$

【例 5】试证：如果 $f(z)$ 在 $|z|<\infty$ 内解析，且有$\text{Re}[f(z)]<M$的实数M存在，则 $f(z)$ 为常数。

【证明】令 $F(z)=e^{f(z)}$，则 $F(z)$ 在 Sz 平面上解析。又$|F(z)|=e^{\text{Re}(f(z))}<e^M$函数为有界。由 Liouville定理可见 $F(z)$ 是常数。因此 $f(z)$ 也是常数。

【例 6】问 $|e^z|$ 在 $|z-z_0|\leqslant 1$ 的何处达到最大？并求此最大值。

【解】因为 e^z 是 z 平面上的解析函数，所以根据最大模原理可知 $|e^z|$ 在 $|z-z_0|\leqslant 1$ 的最大值，只能在其边界 $|z-z_0|=1$ 上达到。设 $z=z_0+e^{i\theta}$，则

$$|e^z| = |e^{z_0+e^{i\theta}}| = e^{\text{Re}z_0+\cos\theta}$$

故当 $\theta=0$ 时，即在点 $z=z_0+1$ 上函数取最大值为 $e^{\text{Re}z_0+1}$。

【例 7】设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及其内部解析，在 C 上 $|f(z)|=M(>0)$，M为常数，试证只要 $f(z)$ 不是常数，则 $f(z)$ 在 $\text{int}(C)$ 内必取 0 值。

【证明】应用反证法。假设 $f(z)$在C内取不到 0 值，令$g(z)=$

$\frac{1}{f(z)}$. 则 $g(z)$ 在C上及C内部亦解析，再由最大模原理得 $|g(z)|$ 的最大值在 C上达到。即在$\overline{G}$上有

$$|g(z)|=\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1}{M}.$$

从而得

$$|f(z)|\geqslant M;$$

但由题设，在$\overline{G}$上 $|f(z)|\leqslant M$。故得 $f(z)=M$（常数）这与题设 $f(z)$ 不是常数相矛盾。由此得到结论是正确的。

【例 8】设 $f(z)$ 是整函数，n 为正整数，试证当

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^n}=0$$

时，$f(z)$ 至多是 $n-1$ 次多项式。

【证明】只须证得对任何的 z，$f^{(n)}(z)=0$ 即可。

从 $$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^n}=0$$

可知，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在$R>0$，当 $|z|>R$时，总有 $|f(z)|<\varepsilon|z|^n$ 成立。

在S_z平面上任取一点 z。再取以 z 为中心，以 r 为半径的圆周C，使 $\{z:|z|=R\}\subset\text{int}(C)$，这时对于 $\zeta\in C$，$|f(\zeta)|<\varepsilon|\zeta|^n\leqslant\varepsilon(|z|+r)^n$，由 Cauchy 不等式可得：

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{n!}{r^n}\varepsilon(|z|+r)^n$$

$$=n!\,\varepsilon\left(1+\frac{|z|}{r}\right)^n\leqslant n!\,2^n\varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以

$$f^{(n)}(z)=0.$$

故 $f(z)$ 至多是 $(n-1)$ 次多项式。

三、习题解答

习　题(3·1)

1. 【解】

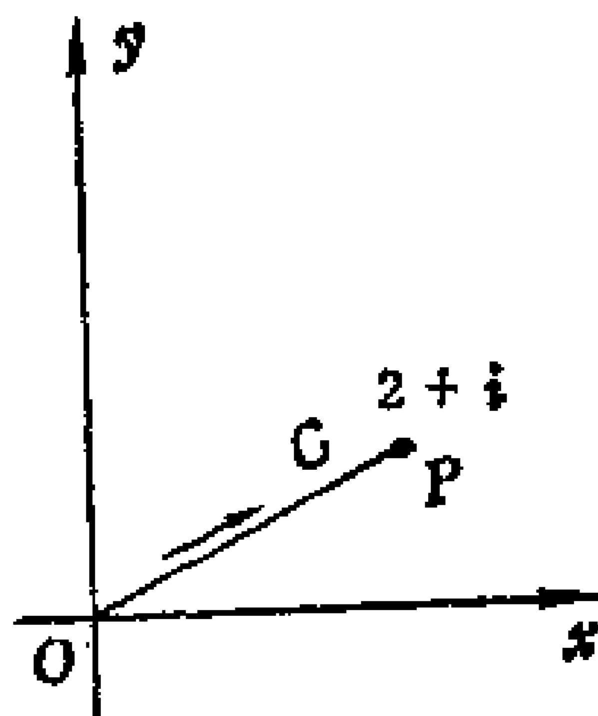
1）如指导图3·2，C为直线段OP，其方程为

$$C:\ z=(2+i)t,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

$$dz=(2+i)dt,\ I_m z=t.$$

$$\therefore\quad \int_C I_m z\,dz=\int_0^1 t(2+i)\,dt$$

$$=(2+i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=1+\frac{i}{2}.$$



指导图 3·2

2）如指导图3·3

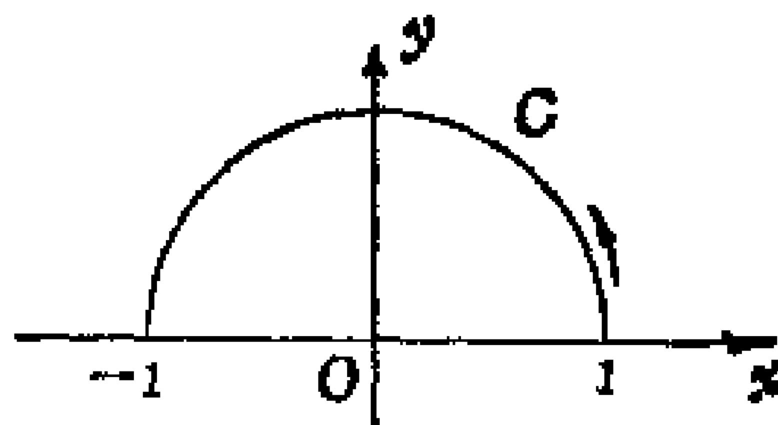
C为半圆周$|z|=1$，$0\leqslant \arg z\leqslant \pi$，其方程为

$$C:\ z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

$$dz=(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta,$$

$$I_m z=\sin\theta.$$



指导图 3·3

$$\therefore\quad \int_C I_m z\,dz=\int_0^\pi \sin\theta(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^\pi -\sin^2\theta d\theta+i\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}[\theta]\Big|_0^\pi+\frac{1}{4}(\sin 2\theta]\Big|_0^\pi+\frac{i}{4}[-\cos 2\theta]\Big|_0^\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

3）设C为圆周 C：$|z-a|=R$，
其方程为

$$C：z=a+Re^{i\theta}，\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$
$$dz=iRe^{i\theta}d\theta.$$

设 $a=A+Bi$

$$I_m z=B+R\sin\theta$$

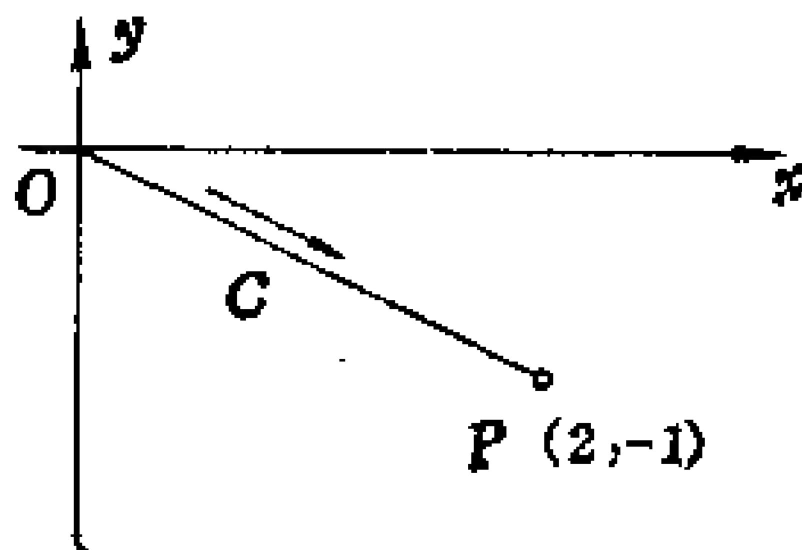
$$\therefore \int_C I_m z dz=\int_0^{2\pi}(B+R\sin\theta)iRe^{i\theta}d\theta$$

$$=iRB\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\theta+iR^2\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\ e^{i\theta}d\theta$$

$$=RB\left[e^{i\theta}\right]\Big|_0^{2\pi}+iR^2\frac{1}{2i}\left[\int_0^{2\pi}e^{2i\theta}d\theta-\int_0^{2\pi}d\theta\right]$$

$$=-\pi R^2.$$

2．【解】



指导图 3·4

1）如指导图3·4 C为线段OP，其方程为

$$C：z=(2-i)t，\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$
$$dz=(2-i)dt.$$
$$|z|=|2-i||t|=\sqrt{5}t.$$

$$\therefore \int_C |z|dz=\int_0^1\sqrt{5}t(2-i)dt$$

$$=\sqrt{5}(2-i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\sqrt{5}\left(1-\frac{i}{2}\right).$$

2）C为线段〔-1，1〕

$$\therefore \int_C |z|dz=\int_{-1}^0|x|dx+\int_0^1|x|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x)\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}=1$$

3）如指导图3·5 C为右半圆周，其方程为

$$C: \quad z=e^{i\theta},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

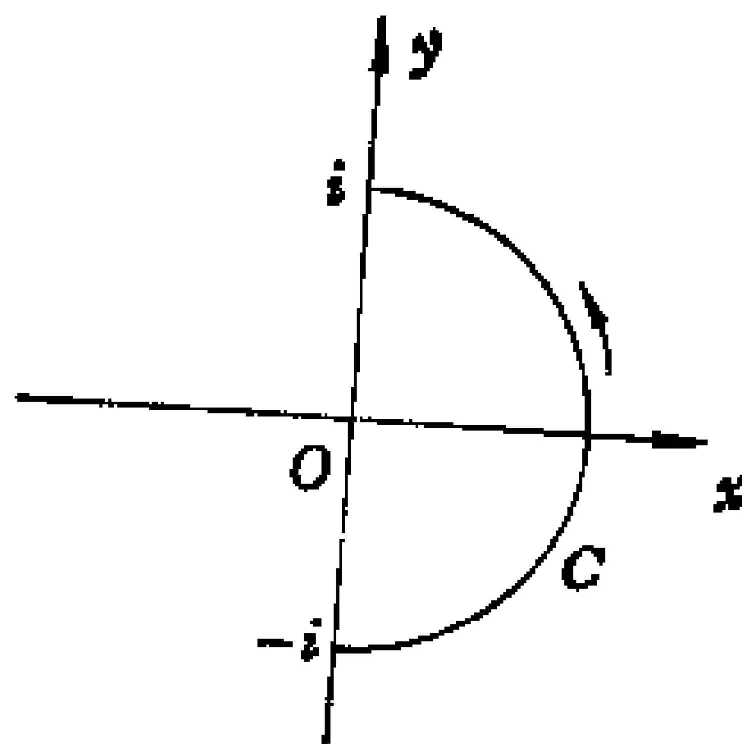
$$dz=ie^{i\theta}d\theta.$$

$$|z|=1$$

$$\therefore\quad \int_C|z|\,dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(i\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=2i.$$



指导图 3·5

4）C为圆周，C：$|z|=R$，其方程为

$$C: \quad z=\mathrm{R}e^{i\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

$$dz=iRe^{i\theta}d\theta,$$

$$|z|=R.$$

$$\therefore\quad \int_C|z|\,dz=\int_0^{2\pi}Ri\mathrm{R}e^{i\theta}d\theta=iR^2\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\theta$$

$$=iR^2\int_0^{2\pi}(\cos\theta+i\sin\theta)\,d\theta=0.$$

3．【解】

设C 的方程为

$$C: \quad z=e^{i\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta,\quad |dz|=|d\theta|.$$

$$z-1=e^{i\theta}-1=(\cos\theta-1)+i\sin\theta$$

$$|z-1|=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

$$\therefore\quad \int_C |z-1|\,|dz|=\int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\,|d\theta|$$

$$=\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=4\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=8.$$

4.【解】

（1）如指导图3·6

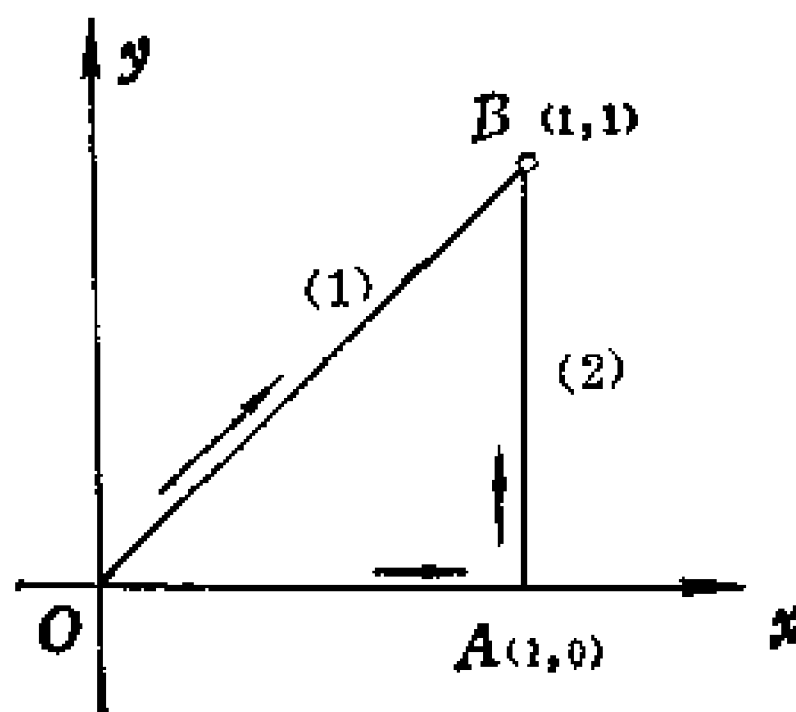
C： $z=(1+i)t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

$dz=(1+i)dt.$

$\bar{z}=(1-i)t$

$$\therefore\quad \int_C \bar{z}dz=\int_0^1 (1-i)t(1+i)dt=\int_0^1 2tdt$$

$$=t^2\Big|_0^1=1$$



指导图 3·6

（2）如指导图3·6

C： $OA+AB$

OA： $z=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

$dz=dt$

$\bar{z}=t.$

AB： $z=1+it,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

$dz=idt$

$\bar{z}=1-it.$

$$\therefore\quad \int_C \bar{z}dz=\int_0^1 tdt+\int_0^1 (1-it)idt$$

$$=\int_0^1 2tdt+\int_0^1 idt=t^2\Big|_0^1+it\Big|_0^1$$

$$=1+i.$$

5. 【解】

（1）如指导图3·6，C为OB直线段

C：$z=(1+i)t$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

$dz=(1+i)dt$.

$$\therefore\quad \int_C zdz=\int_0^1(1+i)t(1+i)dt=(1+i)^2\frac{t^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(2i)=i.$$

（2）如指导图3·6，C为OAB折线段

OA：$z=t$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

AB：$z=1+it$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

$$\therefore\quad \int_C zdz=\int_0^1 t\,dt+\int_0^1(1+it)idt$$

$$=i\int_0^1 dt=i.$$

6. 【证明】

设C的方程为

C：$z-a=\rho e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

$dz=i\rho e^{i\theta}d\theta$.

当 $n\neq 1$ 的整数时

$$\int_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho^n e^{in\theta}}\,d\theta$$

$$=\frac{i}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}d\theta$$

$$=\frac{i}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi}[\cos(1-n)\theta+i\sin(1-n)\theta]d\theta=0.$$

当 $n=1$ 时，即为§3·1中例 3 .

习　题（3·2）

1．【答】

1） 0 ．满足Cauchy 定理的条件。

2） 0　满足Cauchy 定理的条件。

3） 0 ．满足Cauchy 定理的条件。

4） $2\pi i$　根据§3·2例 7

5） 0　满足Cauchy 定理的条件。

6） 0　满足§3·2定理 3 的条件。

2．【解】

1） $$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-z}=\int_{|z|=2}\frac{dz}{z(z-1)}$$

$$=\int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz=2\pi i-2\pi i=0.$$

2） $$\int_{|z|=2}\frac{3z-1}{z(z-1)}dz=\int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1}\right)dz$$

$$=2\pi i+4\pi i=6\pi i.$$

3） $$\int_{|z|=2}\frac{2z+3}{z(z+3)}dz=\int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+3}\right)dz$$

$$=2\pi i.$$

习　题（3·3）

1．【解】

1） $$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi ie^0=2\pi i.$$

2）如图3·7

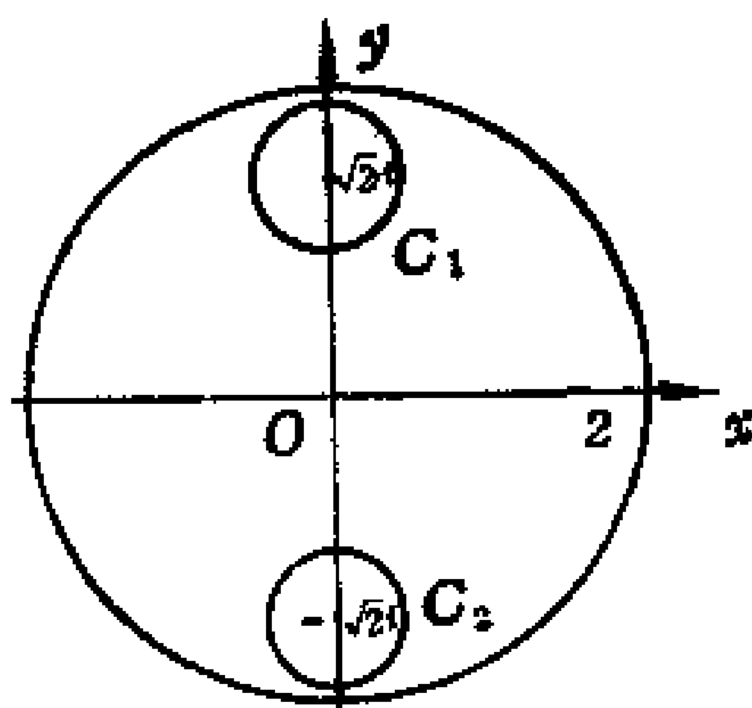
$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2+2}dz=\int_{|z|=2}\frac{1}{(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}i)}dz$$

$$=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{z+\sqrt{2}i}}{z-\sqrt{2}i}dz$$

$$+\int_{C_2}\frac{\frac{1}{z-\sqrt{2}i}}{z+\sqrt{2}i}dz$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}i}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{-2\sqrt{2}i}\right)=0。$$



指导图　3·7

3）$$\int_{|z+1|=1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz=\int_{|z+1|=1}\frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}}{z+1}dz$$

$$=2\pi i\left.\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right|_{z=-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i。$$

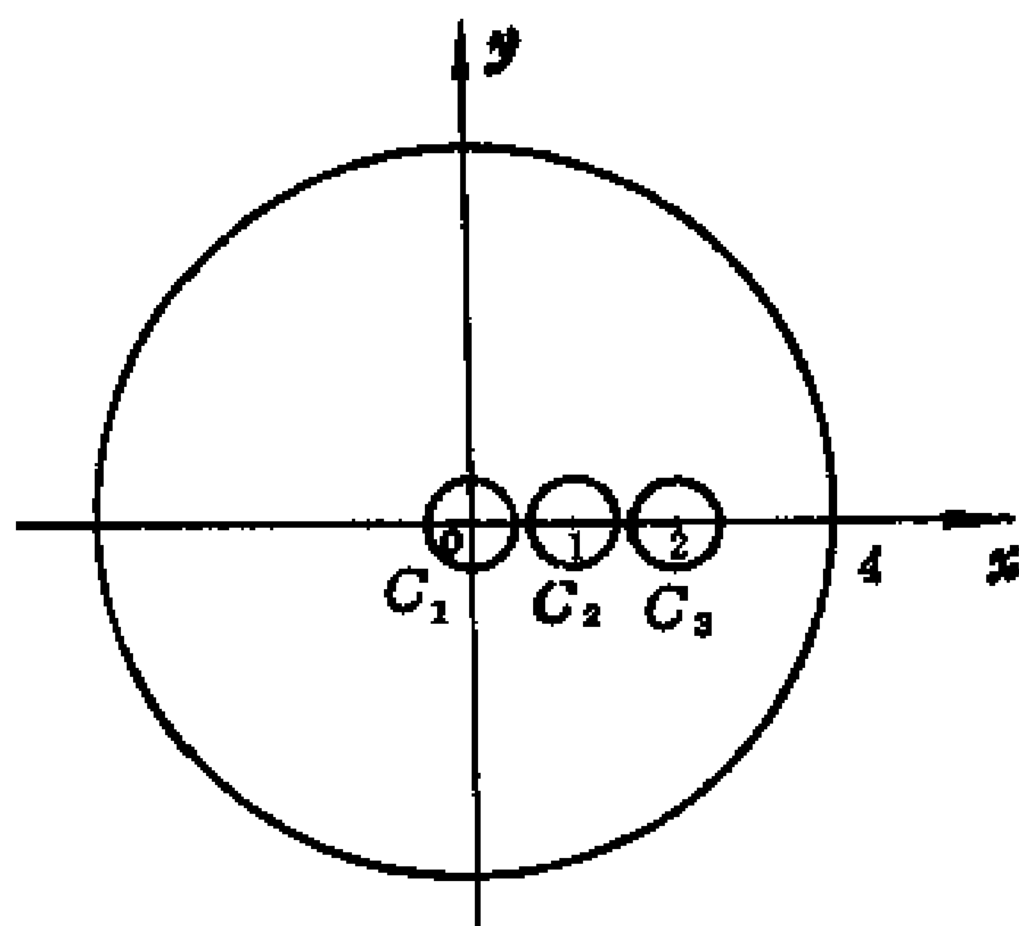
4）如图3·8

$$\int_{|z|=4}\frac{1}{z^3-3z^2+2z}dz=\int_{|z|=4}\frac{1}{z(z-1)(z-2)}dz$$

$$=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{(z-1)(z-2)}}{z}dz+\int_{C_2}\frac{\frac{1}{z(z-2)}}{z-1}dz$$

$$+\int_{C_3}\frac{\frac{1}{z(z-1)}}{z-2}dz=2\pi i\left(\left.\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right|_{z=0}\right.$$

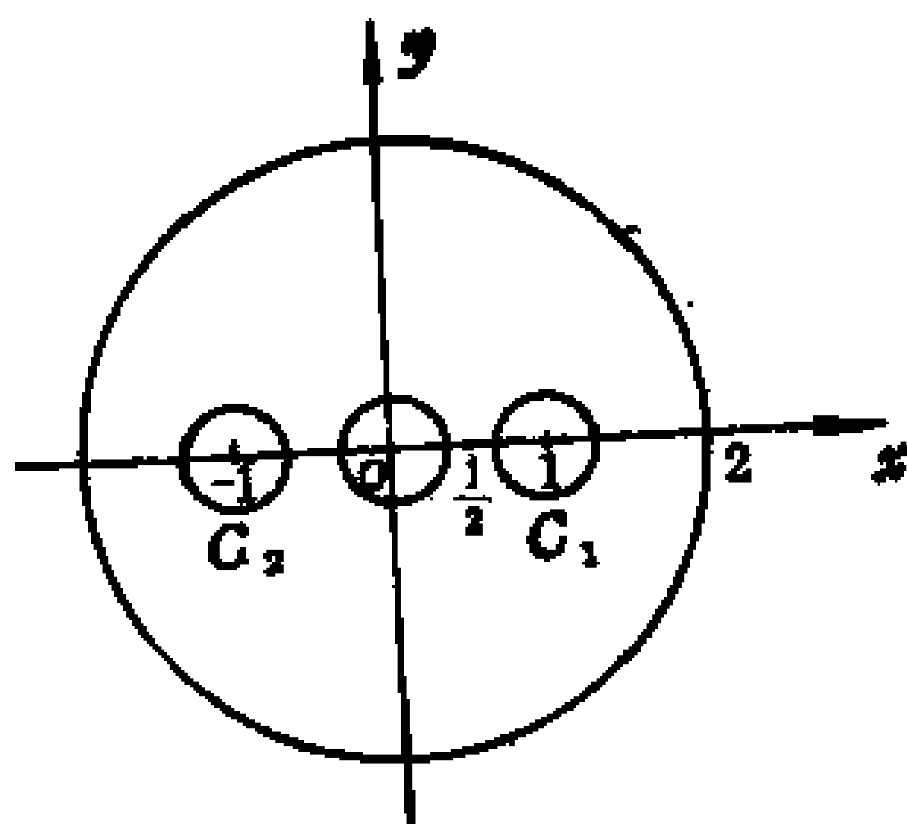
$$\left.+\left.\frac{1}{z(z-2)}\right|_{z=1}+\left.\frac{1}{z(z-1)}\right|_{z=2}\right)$$



指导图　3·8

$$=2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{2}\right)=0。$$

5）如图3·9



指导图　3·9

$$\int_C \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,dz$$

$$=\int_{C_1}\frac{\frac{e^z}{z(z+1)}}{z-1}dz+\int_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z(z-1)}}{z+1}\,dz$$

$$=2\pi i\frac{e^z}{z(z+1)}\Bigg|_{z=1}+2\pi i\frac{e^z}{z(z-1)}\Bigg|_{z=-1}=e\pi i+e^{-1}\pi i=(e+e^{-1})\pi i。$$

2．【解】

根据 Cauchy积分公式可得

$$f(i)=2\pi ie^{\frac{\pi}{3}i}=\pi(-\sqrt{3}+i)$$

$$f(-i)=2\pi i e^{-\frac{\pi}{3}i}=\pi(\sqrt{3}+i)。$$

当 $|z|>2$时， $f(z)=0$

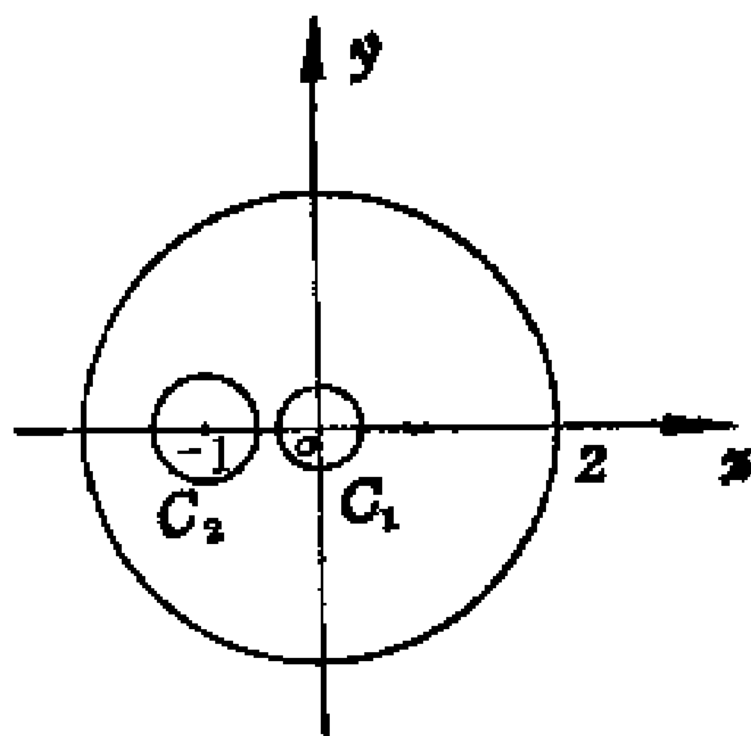
习 题 (3·4)

1． 【解】

应用 n 阶微商公式得

1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

2) 如图3·10



指导图 3·10

$$\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z+1)^3}dz$$

$$=\int_{C_1}\frac{\frac{e^z}{(z+1)^3}}{z}dz$$

$$+\int_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z}}{(z+1)^3}dz$$

$$=2\pi i\frac{e^z}{(z+1)^3}\Big|_{z=0}+\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\Big|_{z=-1}$$

$$=(2-5e^{-1})\pi i$$

3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{2z^2-z-1}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}(2z^2-z-1)'\Big|_{z=1}$

$=6\pi i$。

2． 【证明】

应用 Cauchy不等式即可得到

$$|f'(0)|\leqslant\frac{1}{1}=1。$$

3． 【证明】

我们应用反证法．假设满足 $|z|>R$，且$|f(z)|>M$的z不存在，

则必存在某正数 R, M, 对于任何的 z, 当 $|z|>R$时, $|f(z)|\leqslant M$. 又由 $f(z)$ 的连续性, 当 $|z|\leqslant R$时, $|f(z)|$必有最大值, 设其为 M_1, 令 $M_0=\max(M, M_1)$, 则在 $|z|<\infty$时, $|f(z)|\leqslant M_0$, 于是得到 $f(z)$ 在全平面上是有界的. 故由Liouville定理得到 $f(z)$ 为常数. 这与条件矛盾.

4. 【答】

不一定. 例如, 函数$\frac{1}{z}$在区域内 $0<|z|<2$内解析, 而积分

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=2\pi i\neq 0.$$

当G是单连通区域时, 根据哥西定理, 解析函数沿G内任意闭路积分为零.

5. 【答】

根据 Cauchy定理, 曲线C内部不包含方程 $z^2+z+1=0$ 的两个根 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 中的任一个; 或者方程的两个根都在 C 的内部时, 积分为零.

6. 【证明】

由于

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

又解析函数的导函数仍为解析函数. 然后应用积分性质及牛顿——莱布尼兹公式, 即得

$$\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)dz=\Big[f(z)g(z)\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta g(z)f'(z)dz.$$

7. 【解】

1) 根据Cauchy 积分公式

$$f(1)=2\pi i(3\zeta^2-2\zeta+1)|_{\zeta=1}=4\pi i.$$

2) 当$|z|>2$ 时, 根据 Cauchy定理 $f(z)=0$,

当$|z|<2$ 时, 根据 Cauchy 积分公式

$$f(z)=2\pi i(3z^2-2z+1).$$

8. **【解】**

由于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[\frac{2f(z)}{z}\pm\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{2f(z)}{z}dz\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}dz$$

$$=2f(z)\big|_{z=0}\pm[(z^2+1)f(z)]'\big|_{z=0}$$

$$=2f(0)\pm f'(0)=2\pm f'(0).$$

令 $z=e^{i\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta.$$

代入（1）式得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left[2\pm\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)\right]f(e^{i\theta})\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}[2\pm 2\cos\theta]f(e^{i\theta})id\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[2(1\pm\cos\theta)]f(e^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1\pm\cos\theta)f(e^{i\theta})d\theta=2\pm f'(0)$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)f(e^{i\theta})d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta \\ \qquad = 2+f'(0) \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)f(e^{i\theta})d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta \\ \qquad = 2-f'(0) \end{cases}$$

9．【证明】

因函数 $\dfrac{1}{z+2}$ 在闭圆域 $|z|\leqslant 1$ 上解析，由 Cauchy定理可得

$$\int_C \frac{dz}{z+2} = 0$$

令 $z=e^{i\theta}$，$(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$。

则上边的积分可变为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}+2} = -2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta + i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta.$$

由于积分值为0，又 $\cos\theta$ 是偶函数，因此（1）式成立。

10．【证明】

由于 $f(z)$ 解析，又由 $|f(z)-1|<1$ 可知 $f(z)$ 在 r 上及 r 内部不为零，因此 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 r 上及 r 内部解析，根据Cauchy 定理可得积分为0。

11．【证明】

取圆周：$|z|=\rho<1$，

由于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，故知 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant\rho$ 上解析，且有

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}=\frac{1}{1-\rho}.$$

由Cauchy不等式，知

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!\,M(\rho)}{\rho^n} = \frac{n!}{\rho^n(1-\rho)}.$$

对于 ρ，在(0, 1)的区间上，当 $\rho = \frac{n}{n+1}$ 时，$\rho^n(1-\rho)$ 取最大值

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

于是得$\frac{n!}{\rho^n(1-\rho)}$的最小值为：

$$\frac{(n+1)!}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$

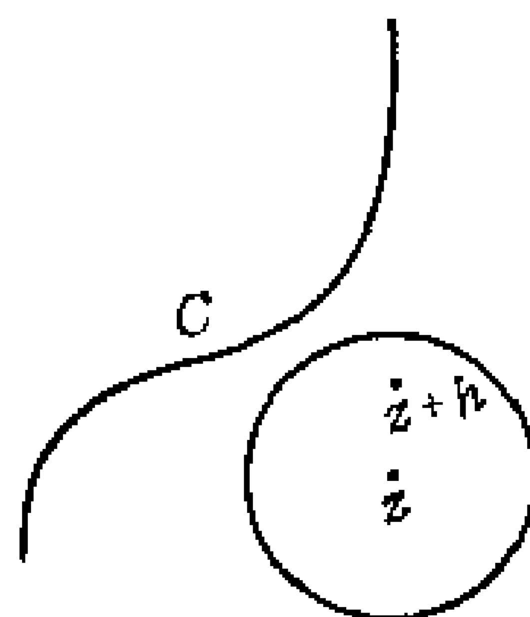
故得 $|f^{n}(0)|$ 的估值为 $|f^{(n)}(0)| \leqslant (n+1)!\,e$。

12．【证明】

我们应用数学归纳法证明。

（1）当 $n=1$ 时有

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta$$



指导图3·11

设 z 是G内任意取定的一点（图3·11）以 z 为中心，作邻域 $B(z,\rho)\subset G$，取 $z+h\in B$，依导数定义就是要证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.$$

即证差的绝对值

$$I = \left|\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|$$

可以任意小。

由题设 $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$

$$\Phi(z+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-(z+h)}\,d\zeta.$$

因而，
$$I=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{h\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right| \tag{1}$$

由于 $\varphi(\zeta)$ 在C上的连续性，必存在常数 $M>0$，当$\zeta\in C$时，恒有 $|\varphi(\zeta)|<M$。用$2d\,(d>0)$表示曲线C到点 z的距离。于是$\zeta\in C$，只要 $|h|<d$，就有 $|\zeta-z|>d$，$|\zeta-z-h|>d$。
由此

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{h\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)\,(\zeta-z)^2}\right|\leqslant\frac{|h|}{2\pi}\,\frac{Ml}{d^3} \tag{2}$$

其中 l 为曲线C的长度。

从而（2）式的右端随 $h\to 0$ 而趋于零，于是（1）式右边的积分也随 h而趋于零，故当 $n=1$ 时，结论成立，$\Phi(z)$ 在G内解析。

（2）假设 $n=k$ 时有

$$\Phi^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta.$$

现在证明 $n=k+1$ 时，也应有

$$\Phi^{(k+1)}(z)=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\,d\zeta.$$

也就是要证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi^{(k)}(z+h)-\Phi^{(k)}(z)}{h}=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\,d\zeta.$$

因为 $\Phi^{(k)}(z+h)-\Phi^{(k)}(z)=$

$$= \frac{k}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta-z-h)^{k+1}} - \frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right] d\zeta$$

$$= \frac{k!}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\cdot h\frac{1}{(\zeta-z-h)^{k+1}(\zeta-z)^{k+1}}[(\zeta-z)^k$$

$$+ (\zeta-z)^{k-1}(\zeta-z-h) + \cdots + (\zeta-z-h)^k]d\zeta$$

所以 $$\left|\frac{\Phi^{(k)}(z+h)-\Phi^{(k)}(z)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta\right|$$

$$= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\left\{\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}(\zeta-z-h)^{k+1}}[(\zeta-z)^k\right.\right.$$

$$+ (\zeta-z)^{k-1}(\zeta-z-h) + \cdots + (\zeta-z-h)^k]$$

$$\left.\left. - \frac{k+1}{(\zeta-z)^{k+2}}\right\}d\zeta\right|$$

$$= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\frac{1}{(\zeta-z)^{k+2}(\zeta-z-h)^{k+1}}[(\zeta-z)^{k+1}\right.$$

$$+ (\zeta-z)^k(\zeta-z-h) + \cdots + (\zeta-z)(\zeta-z-h)^k$$

$$\left. - (k+1)(\zeta-z-h)^{k+1}]\ d\zeta\right| \tag{3}$$

估计（3）式右端中被积函数的值．首先和 $n=1$ 时一样，当$\zeta\in C$ 时有$|\varphi(\zeta)|<M$，$|\zeta-z|>d$，$|\zeta-z-h|>d$．其次，以原点为中心作一个包含积分路C及点z、$z+h$ 的圆域 $|z|\leqslant R$，则必有 $|\zeta-z|\leqslant 2R$，$|\zeta-z-h|\leqslant 2R$．

再把上式分子中的$-(k+1)(\zeta-z-h)^{k+1}$拆成 $k+1$ 个 $-(\zeta-z-h)^{k+1}$，合到前面的 $k+1$ 项上去，从而估计分子的值．

$|[(\zeta-z)^{k+1}-(\zeta-z-h)^{k+1}] + [(\zeta-z)^k(\zeta-z-h)-(\zeta-z-h)^{k+1}] + \cdots + [(\zeta-z)(\zeta-z-h)^k-(\zeta-z-h)^{k+1}]| = |h|\,|[(\zeta-z)^k+(\zeta-z)^{k-1}(\zeta-z-h)+\cdots+(\zeta-z-h)^k] + (\zeta-z-h)[(\zeta-z)^{k-1}+(\zeta-z)^{k-2}(\zeta-z-h)+\cdots+(\zeta-z-h)^{k-1}] + \cdots + (\zeta-z-h)^k| \leqslant |h|[(k+1)+k+\cdots+1](2R)^k = |h|\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}(2R)^k.$

因此，（3）式右端中被积函数的绝对值不超过

$$M\,|h|\,\frac{(k+1)(k+2)(2R)^k}{2d^{2k+3}}.$$

从而（3）式右端不超过

$$\frac{k!}{2\pi}\cdot M\,|h|\,l\,\frac{(k+1)(k+2)(2R)^k}{2d^{2k+3}}.$$

显然它随 $h\to 0$ 而趋于零，从而得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi^{(k)}(z+h)-\Phi^{(k)}(z)}{h}=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta.$$

这就是所要证明的。因此有

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\qquad(n=1,2,\cdots)$$

成立。

13. 【证明】

利用 $\displaystyle\int_{K_r}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$

得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}f(z)dz-A=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\left[f(z)-\frac{A}{z-z_0}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\left[\frac{zf(z)-A-z_0f(z)}{z-z_0}\right]dz.$$

由 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}zf(z)=A$ 得 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}f(z)=0$.

从而得

$$\lim_{z\to\infty}[zf(z)-A-z_0f(z)]=0.$$

因此，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $R>r_0+|z_0|$（指导图3·12），使当 $|z|>R$ 时有

$$|zf(z)-A-z_0f(z)|<\varepsilon.$$

于是，当 $r'>|z_0|+R$，即当 $r'>r_0+2|z_0|$ 时有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{r'}} f(z)dz - A\right|$$

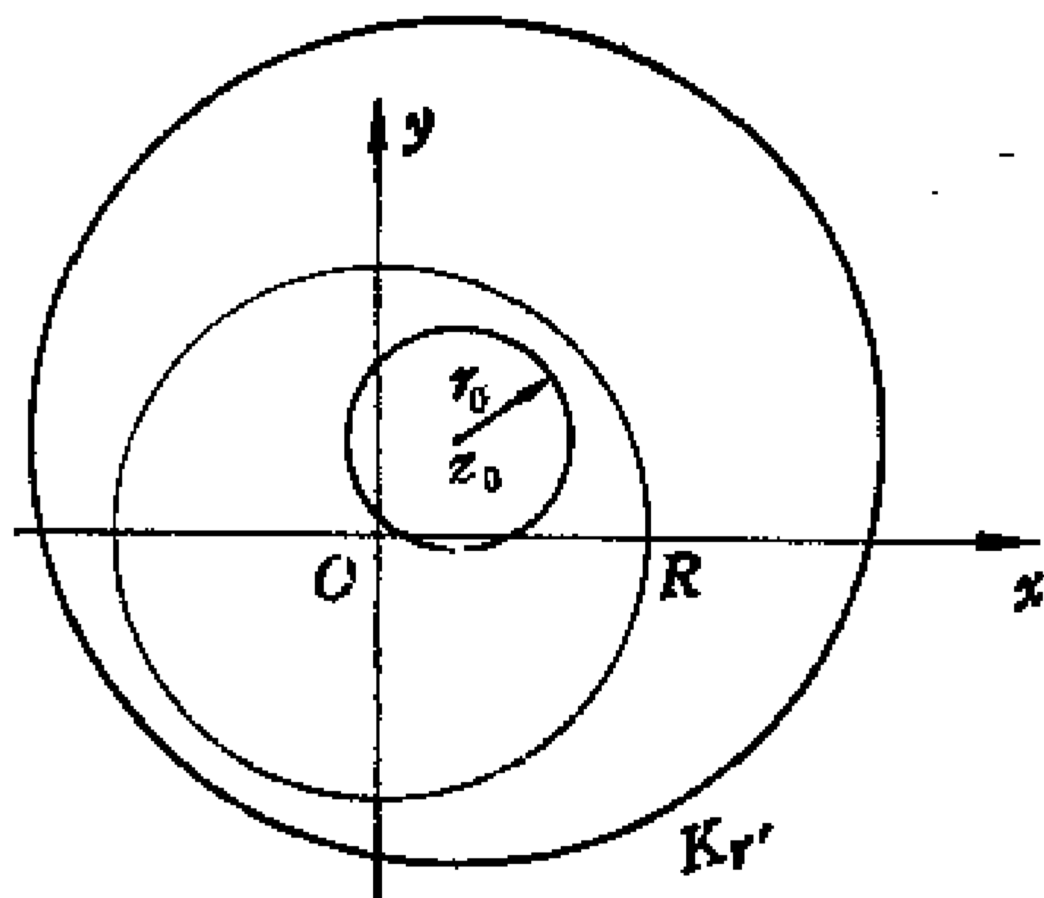
$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{r'}}\left[\frac{zf(z)-A-z_0 f(z)}{z-z_0}\right]dz\right|$$

$$<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r'}\cdot 2\pi r' = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{r'\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{r'}} f(z)dz = A$.

任意取定 r，使 $r>r_0$，则按复连通区域的 Cauchy 积分定理应有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{r'}} f(z)dz.$$



指导图3·12

令 $r'\to\infty$，两边取极限得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} f(z)dz = \lim_{r'\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{r'}} f(z)dz = A.$$

14. 【证明】

对于任意取定的点 $z\in G$（图3·13），取充分大的正数 R_0，作圆周 K_{R_0}: $|z|=R_0$，包含曲线 C 及点 z. 则依假设条件知 $f(z)$ 在 C 与 K_{R_0} 所围的复连通区域 G' 内及边界上解析. 根据Cauchy 积分公式得

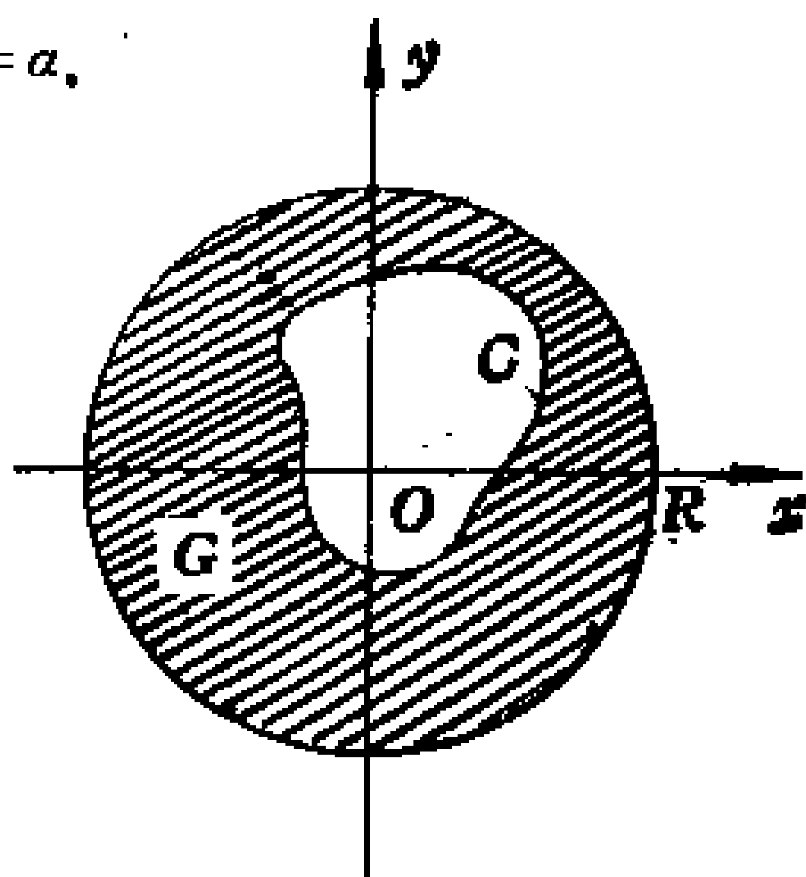
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = -f(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad (1)$$

设 $F(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$，则 $F(\zeta)$ 在 $|\zeta|\geqslant R_0$ 上解析.

又 $\because$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=a$

$\therefore$ $\lim\limits_{\zeta\to\infty} \zeta F(\zeta)=\lim\limits_{\zeta\to\infty}\dfrac{f(\zeta)}{1-\dfrac{z}{\zeta}}=a$,



指导图 3·13

故根据13题证得的结果，对任何 $R\geqslant R_0$，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_R} F(\zeta)\,d\zeta=a,$$

其中 K_R: $|z|=R$。

再由Cauchy 定理有

$$\int_{K_{R0}} F(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\int_{K_R} F(\zeta)\,d\zeta.$$

由此由（1）式得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=-f(z)+a$$

又若 $z\in\text{int}(C)$ 则 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在 $\overline{G'}$ 上解析，从而根据复连通区域的 Cauchy 定理，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=a \tag{2}$$

由（1）及（2）即得所求结果。

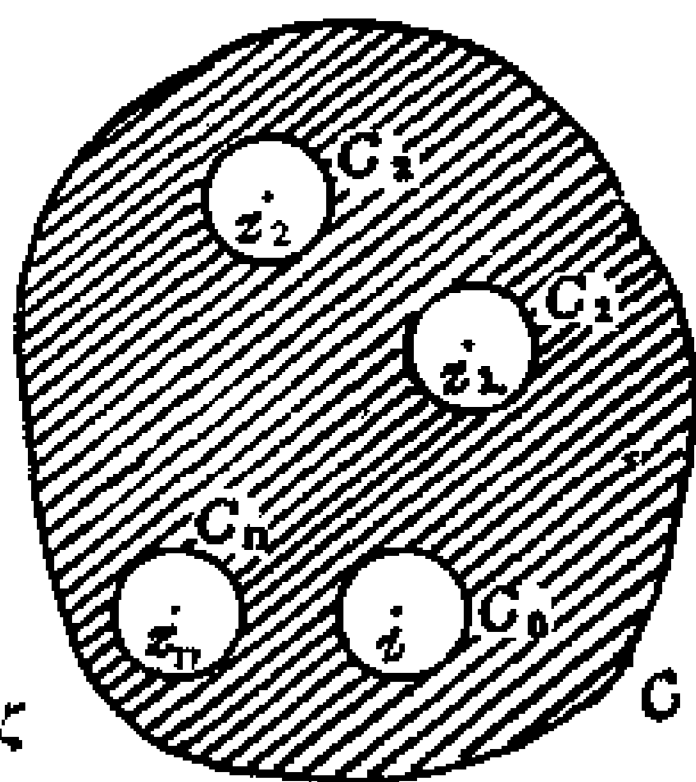
15. 【证明】

在G内挖去以点 z, z_1, z_2, …, z_n为中心的圆周 C_0, C_1, C_2, …, C_n 所围成的圆域，余下的构成一复连通区域。如（指导图3·14）.

由 Cauchy定理有，

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\dfrac{f(\zeta)}{w_n(\zeta)}[w_n(\zeta)-w_n(z)]}{\zeta-z}d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\dfrac{f(\zeta)[w_n(\zeta)-w_n(z)]}{(\zeta-z)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_n)}}{\zeta-z_1}\,d\zeta$$



指导图 3·14

$$+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\dfrac{f(\zeta)[w_n(\zeta)-w_n(z)]}{(\zeta-z)(\zeta-z_1)\cdots(\zeta-z_{n-1})}}{\zeta-z_n}\,d\zeta$$

$$=\frac{f(z)}{w_n(z)}[w_n(z)-w_n(z)]+\frac{f(z_1)[w_n(z_1)-w_n(z)]}{(z_1-z)(z_1-z_2)\cdots(z_1-z_n)}$$

$$+\cdots+\frac{f(z_n)[w_n(z_n)-w_n(z)]}{(z_n-z)(z_n-z_1)\cdots(z_n-z_{n-1})}$$

$$=\frac{f(z)}{w_n(z)}\cdot 0+\frac{f(z_1)[0-(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)]}{(z_1-z)(z_1-z_2)\cdots(z_1-z_n)}$$

$$+\cdots+\frac{f(z_n)[0+(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)]}{(z_n-z)(z_n-z_1)\cdots(z_n-z_{n-1})}$$

显然等式右端是每一项最高不超过 $n-1$ 次的多项式，且

$$F(z_i)=f(z_i)\qquad(i=1,2,\cdots n)$$

16. 【证明】

我们用反证法．假设函数 $f(z)$ 的值全含于某一圆周 $|w|=R$ 之外，即对任何 z，都是

$$|f(z)|>R,\ (R>0).$$

下面考虑函数

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}.$$

即可得到与 Liouville 定理矛盾。

17. 【证明】

由条件可知函数$\frac{1}{f(z)}$在Sz平面上解析且有界，即$\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leqslant 1$.

故由 Liouville 定理得$\frac{1}{f(z)}$必为常数，从而 $f(z)$为一常数。

18. 【证明】

设$F(z)=f(z)-g(z)$，对于 $F(z)$，在$\overline{G}$上利用最大模原理即可得所求。

19. 【证明】

由于 $f(z)$ 在$\overline{G}$上满足最大模原理的条件，所以有$|f(z)|\leqslant M$,

又由于函数 $f(z)$ 在$\overline{G}$上也满足最小模原理的条件，所以有$|f(z)|\geqslant M$。

从而得到在$\overline{G}$上恒有

$$|f(z)|=M.$$

$$f(z)=Me^{i\alpha},\ (\alpha,\ M\text{为常数}).$$

20. 【证明】

当 $0\leqslant r<1$ 时，考虑函数 $\log(1-z)$ 在 $|z|<1$ 内的一个解析分枝，设为主枝 $\log(1-z)$，显然 $u(z)=\mathrm{Re}[\log(1-z)]$ 在 $|z|<1$ 内调和，且有 $u(0)=\mathrm{Re}[\log 1]=0$。

在圆周 $|z|=r<1$ 上，有

$$u(re^{i\theta})=\mathrm{Re}[\log(1-z)]=\log|1-re^{i\theta}|$$

$$=\frac{1}{2}\log\ (1-2r\cos\theta+r^2).$$

应用调和函数的算术平均值公式，可得

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta.$$

即 $$0=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta$$

$$=\frac{2}{4\pi}\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta.$$

于是得到当 $0\leqslant r<1$ 时

$$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0.$$

当 $-1<r\leqslant 0$ 时，可考虑 $\log(1+z)$ 在 $|z|<1$ 内的一个解析分枝。$\log(1+z)$ 在 $|z|\leqslant r_1<1$ 上作类似于上述的讨论，即可证得

$$\int_0^{\pi}\log(1+2r_1\cos\theta+r_1^2)=0,\quad(0\leqslant r_1<1).$$

于是得到 当 $-1<r\leqslant 0$ 时

$$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\log[1+2(-r)\cos\theta+(-r)^2]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\log[1+2r_1\cos\theta+r_1^2]d\theta.\qquad(r_1=-r)$$

故由上述讨论可知

$$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0,\quad(-1<r<1)$$

21.【证明】

令 $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$，易得知函数 $u(x,y)$ 在 $\overline{G}$ 上连续，在 G 内调和，在边界点处 $u(x,y)=0$，根据§3·7定理1，$u(x,y)$ 在 $\overline{G}$ 上的最大值与最小值都在边界上取得，故对于 G 内的任一点 (x,y)，都有

$$0\leqslant u(x,y)\leqslant 0.$$

从而 $u(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in G.$

亦即 $u_1(x_1,y)\equiv u_2(x,y),\ (x,y)\in G.$

第四章　解析函数的级数展开式

§4·1　复数项级数

1. 复数项级数

和数学分析一样，一般地讲，设给定一个复数列：

$$\{\alpha_n\} = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots$$

则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots \tag{1}$$

为**复数项级数**．它的前 n 项之和为

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \text{（部分和）}.$$

若序列 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 以有限复数 S 为极限，则称级数（1）为**收敛**．S 为级数（1）的和，写成

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

否则，称级数（1）为**发散**．

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，称级数（1）为**绝对收敛**．如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 发散，而级数（1）收敛，则称级数（1）为**条件收敛**．

2. 复数项级数的性质

和实数项级数一样，根据复数项级数的收敛和发散性质，我们得出复数项级数的几个基本性质如下：

① 设有两个收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n + \cdots$$

分别收敛于α与β，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = (\alpha_1 \pm \beta_1) + (\alpha_2 \pm \beta_2) + \cdots + (\alpha_n \pm \beta_n) + \cdots$$

收敛于和$\alpha \pm \beta$。

② 在级数（1）的前面去掉或加上有限个项，不会影响级数的敛散性。

由级数的收敛定义，可以推出级数收敛的一个必要条件：

③ 当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛时，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$；反之，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$未必收敛，但如果$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n \neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$发散。

④ 设$\alpha_n = a_n + ib_n$，$S = a + ib$，由级数收敛的定义不难得出：

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛于$S$的充分必要条件是：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$分别收敛于$a$与$b$。

依此，我们便可将对复数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛性的讨论，转化为

对实数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛性的讨论。

关于实数项级数的一些结果也可以不加改变地推广到复数项级数中去。

⑤ （Cauchy 收敛原理）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 为收敛的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总可以找到一个正整数 N，使得当 $n>N$，$p=1,2,\cdots$时，有：

$$|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}|<\varepsilon$$

成立。

⑥ 值得注意的是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛只是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛的充分条件而不是必要条件。因为当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$为绝对收敛。但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$不一定收敛。

但是对于复数来说，由于

$$\sum_{n=1}^{m}|a_n| \text{ 及} \sum_{n=1}^{m}|b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{m}|\alpha_n| \leqslant \sum_{n=1}^{m}|a_n| + \sum_{n=1}^{m}|b_n|, \text{ 所以}$$

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为绝对收敛的充分必要条件是：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$为绝对收敛。

这就是说，要判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的绝对收敛性，只须判断实正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 的收敛性，或判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的绝对收敛性即可。

关于实数正项级数的收敛判别法，如比较判别法，比值判别法，根值判别法等，都可以用来判断复数项级数的绝对收敛性。

⑦ 和实数项级数一样，两个绝对收敛的复数项级数也可以作乘积如下：设

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\cdots$$

分别绝对收敛于α和β。可按下述对角线法

	α_1	α_2	α_3	α_4	$\cdots$
β_1	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_1$	$\alpha_3\beta_1$	$\alpha_4\beta_1$	$\cdots$
β_2	$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_3\beta_2$	$\alpha_4\beta_2$	$\cdots$
β_3	$\alpha_1\beta_3$	$\alpha_2\beta_3$	$\alpha_3\beta_3$	$\alpha_4\beta_3$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

得出乘积级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\alpha_1\beta_1+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1)+\cdots$$

并且收敛于$\alpha\cdot\beta$。

§4·2 函数项级数

1. 函数项级数概念

① 和函数

设给定一个复变函数序列：

$\{f_n(z)\}=f_1(z),\ f_2(z),\cdots,f_n(z),\cdots$

其中各函数都在复平面S_z的点集E上有定义，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \qquad (1)$$

称为在点集E上的复变函数项级数。

作级数（1）的前n项之和，

$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$。

称$S_n(z)$为复变函数项级数（1）的部分和。

对于点集E上每点z，若极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z)=f(z)$$

总存在，则称级数（1）在E上收敛，称函数$f(z)$为级数（1）的和函数，称点集E为它的收敛域，于是把它写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots=f(z).$$

否则，称级数（1）在点集E上发散。

我们可用“$\varepsilon—N$”叙述如下：

如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，以及给定的点集E上的任意一点z，总可以找到一个正整数$N=N(\varepsilon,z)$，使得当$n>N(\varepsilon,z)$时，有不等式

$$|S_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

成立，则称级数（1）在点集E上收敛于函数$f(z)$。称$f(z)$为级数（1）的和函数。

值得注意的是，一般说来，数N不仅依赖于ε，而且也依赖于$z\in E$，我们为了强调这种依赖关系，特将N写成$N(\varepsilon,z)$。有时对于点集E上的所有点z，$N(\varepsilon,z)$都不超过某一个正整数，我们把只依赖于ε的这个正整数，记为$N(\varepsilon)$。

② 一致收敛概念

所谓一致收敛，意即对于级数（1），如果在点集E上有一个函数$f(z)$，使得对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正整数$N=N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，对一切$z\in E$，不等式

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon,\quad z\in E$$

恒成立，其中$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}f_k(z)$。**我们称级数（1）在点集$E$上一致收敛于$f(z)$。**

由收敛与一致收敛这两个概念可知，和数学分析一样，在点集E上一致收敛的级数必在E上每一点都收敛；但在E上每一点都收敛的级数未必在点集E上一致收敛。

收敛是个局部概念，而一致收敛则是个整体概念。

【例1】 在单位圆域B：$|z|<1$内级数

$$z+(z^2-z)+\cdots+(z^n-z^{n-1})+\cdots$$

收敛于函数$f(z)\equiv 0$，但它不是一致收敛的，试证之。

【证明】 首先证明该级数在$B=\{z:|z|<1\}$内收敛于$f(z)\equiv 0$，即证明对任意给定的$\varepsilon>0$，如能找到一个正整数$N(\varepsilon,z)$，使得当$n>N(\varepsilon,z)$时，有

$$|S_n(z)-0|<\varepsilon$$

成立即可。关键是找$N=N(\varepsilon,z)$，为此，对任意给定的$\varepsilon>0$，令$|S_n(z)-0|<\varepsilon$，即

$$|S_n(z)|=|z+(z^2-z)+\cdots+(z^n-z^{n-1})|=|z^n|<\varepsilon\quad(1)$$

对任意给定的$\varepsilon>0$，当$z=0$时，我们可以由（1）任意取一个正整数N，当$n>N$时，总有

$$|z^n|<\varepsilon$$

成立，即这个N可以任意取，只要合于条件。

当$z\neq 0$时，在B：$|z|<1$内，由$|z^n|<\varepsilon$及两边取对数，有：

$$n\log|z|<\log\varepsilon,$$

$$n>\frac{\log\varepsilon}{\log|z|},\quad(|z|<1).$$

于是取 $N(\varepsilon, z)=\left[\frac{\log \varepsilon}{\log |z|}\right]$，这时对给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon, z)=\left[\frac{\log \varepsilon}{\log |z|}\right]$，当 $n>N(\varepsilon, z)$ 时，有：

$$|z^n|<\varepsilon$$

成立。

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n-z^{n-1})$ 在 B: $|z|<1$ 内每一点都收敛于函数 $f(z) \equiv 0$

其次，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n-z^{n-1})$ 在 B: $|z|<1$ 内非一致收敛。

我们对于任意给定的 $\varepsilon>0$（例如给定 $\varepsilon<\frac{1}{e}$），永远也找不到一个不依赖于 z 的统一的 $N=N(\varepsilon)$，使得 $n>N(\varepsilon)$ 时，对于一切 $z \in |z|<1$，均满足

$$|z^n|<\varepsilon, \quad \left(\varepsilon<\frac{1}{e}\right).$$

这是因为总有相当大的 n 及圆域 B: $|z|<1$ 内的点 $z_n=\frac{n}{n+1}$，使得 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 接近且大于 $\frac{1}{e}$，这就是说，找不到这样的 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$|z^n|<\varepsilon$$

成立。故 $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n-z^{n-1})$ 在 B: $|z|<1$ 内非一致收敛。

2. 函数项级数的性质

前面我们已经给出了函数项级数在点集 E 上收敛与一致收敛的

概念，并强调了它们的重要性．那么我们很自然地要提出这样的问题：

(a) 如何判断一个函数项级数在某个点集E上一致收敛？

(b) 如果一个函数项级数在某个点集E上一致收敛，它将有些什么性质呢？

下面我们就来讨论这两个问题．

① **Cauchy 一致收敛准则**

和数学分析一样，Cauchy 一致收敛准则，照样可以用来判断复变函数项级数的一致收敛性．我们有

定理 1 （**Cauchy一致收敛准则**）级数（1）在集合E上一致收敛于某个函数 $f(z)$的**充分必要条件是**：对于任意给定的$\varepsilon>0$，总有一个正整数 $N(\varepsilon)$及$P=1,2,\cdots$，使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对于点集E上的一切点z，均满足

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon.$$

由这个准则我们可以推出一个一致收敛的充分条件，称其为**强级数准则**．

定理 2 （**强级数准则**）设级数（1）的每一项 $f_n(z)$在点集E上有定义，并且设

$$\sum_{n=1}^{\infty}M_n=M_1+M_2+\cdots+M_n+\cdots$$

为一收敛的正项级数．如果有

$$|f_n(z)|\leqslant M_n\ (n=1,2,\cdots),\quad z\in E.$$

则级数（1）在点集E上一致收敛，且为绝对收敛．

正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$称为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$的**强级数**．

在例 1 中我们已经证明了级数：

$$z+(z^2-z)+\cdots+(z^n-z^{n-1})+\cdots$$

在 B: $|z|<1$内收敛于函数 $f(z)\equiv0$，但非一致收敛．现在我们可

以证明该级数在闭圆域$\bar{B}$: $|z|\leqslant r(r<1)$上一致收敛.

事实上，该级数的每一项 $f_n(z)=z^n-z^{n-1}$ 在$\bar{B}$: $|z|\leqslant r(r<1)$上有定义，并且在 $\bar{B}$: $|z|\leqslant r(r<1)$ 上有

$$|f_n(z)|=|z^n-z^{n-1}|\leqslant|z|+|z|^{n-1}=r^n+r^{n-1}=r^{n-1}(r+1).$$

而正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^{n-1}(r+1)$ 收敛， 由定理 2 可知该级数在 $\bar{B}$: $|z|\leqslant r$ $(r<1)$上一致收敛. （证毕）

这样，定理 1 与定理 2 就回答了我们前面提出的第一个问题，即判断级数在点集E上一致收敛的方法问题.

② **和函数的连续性**

下面几个定理可以表明在E上一致收敛的函数项级数的性质.

定理 3 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 的各项在点集E上连续，并且一致的收敛于 $f(z)$，则和函数 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在点集E上连续.

【证明】 要证 $f(z)$在点集E上连续，即须证 $f(z)$在点集E上的每一点z_0都连续. 今设 $z\in E$，$z_0\in E$，要证 $f(z)$ 在点 z_0 处连续，即证对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个正数 $\delta>0$，当$|z-z_0|<\delta$时，有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

成立，即可.

事实上：

$$|f(z)-f(z_0)|=|[f(z)-S_n(z)]+[S_n(z)-S_n(z_0)]+[S_n(z_0)-f(z_0)]|\leqslant|f(z)-S_n(z)|+|S_n(z)-S_n(z_0)|+|S_n(z_0)-f(z_0)|$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在E上一致收敛于 $f(z)$，则有

$$|f(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

及 $$|S_n(z_0)-f(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

而 $S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$ 为有限个连续函数之和，故 $S_n(z)$ 为点集 E 上的连续函数．当然在点 $z_0\in E$ 连续．由连续定义可知，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|S_n(z)-S_n(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant|f(z)-S_n(z)|+|S_n(z)-S_n(z_0)|+|S_n(z_0)-f(z_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故和函数 $f(z)$ 在 $z_0\in E$ 连续．又因 z_0 为 E 上任意一点，所以 $f(z)$ 在点集 E 上连续．（证毕）

③ 逐项积分

定理 4 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 的各项都在曲线 C 上连续，并且在 C 上一致的收敛于 $f(z)$，则沿 C 可以逐项积分而得

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)\,dz.$$

【证明】 在题设条件下，$\int_C f(z)\,dz$ 与 $\int_C f_n(z)\,dz$ 是存在的，我们只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_C f_k(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz$$

即可．

事实上，令 $S_n(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(z)$．由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 C 上一致收敛于 $f(z)$，所以，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$|f(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{l},\quad (z\in C).$$

成立，其中l为C的长度．所以

$$\left|\int_C f(z)\,dz-\sum_{k=1}^{n}\int_C f_k(z)\,dz\right|=\left|\int_C[f(z)-S_n(z)]\,dz\right|$$

$$\leqslant\int_C|f(z)-S_n(z)||dz|\leqslant\frac{\varepsilon}{l}\int_C|dz|=\frac{\varepsilon}{l}\cdot l=\varepsilon.$$

即得所需证明的结果． （证明）

3. Weierstrass 定理

从上述两个定理不难发现，我们所讲的级数都是一般函数项级数．因此，我们会提出这样的问题，如果级数是解析函数项级数，又会有什么性质呢？Weierstrass （外尔斯特拉斯）定理给出这样的回答：“一致收敛的解析函数项级数的和函数，仍为解析函数，并且它可以逐项微分任意次．”这充分显示了解析函数项级数的特点．

为了更好地讨论解析函数项级数的性质，我们再引进一个新的概念，即“内闭一致收敛”的概念．

① 内闭的一致收敛

设函数 $f_n(z)$ 在区域G内定义，$(n=1,2,\cdots)$，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在G内的任一个有界闭子区域上一致收敛于函数 $f(z)$，那么我们称级数 **$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在G内为内闭的一致收敛于 $f(z)$．**

由此我们不难得出：解析函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在区域G内为内闭的一致收敛的一个充分条件，即：

定理 5　设函数 $f_n(z)$ 在区域 G 内解析，$(n=1,2,\cdots)$．如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 G 内为一致收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 G 内为“内闭的一致收敛”．

这是很明显的．因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 G 内一致收敛，必在区域 G 内任一子有界闭区域上一致收敛．依定义，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 G 内为内闭的一致收敛。

值得注意的是：解析函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 G 内的一致收敛，只是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 G 内为内闭的一致收敛的一个充分条件，而不是必要条件．即解析函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 G 内为内闭的一致收敛，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 G 内未必是一致收敛的．

这是因为，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 G 内任何一个有界闭子区域 $G_K(K=1,2,\cdots)$ 上一致收敛，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正整数 $N_K(\varepsilon)$，当 $n>N_K(\varepsilon)$ 时，对 G_K 上的一切点 z，有：

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon,$$

但上式未必对 G 内的一切点 z 都一致成立，因为 $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), \cdots, N_K(\varepsilon), \cdots$ 未必有一个公共的 $N(\varepsilon)$，使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对 G 内一切点 z，都有

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon$$

成立。

事实上，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^{n}-z^{n-1}\right)$在单位圆 B: $|z|<1$ 内内闭一致的收敛于 $f(z)=0$，但非一致收敛。

有了上述定义和定理之后，我们回头来讨论：

② Weierstrass 定理

定理 6 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 的每一项 $f_n(z)$ 都在区域 G 内解析，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在区域 G 内为内闭的一致收敛于 $f(z)$，则

（1）$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在区域 G 内解析。

（2）在 G 内可以逐项求导任意多次，即

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z).$$

【证明】首先证明 $f(z)$ 在 G 内解析。

为此，任取一点 $z_0\in G$，作 z_0 的邻域 $B(z_0,\rho)=\{z: |z-z_0|<\rho\}$ 及 $\bar{B}(z_0,\rho)=\{z: |z-z_0|\leqslant\rho\}\subset G$，并作任意一条简单闭曲线 $C\subset B(z_0,\rho)$，于是

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)\,dz=0.$$

依 Morera 定理（§3·5～5），$f(z)$ 在 $B(z_0,\rho)$ 内解析。
因为 z_0 为 G 内任意一点，故 $f(z)$ 在 G 内解析。

其次，要证在 G 内有 $f^{(k)}(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z_0)$　$(k=1,2,\cdots)$

仍取任意一点 $z_0\in G$，作圆周 $\Gamma(z_0,\rho)=\{z: |z-z_0|=\rho\}$，$\rho>0$，使 $(\Gamma\cup\mathrm{int}(\Gamma))\subset G$。由解析函数的无穷可微性（§3·5）可知：

$$f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

$$f_n^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

$\zeta\in\Gamma$，$f(\zeta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(\zeta)$。所以有 $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}=\dfrac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(\zeta)$。又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$\Gamma$上一致收敛于$f(\zeta)$，而 $\left|\dfrac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\right|=\dfrac{1}{\rho^{k+1}}$。因为一个模为有界的函数与一个一致收敛的级数之积$\dfrac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(\zeta)$在$\Gamma$上也一致收敛，于是由定理 4 可知，沿$\Gamma$可以逐项积分，而得

$$\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\Gamma\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta.$$

两端同乘以$\dfrac{k!}{2\pi i}$，便有

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

即

$$f^{(k)}(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z_0).$$

因为z_0为G内任意一点，所以有

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z),\quad z\in G.\qquad\text{（证毕）}$$

从这个定理我们还可以得出如下的推论：

推论 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 的各项 $f_n(z)$ 在区域G内解析，并且在区域G内一致收敛于函数 $f(z)$。

则

（1）$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在区域G内解析；

（2）在区域G内可以逐项微分任意多次

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z),\quad (k=1,2,\cdots)$$

由定理5可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在G内一致收敛必内闭的一致收敛，故该推论完全符合定理6的条件。

习　　题（4·1）

1．证明下列各级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛

1）$\alpha_n=\frac{n}{2^n}$.

2）$\alpha_n=\frac{n!}{n^n}$.

2．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}$ 发散。

3．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$绝对收敛

4．设级数$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在点集E上一致收敛，而 $|\varphi(z)|<M|$

$(M<\infty)$，在 E 上恒成立，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)\cdot\varphi(z)$ 在 E 上为一致收敛，试证之。

5．试证级数

$$z^2+\frac{z^2}{1+z^2}+\frac{z^2}{(1+z^2)^2}+\cdots+\frac{z^2}{(1+z^2)^n}+\cdots$$

沿实轴为绝对收敛，但不一致收敛。

6．试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2+n}$ 在 $z=0$ 的邻域内一致收敛，但不绝对收敛。

7．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在区域 G 内一致收敛，又 $f_n(z)$ 在 G 内为解析函数。试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n'(z)\right|$ 在 G 内为内闭的一致收敛。

8．证明 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}$ 在区域 $A: z>1$ 内解析。

9．证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{-n}$ 在 $|z|>1$ 内解析。

10．证明 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 在 A：$|z|<1$ 内解析。

11．证明 $\sum\limits_{n=1}^{n}e^{-n}\sin nz$ 在区域 A：$-1<I_m z<1$ 内解析。

12．求 $\int\limits_C\left(\sum\limits_{n=-1}^{\infty}z^n\right)dz$，其中 C 为半径 $r=\frac{1}{2}$ 的圆周。

§4·3 幂级数

我们已知复变函数论研究的主要对象是解析函数，我们即将看到，幂级数与解析函数有着密切的联系，一方面幂级数在一定的区域内收敛于一个解析函数；另一方面一个解析函数在其解析点的邻域内，能展开成幂级数。所以幂级数是我们研究解析函数在解析点邻域的性质，所必不可少的有力工具。而且在实际计算中，把函数展开成幂级数，应用起来也比较方便。所以幂级数在复变函数论中有着特殊重要的意义。那么什么样的级数是幂级数呢？

1 幂级数概念

我们把形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = C_0 + C_1(z-z_0) + \cdots + C_n(z-z_0)^n + \cdots \quad (A)$$

的级数称为幂级数，其中设 C_0，C_1，$C_2, \cdots, C_n$，$\cdots$，及 z_0 都为复常数。

在特殊情况下，当 $z_0 = 0$ 时，级数（A）变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_n z^n + \cdots \quad (B)$$

我们不难发现，级数（A）的每一项都是关于（$z-z_0$）的幂函数，因此幂级数是一种特殊而且最简单的解析函数项级数类

对于幂级数，首先要讨论的问题，是它的收敛范围 为此，我们先研究它的收敛性问题。

2. 幂级数的收敛性

首先，我们引进幂级数的收敛定理—Abel（阿贝尔）定理。

定理 1（Abel 定理）设幂级数（A），（a）当 $z=b(\neq z_0)$ 时为

收敛，则它在 $B=\{z: |z-z_0|<|b-z_0|\}$ 内收敛且绝对收敛； 在 $\bar{B}=\{z: |z-z_0|\leqslant\rho<|b-z_0|\}$上一致收敛。(b) 当$z=b$ 时，级数(A)发散，则它在 $H=\{z: |z-z_0|>|b-z_0|\}$ 时发散。

【证明】 (a) 级数 (A) 在 $B=\{z: |z-z_0|<|b-z_0|\}$ 内绝对收敛否？

令 $z\in B$ 为任意一点。依所设条件，级数 (A) 当 $z=b$ 时收敛，即常数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(b-z_0)^n$ 收敛。由级数收敛必要条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n(b-z_0)^n=0$，故必存在一个正数$M$，使对于每一个 n，都有

$$|C_n(b-z_0)^n|\leqslant M \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{1}$$

又因 $|z-z_0|<|b-z_0|$，故 $\left|\dfrac{z-z_0}{b-z_0}\right|<1$，现令 $\left|\dfrac{z-z_0}{b-z_0}\right|=q$，

于是对于每一个 n，都有

$$\begin{aligned}|C_n(z-z_0)^n| &= \left|C_n(b-z_0)^n\left(\frac{z-z_0}{b-z_0}\right)^n\right| \\ &= \left|C_n(b-z_0)^n\right|\left|\frac{z-z_0}{b-z_0}\right|^n\leqslant Mq^n.\end{aligned}$$

因为 $0<q<1$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}Mq^n$$

为收敛的等比级数。因而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|C_n(z-z_0)^n\right|$收敛，故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$为绝对收敛。

其次，我们要证级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 在$\bar{B}=\{z: |z-z_0|\leqslant\rho<|b-z_0|\}$ 上一致收敛。

令ζ为圆周$C=\{\zeta: |\zeta-z_0|=\rho\}$上的点。由上面的证明，可知级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$在$B=\{z: |z-z_0|<|b-z_0|\}$内的所有点处都绝对收敛，当然在我们所选取的半径为$\rho$的圆周$C$上所有点处，也都绝对收敛，即级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n(\zeta-z_0)^n|=|C_0|+|C_1(\zeta-z_0)|+\cdots+|C_n(\zeta-z_0)^n|+\cdots$$

收敛，因不等式$|z-z_0|\leqslant|\zeta-z_0|$成立，所以对于任意的$n$，不等式

$$|C_n(z-z_0)^n|\leqslant|C_n(\zeta-z_0)^n|$$

都成立。由强级数判别法可知，级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$在$\bar{B}=\{z: |z-z_0|\leqslant\rho<|b-z_0|\}$上一致收敛。

(b)级数在$H=\{z: |z-z_0|>|b-z_0|\}$时发散否？

由题设，已知级数在$z=b$时发散。要证级数在$\text{ext}(|z-z_0|=|b-z_0|)$的任意一点必发散。现用反证法。设级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$在点$a$收敛，则由(a)可知级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$当$|z-z_0|\leqslant|a-z_0|$时为绝对收敛，于是级数必在$z=b$处收敛，但这与题设矛盾，故定理成立。 (证毕)

根据Abel定理，我们可知幂级数（A）的收敛域必是一个圆域$B=\{z: |z-z_0|<R\}$，并使幂级数(A)在$\text{int}(|z-z_0|=R)$内绝对收敛，且当$|z-z_0|>R$时发散。至于圆周$|z-z_0|=R$上的点，级数可能收敛，也可能发散，这要依具体的级数而定，我们称R为此幂级数的收敛半径，称圆域$B=\{z: |z-z_0|<R\}$为它的收敛圆。

3. 幂级数的收数半径

和数学分析类似，级数（A）的收敛半径为 $R=\frac{1}{l}$，其中

$l=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$ 或 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$，极限存在。当 $l=0$ 时，$R=\infty$；

$l=\infty$时，$R=0$。

可见，幂级数（A）的收敛圆只有三种可能：或者是一个"点圆"；或者以 z_0 为心、以 $R(0<R<\infty)$ 为半径的圆域；或者为整个平面S_z。

【例 1】 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^nz^n$ 的收敛半径 $R=0$。这是因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right|=\infty$$

所以

$$R=\frac{1}{l}=0.$$

【例 2】 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$的收敛半径$R=1$，这是因为

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1.$$

4. 和函数的解析性

定理 2 任一幂级数(A)的和函数 $f(z)$，在其收敛圆 $|z-z_0|<R$内，都是解析函数；并且可以逐项求导任意多次。

这个定理可以由§4·2定理 4 来证明。

事实上，由于 $C_n(z-z_0)^n$ 在收敛圆 $|z-z_0|<R$内解析，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 在收敛圆内内闭的一致收敛，故级数(A) 在其收敛圆内其和函数解析，且可以逐项求导任意多次。（证毕）

我们还可以证明：

定理 3 如果级数(A)的收敛半径为 R，则级数$f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nC_n(z-z_0)^{n-1}$ 的收敛半径也是 R。

事实上：$R'=\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|c_n|}\right)^{-1}=\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|C_n|}\right)^{-1}$

$=\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{C_n}\right)^{-1}=R$。（证毕）

§4·4 解析函数的幂级数展开式

1. Taylor（泰劳）定理

定理 1 （Taylor 定理）设 $f(z)$ 为区域 G 内的解析函数，则在 G 内任意一点 z_0 的邻域 $B=\{z: |z-z_0|<R\}\subset G$ 内，$f(z)$ 可以展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

并且展开式是唯一的，其中 $C_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$。

【证明】 证明的关键是利用Cauchy 积分公式，以及我们所熟知的公式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \qquad (|z|<1).$$

对于任意$z\in B$，总存在一个圆周 $C=\{z: |\zeta-z_0|=\rho\}$，$(0<\rho<R)$，

使 $|z-z_0|<\rho$, $(C\cup \mathrm{int}(c))\subset G$（如图4·1），由Cauchy 公式，可有：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad (2)$$

如果能将（2）式的右端化成关于 $z-z_0$ 的幂级数的形式，也就是设法把$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$化成关于 $z-z_0$ 的幂级数形式，然后再逐项积分，则定理便可以得到证明。

为此，把分式$\dfrac{1}{\zeta-z}$化成如下形式：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-z+z_0}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{-1} \qquad (3)$$

由于 $|z-z_0|<|\zeta-z_0|$，于是有 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$，可以把（3）的右端展开成级数：

$$\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \qquad (4)$$

所以有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

而级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$的一般项的模：

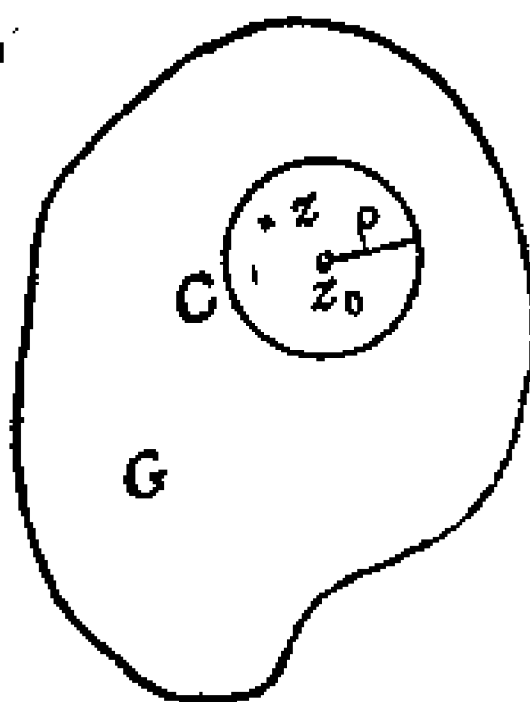


图 4·1

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|=\left|\frac{1}{\zeta-z_0}\right|\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n. \quad 而\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1.$$

由强级数判别法，可知级数$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ 在C上一致收敛。把上式两端同乘以$\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$，级数

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

仍在C上一致收敛，且各项在C上连续，根据逐项积分定理，即得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta.$$

由高阶微商公式，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

令 $C_K=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$最后得出 $f(z)$ 的展开式为：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\quad z\in B=\{z:|z-z_0|<\rho\}$$

现在再来证明：这种展开式是唯一的。

事实上，如果以点z_0为中心作圆周 $C'(z_0,\rho')$，$\rho'\leqslant\rho$，$f(z)$还可以在 $\mathrm{int}(c')$ 内于z_0点展开成另一种幂级数。设为：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n.$$

则当 $z=z_0$ 时，得

$$b_0=f(z_0),\quad b_1=\frac{f'(z_0)}{1!},\quad b_2=\frac{f''(z_0)}{2!},\quad\cdots,\quad b_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},\cdots$$

而 $C_K=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

所以 $b_k = C_K$, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

即展开式是唯一的。 （证毕）

我们把展开式（1）称为 $f(z)$ 在点 z_0 的 Taylor 级数或称 Taylor 展开式，其中$C_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$为级数的系数。

综合§4·3中定理2和§4·4中定理1，便可得下面定理：

定理2 函数 $f(z)$ 在区域G内解析的充分必要条件是：函数 $f(z)$ 在区域G内的任意一点z_0的邻域内可以展开成关于$z-z_0$的幂级数。

定理3 设 $z_0 \in G$，$f(z)$ 在z_0处解析，则 $f(z)$在z_0处可以用多项式来逼近。

事实上，设 $f(z)$ 在z_0处解析，则 $f(z)$可以展开成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k +$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

取多项式序列

$$\left\{p_n(z)\right\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right\} \rightrightarrows f(z).$$

2. 解析函数的幂级数展开方法

Taylor 定理不仅给出了函数能够展开成幂级数的条件，而且还给出了展成幂级数的方法。如何将函数展开成幂级数呢？这是我们要讨论的主要问题。对此：

首先，必须考查所给函数 $f(z)$ 在所给点z_0处是否可以展开；然后再寻找恰当的方法，将所给函数在z_0点展开成幂级数。

其次，展开式是关于 $z-z_0$ 的幂级数。

展开的方法基本上是直接展开法和间接展开法。究竟用什么方法，要具体问题具体分析。

我们将通过例题，具体说明把函数展开成幂级数的方法和步骤如下：

①用直接展开法的例子

所谓直接展开法，即已知函数 $f(z)$ 后，直接求出 $f^{(n)}(z_0)$ ，然后根据公式

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

确定出C_n，便可求出 $f(z)$ 在z_0点的幂级数展开式。

【例 1】将指数函数 $f(z) = e^z$ 在 $z = 0$处展成幂级数。

【解】因函数e^z在整个复平面S_z上解析，故在$z = 0$ 邻域内可以展开成幂级数。由于e^z的各阶导数仍为e^z，即

$$(e^z)' = e^z,\ \ (e^z)'' = e^z,\ \ (e^z)''' = e^z, \cdots,\ \ (e^z)^{(n)} = e^z, \cdots$$

故

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 1$$

因此

$$C_n = \frac{1}{n!}.$$

故得展开式为

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (R = \infty)$$

【例 2】求出 $\log(1 + z)$ 在$z = 0$处的幂级数展开式。

【解】由于 $\log(1 + z) = \log|1 + z| + i\arg(1 + z)$ $(-\pi < \arg(1 + z) < \pi)$，当 $z \neq -1$时，是全平面S_z的解析函数。点$z = -1$为$\log(1 + z)$距 $z = 0$的最近一个奇点，故收敛半径为$R = d(0, -1) = 1$*

因 $f(z) = \log(1 + z)$，$f'(z) = \frac{1}{1 + z}, \cdots,$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+z)^n} \quad \cdots$$

---

*) R等于展开中心z_0到$f(z)$距z_0最近的奇点的距离。

故

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ \cdots,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,\ \cdots$$

因而

$$C_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad (n=1,2,\cdots)$$

故得 $\log(1+z)$ 的展开式为

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}z^n=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots\quad (R=1)$$

【例 3】 求函数 $(1+z)^m$（m 为复常数）在 $z=0$ 处的幂级数展开式。

【解】 我们把 $(1+z)^m$ 写成指数形式，即：

$(1+z)^m=e^{m\mathrm{Log}(1+z)}$，这是一个多值函数，它的主枝为 $\varphi(z)=e^{m\log(1+z)}$，它在 B: $|z|<1$内解析，故可展成幂级数，其收敛半径为 1．

现令：$f(z)=\log(1+z)$

$$\varphi(z)=e^{mf(z)}=e^{m\log(1+z)}$$

按复合函数求导法则，有：

$$\begin{aligned}\varphi'(z)&=(e^{mf(z)})'\\&=me^{mf(z)}\cdot f'(z)\\&=me^{mf(z)}\frac{1}{1+z}\\&=me^{mf(z)}\frac{1}{e^{f(z)}}\\&=me^{(m-1)f(z)}.\end{aligned}$$

同理

$$\varphi''(z)=m(m-1)e^{(m-2)f(z)}.$$

………

$$\varphi^{(n)}(z)=m(m-1)\cdots(m-n+1)e^{(m-n)f(z)}.$$

………

于是有

$$\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=m,\cdots,\varphi^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots(m-n+1),\cdots$$

因而

$$C_n=\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}.\quad(n=1,2,\cdots)$$

于是得出 $(1+z)^m$ 的展开式为

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}z^n$$
$$+\cdots\quad(z\in B=\{z:|z|<1\})$$

②用间接展开法的例子

以上用直接方法将函数展开成幂级数．这种直接展开的方法，有时很复杂，甚至无法进行．因此，我们可以利用一些已知其展开式的函数，用代入法，逐项微分法或逐项积分等方法，将所给函数展开成幂级数．这样可使计算简单．在我们常采用的间接方法中，代入法是常用的方法．比如

【例 4】 将 $\sin z$ 在$z=0$处展开成幂级数．

【解】 因为

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

而

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!},$$

$$e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!},$$

故

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)$$

$$= z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (|z| < \infty)$$

这就是$\sin z$在S_z平面的展开式。

【例 5】将 e^{e^z} 在$z=0$处展开成幂级数。

【解】由于 $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$

故可将e^{e^z}展开成幂级数：

$$e^{e^z} = e \cdot e^{(e^z - 1)}$$

$$= e[1 + (e^z - 1) + \frac{1}{2!}(e^z - 1)^2 + \frac{1}{3!}(e^z - 1)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(e^z - 1)^n + \cdots]$$

$$= e[1 + (1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \cdots - 1) + \frac{1}{2!}(1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots - 1)^2 + \cdots + \cdots$$

$$= e\left[1 + (z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots) + \frac{1}{2!}\left(z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= e\left(1 + z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \cdots\right). \qquad (|z| < \infty)$$

【例 6】将 $\cos z$ 在 $z=0$处展开成幂级数。

【解】因为$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$\cos z = (\sin z)'$，

$(|z| < \infty)$，故应用 $\sin z$ 的展开式逐项微分，便得

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (|z| < \infty)$$

【例 7】 将 arc sin$z$在 $z=0$ 处展开成幂级数。

【解】 因为arc sin$z$ $=\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz\left(\because (\text{arc}\sin z)'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)$,

又因为在 $\bar{B}=\{z: |z|\leqslant\rho<1\}$ 内

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n}$$

一致收敛，故逐项积分，得展开式

$$\text{arc}\ \sin z=\int_0^z\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n}dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2n+1)\cdot 2^{2n}(n!)^2}z^{2n+1}$$

$$=z+\frac{1}{2\cdot 3}z^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\ 5}z^5+\cdots\ (z\in\bar{B}:\{z: |z|<1\})$$

【例 8】 求$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$在点 $z_0(\neq\pm i)$ 处的幂级数。

【解】 首先求出函数$\frac{1}{1+z^2}$的非解析点 $\pm i$。由于这个函数在

$\pm i$ 处不解析，因而幂级数以z_0为中心的收敛圆的圆周，必过 i 或$-i$，或同时过 i 与$-i$，自然 $\pm i$ 不在收敛圆的内部，即收敛圆为域：$|z-z_0|<R$，其中 R 为z_0到i或 $-i$ 的距离中之最小者，即 $R=\min\{|i-z_0|, |i+z_0|\}$。

其次，将 $\frac{1}{1+z^2}$化成部分分式，然后利用几何级数$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ $(|z|<1)$，便可在z_0点展开，即

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=-\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-z}+\frac{1}{i+z}\right)$$

$$=-\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(i-z_0)-(z-z_0)}+\frac{1}{(i+z_0)+(z-z_0)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(i-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{i-z_0}\right)}+\frac{1}{(i+z_0)\left(1+\frac{z-z_0}{i+z_0}\right)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{i-z_0}\right)^n + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{i+z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-z_0}{i+z_0}\right)^n\right]$$

其中因 $\left|\frac{z-z_0}{i-z_0}\right|<1$，$\left|\frac{z-z_0}{i+z_0}\right|<1$。

故

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}[(z_0+i)^{-n-1}-(z_0-i)^{-n-1}](z-z_0)^n$$

$$(|z-z_0|<R,\ R=\min\{|i-z_0|,\ |i+z_0|\})$$

其中当 $z_0=0$ 时，便有

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+z^8-\cdots \qquad (|z|<1)$$

当 $z_0=1$ 时，便有

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(z-1)+\frac{1}{4}(z-1)^2-\frac{1}{8}(z-1)^4+\cdots$$

$$(|z-1|<\sqrt{2})$$

【例 9】 求$\sin z$在 $z=1$ 处的幂级数展开式。

【解】 令 $\zeta=z-1$，$z=\zeta+1$

则，求 $\sin z$ 在$z=1$处的幂级数展开式，就归结为求 $\sin(\zeta+1)$ 在$\zeta=0$处的幂级数展开式。

因为由

$\sin(\zeta+1)=\sin\zeta\cdot\cos 1+\cos\zeta\cdot\sin 1$

利用

$$\sin\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}$$

则得

$$\sin(\zeta+1)=\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}.$$

将 $\zeta=z-1$ 代入还原，便得

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 1\cdot(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 1\cdot(z-1)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(z-1)^n. \qquad (|z-1|<\infty)$$

习　　题（4·2）

1．在下列各题中求级数的收敛半径：

1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$.

2）$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in)\cdot z^n$.

3）$\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)\cdot z^n$.

4）$1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\,c(c+1)}z^2+\cdots+$

$$\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\cdots(c+n-1)}z^n+\cdots$$

其中 a，b为复数，且 $c\geqslant 1$的整数.

2．已知级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$的收敛半径为$R(0<R<\infty)$．试证级数

$\sum_{n=0}^{\infty}(1+z_0^n)C_nz^n$的收敛半径为 $r=\min\left(R,\ \frac{R}{|z_0|}\right)$

3．如果$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$的收敛半径$R>0$，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ ($z\in k$，$k=\{z: |z-z_0|<R\}$，则 $f(z)$ 在收敛圆的圆周$C: |z-z_0|=R$ 上至少有一个奇点，试证之。

4．求下列函数在原点邻域的展开式，

1) $\frac{z}{e^z-1}$．

2) $\cos^2 z$．

3) $\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]^2$．

4) $e^{\frac{1}{1-z}}$．

5) $\frac{1}{az+b}$ （a，b为复数，且$b\neq 0$）．

5．将下列函数在 $z=1$ 点展开，

1) $\frac{1}{z+2}$．

2) $\frac{z^2}{(1+z)^2}$．

3) $\cos z$．

4) $\sin(2z-z^2)$．

6 证明 Schwarz 引理．设 $f(z)$ 在 $B=\{z: |z|<1\}$ 内解析，且 $f(0)=0$，当$z\in B$时，$|f(z)|<1$，则在 B 内有 $|f(z)|\leqslant|z|$．

§4·5 解析函数零点的孤立性、唯一性定理

1． 解析函数零点的孤立性

设函数 $f(z)$ 在 z_0的邻域 $B=\{z: |z-z_0|<R\}$ 内解析，且

$f(z_0)=0$，则称z_0为解析函数 $f(z)$ 的零点，与此同时，称 $f(z_0)=A$ 的z_0为函数 $f(z)$ 的A点。

如果z_0为 $f(z)$ 的零点，并且 $f(z)$ 在 $B=\{z: |z-z_0|<R\}$ 内解析，则 $f(z)$ 在 $B=\{z: |z-z_0|<R\}$内便可以展开成幂级数为

$$\sum_{m=k}^{\infty} c_m(z-z_0)^m, \quad k\geqslant 1,$$

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

其中 $c_0=f(z_0)=0, \cdots, c_m=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$ ， $n>m\geqslant 1$。

在 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 中，如果c_n不全为零，设 $c_0=c_1=\cdots=c_{m-1}=0$，而 $c_m\neq 0$，我们称z_0为 $f(z)$ 的 **m阶零点**，特别是当 $m=1$ 时，称z_0为 $f(z)$的简单零点。

设z_0为解析函数的m阶零点，则在B: $|z-z_0|<R$ 内显然有

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$
$$=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

其中：$\varphi(z)=c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots$在 B: $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $\varphi(z_0)=c_m\neq 0$。

出此我们得出下面的结论：

定理1　在 $B=\{z: |z-z_0|<R\}$ 内解析的函数 $f(z)$，以z_0为m阶零点的充分必要条件是：在B: $|z-z_0|<R$ 内有 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 B: $|z-z_0|<R$内解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$。

这个定理不仅给出了解析函数在零点邻域的性质，同时给出了计算 $f(z)$ 零点z_0的阶数的一种方法。

【例1】 求 $f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)$ 的零点$z=0$的阶数.

【解】 显然 $f(0)=0$，且 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，$z=0$ 为 $f(z)$ 的零点。因为 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内有

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

及

$$\sin z^3=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{6n+3}}{(2n+1)!}$$

代入，于是在 $|z|<R$ 内有

$$f(z)=6z^3-\frac{6}{3!}z^9+\frac{6}{5!}z^{15}-\frac{6}{7!}z^{21}+\cdots+z^9-6z^3$$

$$=\frac{6}{5!}z^{15}-\frac{6}{7!}z^{21}+\cdots$$

$$=z^{15}\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)=\frac{6}{5!}-\frac{6}{7!}z^6+\cdots$ 在 $|z|<R$ 内解析，且

$$\varphi(0)=\frac{6}{5!}\neq 0.$$

所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的15阶零点。

设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $f(z_0)=0$，如果存在 z_0 的某一个邻域 $B=\{z:|z-z_0|<\rho(<R)\}$，使得在 $B=\{z:|z-z_0|<\rho\}$ 内除 z_0 外不再有其他的零点，则称 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的**孤立零点**。

定理 2 （零点孤立性定理） 设函数 $f(z)$ 在邻域 $B=\{z:|z-z_0|<R\}$ 内解析，且 z_0 为 $f(z)$ 的 m $(m=1,2,\cdots)$ 阶零点。如果在 z_0 的邻域 $B=\{z:|z-z_0|<R\}$ 内，$f(z)$ 不恒为零，则 z_0 为 $f(z)$ 的孤立零点。

【证明】 要证 z_0 为 $f(z)$ 的孤立零点，只须证有 $|z-z_0|<\rho(<R)$ 存在，于其内除 z_0 外，$f(z)$ 无其他零点即可。

由于在邻域 $B=\{z:|z-z_0|<R\}$ 内 $f(z)$ 解析，且不恒为零，z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点．故

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z).$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$。

根据 $\varphi(z)$ 的连续性，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\rho>0$，当 $|z-z_0|<\rho$ 时，有

$$|\varphi(z)-\varphi(z_0)|<\varepsilon$$

成立。

在 $|z-z_0|<\rho$ 内，由于 $\varphi(z_0)\neq 0$，故

$$\varphi(z)\neq 0$$

于是在z_0的邻域内，$f(z)$除z_0外无其他零点。

（证毕）

定理 3 设函数 $f(z)$ 在 $B=\{z: |z-z_0|<R\}$ 内解析，z_0 为 $f(z)$ 的非孤立零点，则 $f(z)\equiv 0$。

【证明】我们用反证法来证明：设在 $B=\{z: |z-z_0|<R\}$ 内 $f(z)$ 不恒为零。由定理 2 可知，必存在一个邻域 $|z-z_0|<\rho_1<R$，于其内 $f(z)$ 除z_0外无其他零点。意即z_0为 $f(z)$的孤立零点，这与已知z_0为 $f(z)$ 的非孤立零点相矛盾。（证毕）

2. 唯一性定理

定理 4（唯一性定理），设

① $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在区域G内解析；

② E为无穷点集，且 $E\subset G$；

③ $z_0\in G$为E的凝聚点；

如果，$f_1(z)\equiv f_2(z)$，$z\in E$，

则：$f_1(z)\equiv f_2(z)$，$z\in G$。

【证明】令 $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$。要证 $f_1(z)$与 $f_2(z)$在G内到处相等，只须证 $f(z)$ 在G内到处为零即可。

首先，因为 $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$ 在G内解析，又在E上处处为零，而 $z_0\in G$为E的凝聚点，故z_0为 $f(z)$ 的一个非孤立零点。由定理 3 可知，必存在一个完全属于G的邻域$B=\{z: |z-z_0|<r\}$ 于其内 $f(z)\equiv 0$。

其次，我们要证 $f(z)$ 在 G 内任一点 z' 处的值也为零。为此，我们用一条完全属于 G 的连续曲线 C，连接 z_0 与 z'（如图4·2）。并设距离 $d=d(C,\Gamma)$，Γ 为 G 的边界。设 $\rho=\frac{d}{2}$，并用 $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n=z'$ 为分点，将 C 分成 n 段弧，且使 $|z_k-z_{k-1}|<\frac{d}{2}=\rho$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，分别以 $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$ 为中心，以 $\frac{d}{2}$ 为半径，作属于 G 的圆域 $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$。由上面的证明，可知 $f(z)$ 在

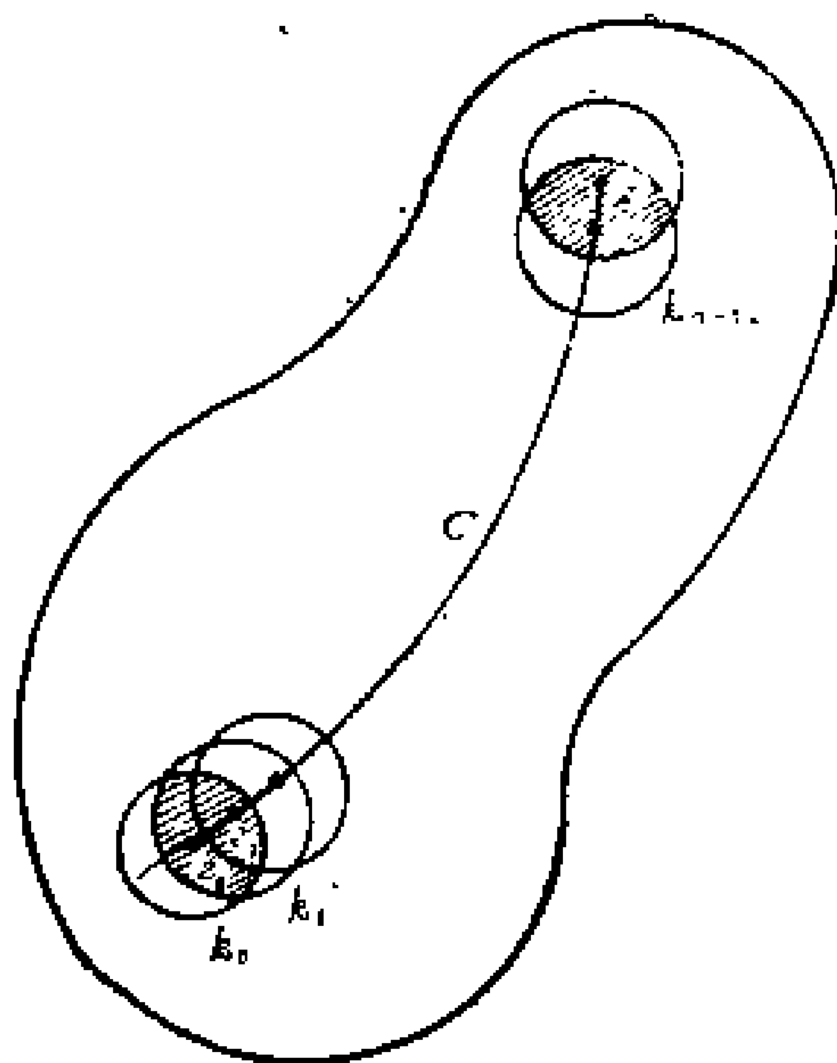


图 4·2

k_0 内恒为零，又因 $|z_k-z_{k-1}|<\frac{d}{2}$，可知 z_1 位于 k_0 内，所以 $f(z_1)=0$，$f(z)$ 在 k_1 内又恒为零。同理，z_2 位于 k_1 内，$f(z)$ 在 k_2 内也恒为零。同理，可知 $f(z)$ 在 $k_3, k_4, \cdots, k_{n-1}$ 内都恒为零。最后，因 $z_n=z'$ 位于 k_{n-1} 内，所以 $f(z')=0$，即 $f(z)$ 在 G 内任意一点 z' 处的值恒为零，因此 $f(z)$ 在 G 内到处为 0，即 $f_1(z)\equiv f_2(z)$，$z\in G$ 这个定理可称为内部唯一性定理。（证毕）

由定理 4，我们可以推得：

定理 5 设 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在区域 G 内解析，如果 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在（收敛点仍属于 G 的）点列上，（或任意小的邻域内，或任意小的一条曲线上）恒有 $f_1(z)=f_2(z)$，则在 G 内到处有 $f_1(z)\equiv f_2(z)$。

【例 2】 设函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，如果对于点 $z_0\in G$，均有 $f^{(n)}(z_0)=0$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $f(z)$ 在 G 内恒为常数。

【证明】 要证 $f(z)$ 在 G 内恒为常数，只须证明 $f(z)$ 在 z_0 点

的邻域$B=\{z: |z-z_0|<\rho\}$ 内 $f(z)$ 恒为常数即可，($z_0\in G$，z_0的邻域$B=\{z: |z-z_0|<\rho\}\subset G$)

因题设 $f(z)$ 在z_0的邻域内解析，故可展开成(Taylor)级数，即

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

因为 $f^{(n)}(z_0)=0$ $(n=1,2,\cdots)$，所以

$$f(z)=f(z_0).$$

又因为 $B=\{z: |z-z_0|<\rho\}\subset G$，由唯一性定理可知，在区域$G$内到处有 $f(z)\equiv f(z_0)$，即 $f(z)$ 在G内恒为常数。

§4·6 Laurent 级数

前面说过，幂级数是我们研究解析函数在解析点邻域内性质的有力工具。可是对于某些特殊的函数来说，它可以以圆心为奇点。这种函数在奇点邻域内就不能表示成幂级数，为此，我们自然要问，这类函数在奇点的邻域内能不能表示成级数？能不能以这种级数为工具来研究函数在其孤立奇点邻域内的性质呢？我们的回答是肯定的。Laurent (罗朗) 级数是我们研究函数在孤立奇点邻域性质的又一个重要工具。什么是 Laurent 级数呢？

1. Laurent 级数

我们称具有下列形式的级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+$$
$$+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+$$
$$+c_n(z-z_0)^n+\cdots \qquad (A)$$

为 Laurent级数，其中 z_0，c_n $(n=0, \pm1, \pm2\cdots)$ 都为复常数．这类级数不但含有$z-z_0$的非负的整数幂，而且还含有$z-z_0$ 的负整数幂．即它是由级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{B}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n \tag{C}$$

合成的．我们依次称为 Laurent 级数 (A)的解析部分和主要部分．

2. Laurent 级数的收数域及其和函数的解析性

由定义可知，Laurent 级数(A)是由两个级数合成的．因而它的收敛域是由这两个级数的公共收敛域组成的．

级数 (B) 是幂级数，其收敛域是圆域$B=\{z: |z-z_0|<R\}(0<R<\infty)$，这个级数在$|z-z_0|<R$内绝对收敛，在任意较小的闭圆域$\bar{B}=\{z: |z-z_0|\leqslant R'<R\}$ 上一致收敛．它在 $|z-z_0|<R$ 内定义着一个解析函数 $f_1(z)$，这是已知的．

对级数 (C)，我们引入一个变换

$$\zeta=\frac{1}{z-z_0}$$

并令 $c_{-n}=b_n$，于是 (C)变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n=b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_n\zeta^n+\cdots$$

显然这个级数在S_ζ平面上的收敛域，是一个以原点为心，以$\frac{1}{r}$为半径的圆域 $|\zeta|<\frac{1}{r}$，并且在$|\zeta|<\frac{1}{r}$内绝对收敛，在任意较小的闭

圆域 $|\zeta| \leqslant \frac{1}{r'} < \frac{1}{r}$ 上一致收敛。

换成原来的变量 z，则级数（C）在

$$|z-z_0|>r, \quad (0<r<+\infty)$$

内绝对收敛，且在 $|z-z_0| \geqslant r'>r$ 上一致收敛。并在 $|z-z_0|>r$ 上定义一个解析函数 $f_2(z)$。

自然，Laurent 级数(A)的收敛域是由这两个不等式

$$|z-z_0|<R \text{ 与 } |z-z_0|>r$$

的公共部分来确定的。如果 $R \leqslant r$，则由这两个不等式得不出 Laurent 级数(A)的收敛域。当且仅当 $R>r$ 时，则由这两个不等式定义了一个以 z_0 为心的环形区域 K

$$r<|z-z_0|<R$$

于其内 Laurent 级数(A)绝对收敛，且在任意较小的闭圆环域 $r<r' \leqslant |z-z_0| \leqslant R'<R$ 上一致收敛。故级数(A)在环形区域 K 内代表一个解析函数 $f(z)$。
且有

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)。$$

由以上的讨论，我们不难得出如下定理：

定理1 Laurent 级数（A）在环形区域 $r<|z-z_0|<R$ 内绝对收敛，在任意较小的闭圆环 $r<r' \leqslant |z-z_0| \leqslant R'<R$ 上一致收敛。其和函数是环域里的解析函数，且可逐项求导任意次。

值得注意的是，环形区域 $r<|z-z_0|<R$ 的半径 r 有时可以等于零，此时称 Laurent级数在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内收敛。同时，R 有时也可以等于无穷大"∞"。此时 Laurent 级数在 $r<|z-z_0|<\infty$ 内收敛，如果环形区域是由不等式 $0<|z-z_0|<\infty$ 所确定，则 Laurent 级数在复平面上除点 z_0 外收敛。

以上我们证明了 Laurent 级数在其收敛域内表示着一个解析函数。和幂级数一样，更重要的是证明这个事实之逆，即在环形区域内的解析函数，能够表示成 Laurent 展开式，并且这种展开式是唯

一的．下一节着重阐述这个事实．

习　　题(4·3)

1．求出下列函数以$z=0$为零点的阶数．

1) $z^2(e^{z^2}-1)$．

2) $z\sin z$．

3) $1-\cos z$．

2．设z_0是函数$f(z)$的m阶零点，又是$g(z)$的n阶零点，试问$f(z)+g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$及$f(z)/g(z)$在z_0点具有什么性质？

3．设$G=\mathrm{int}(c)$，c是简单闭曲线，$f(z)$在G内解析，在闭区域$\overline{G}$上连续，其模$|f(z)|$在c上是常数．试证：如果$f(z)$不恒等于一个常数，则$f(z)$在G内至少有一个零点．

4．假定$f(z)$是有界单连通区域G内的解析函数，且不为常数，试证任何一条属于G的闭曲线c只能包含着方程$f(z)=a$的有限多个根．

5．问是否存在着在$B=\{z: |z|<1\}$内解析，且在点$z_n=\frac{1}{n}$上取下列各值的函数$f(z)$？为什么？

1）$0, 1, 0, 1, \cdots$

2）$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \cdots$

3）$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

6．函数$\sin\frac{1}{1-z}$有无穷多个零点$z_n=1-\frac{1}{n\pi}, n=1,2,\cdots$但$\sin\frac{1}{1-z}$并不是常数，这与唯一性定理是否矛盾？

7．设解析函数$f(z)$有一个m阶零点z_0，问函数$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$在点$z_0$的性质如何？又设$z_1\in B(z_0,\delta)$并设在这邻域内$f(z)$

解析，试问函数$\varphi(z)=\int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在点 z_0 的性质如何？这里的积分路假定 $\subset B(z_0,\delta)$。

8．设一段实轴$L\subset G$，并设函数 $f_1(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 及 $f_2(z)=u(x,o)+iv\ (x,o)$都在G内解析，求证 $f_1(z)=f_2(z)$，$z\in G$。

§4·7 解析函数的 Laurent 展开式

1. Laurent 定理

定理1 设函数$f(z)$ 在环形区域K:$r<|z-z_0|<R$ ($r\geqslant0$, $R\leqslant+\infty$) 内解析，则 $f(z)$在 K内可以展开成Laurent级数（或展开式）

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta.\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

称为**Laurent 系数**，c_ρ为圆周c_ρ: $|z-z_0|=\rho$，ρ为一个满足 $r<\rho<R$ 的任意正数，并且展开式是唯一的。

【证明】 证明的关键是应用 Cauchy 积分公式和我们所熟知的公式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.\quad(|z|<1)$$

设z为环形区域K内任意的一点，我们总可以找到含于K内的两个圆周

$$C_{R'}:\ |z-z_0|=r'$$
$$C_{R'}:\ |z-z_0|=R'$$

使得z含在环形区域 K':$r<r'<|z-z_0|<R'<R$内，（如图4·3）。

因为 $f(z)$ 在 K 内解析，所以 $f(z)$ 在闭圆环 $\overline{K'}=\{z: r'\leqslant|z-z_0|\leqslant R'\}$ 上解析，由 Cauchy 积分公式有：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

其中 c_R' 与 c_r' 都取正向。

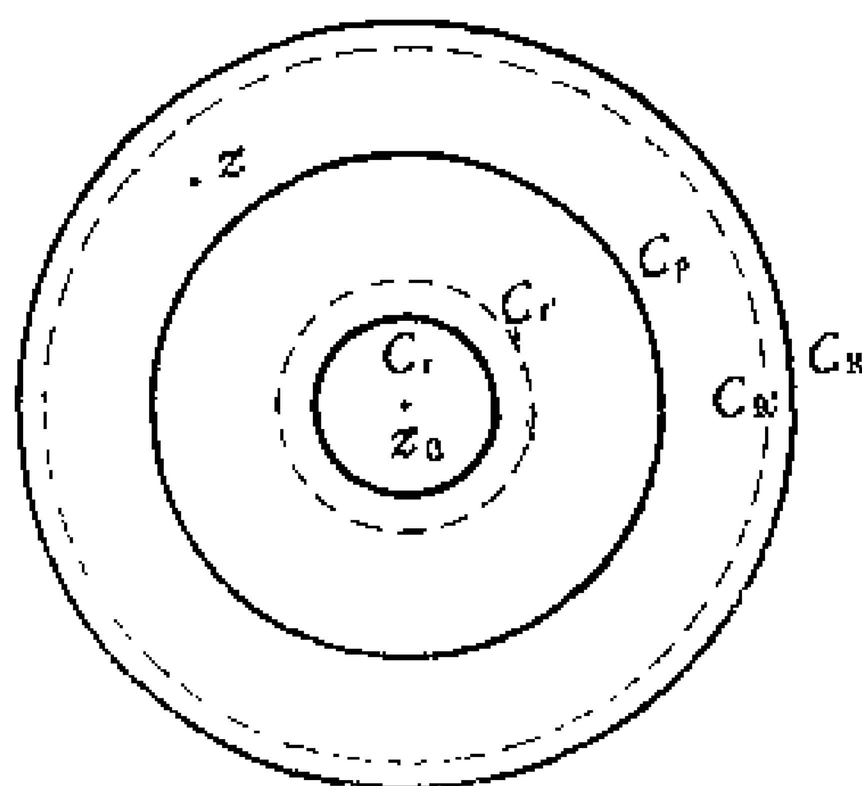


图 1·3

对于第一个积分，当 $\zeta\in c_{R'}$ 时，则有：

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$$

因而

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

这个收敛级数乘以 $f(\zeta)$ 后，对于圆周 $c_{R'}$ 上的 ζ，仍是一致收敛. 故可沿 $c_{R'}$ 逐项积分，而得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta.\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

对于第二个积分，当 $\zeta\in C_{r'}$ 时，有：

$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$$

因而

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-z+z_0}$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)\left(\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}-1\right)}$$

$$=\frac{-1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

这个收敛级数乘以 $f(\zeta)$ 后，对于圆周 $c_{r'}$ 上的ζ仍是一致收敛的，故可沿圆周$c_{r'}$逐项积分，并得

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{C_{r'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}}\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\right]d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{C_{r'}}\frac{f(\zeta)(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

其中

$$C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}}\frac{f(z)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta\qquad(n=1,\ 2,\cdots)$$

由于C_n与C_{-n}的被积函数在K内解析，故在圆环K'内作以 z_0 为心的圆周$C_\rho=\{z:|z-z_0|=\rho\}$，由 Cauchy 积分定理的推广定理可知：

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta$$

或统一写成

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

我们便得出函数 $f(z)$ 在圆环 K' 内的 Laurent 展开式如上。由于 r' 与 R' 可以分别趋近于 r 与 R，故得到函数 $f(z)$ 在圆环 K 内的 Laurent 展开式。

下面我们来证明 $f(z)$ 在 K 内的展开式是唯一的。即证在 K 内 $f(z)$ 不可能有两种不同的展开式，否则，设 $f(z)$ 在环形区域 K 内又可展开成下面的展开式：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \cdots)$$

于是

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

两端同乘以 $\frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}$，利用这两个级数在 C_ρ 的一致收敛性，故可沿 C_ρ 逐项积分，而得：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{n-m-1} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{n-m-1} d\zeta$$

应用前面已证得的公式（参看习题（3·1）习题6 及§3·2例7）

$$\int_{C_\rho} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & 当 n = 1 时; \\ 0, & 当 n \neq 1 时; \end{cases}$$

于是可有

$$2\pi i c_n = 2\pi i b_n.$$

$c_n = b_n$.

所以其展开式是唯一的。（证毕）

在具体问题中，如何将解析函数在其解析环域内展开成Laurent级数呢？下面我们来研究这种方法。

2. 解析函数展开成 Laurent级数的方法

① 直接展开法举例

【例1】试在原点将 $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$展开成级数。

【解】显然 $f(z)$ 在复平面 S_z 上除$z_0 = 0$外解析，即$f(z)$在环形区域 $K = \{z: 0 < |z| < \infty\}$ 内解析，现令 C_ρ 为圆周 C_ρ: $|z| = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$，根据定理1，则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$$

其中

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta, \quad n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \cdots$$

当$n \leqslant -3$时，函数$\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} = e^\zeta \zeta^{-n-3}$ 在 $C_\rho \cup \mathrm{int}(c_\rho)$上解析，故 $C_n = 0$.

当$n \geqslant -2$时，由高阶微商公式可知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta = \frac{1}{(n+2)!}\left[\frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}}(e^z)\right]_{z=0}$$

$$= \frac{1}{(n+2)!}$$

即

$$C_n = \frac{1}{(n+2)!}.$$

于是有

$$f(z)=\frac{1}{0!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2+\cdots+\cdots$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2+\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

为所求的级数。因为它在环域内展开，故为 Laurent 级数。

【例 2】将函数 $f(z)=e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$展成关于$z$的级数。

【解】函数 $f(z)=e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$在平面区域 $G=\{S_z\sim(0)\}$（即 $0<|z|<\infty$）内解析。因此 $f(z)$在此区域内可展成 Laurent 级数。

已知

$$(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

其中

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho}\frac{e^{\frac{a}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,$$

C_ρ为单位圆周：$C_\rho=\{z:\ |z|=1\}$。当 $\zeta\in C_\rho$ 时，$\zeta=e^{i\theta}$，$(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，于是

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{a}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}}{\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ia\sin\theta}}{e^{in\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(a\sin\theta-n\theta)\,d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(a\sin\theta-n\theta)\,d\theta$$

令$t=2\pi-\theta$，则 $\theta=2\pi-t$，$d\theta=-dt$，

$$\int_0^{2\pi}\sin(a\sin\theta-n\theta)\,d\theta=\int_{2\pi}^{0}\sin[a\sin(2\pi-t)-n(2\pi-t)](-dt)$$

$$=-\int_0^{2\pi}\sin[a\sin t-nt]\,dt$$

移项得

$$\int_0^{2\pi}\sin(a\sin\theta-n\theta)\,d\theta=0$$

于是

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(a\sin\theta-n\theta)\,d\theta,\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$$

即 $f(z)$ 在$0<|z|<\infty$内的展开式为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nz^n$$

其中，

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(a\sin\theta-n\theta)\,d\theta,\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

② **间接展开法举例**

所谓间接展开法就是利用已知的函数的展开式及级数运算等方法，将所给函数间接地展开成所求的级数，这样可使计算简单化。根据Laurent 定理及函数展开成的级数是唯一的， 这将与直接方法所得的结果是一致的。

【例3】将$f(z)=\frac{\sin z}{z}$在点 $z=0$ 展开成级数。

【解】因为已知

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5\cdots+\cdots$$

$(|z|<\infty)$，代入$\frac{\sin z}{z}$，即得

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$(0<|z|<\infty)$，为所求的级数。

【例 4】在例 1 中，用直接法将$f(z)=\frac{e^z}{z^2}$在原点展开的方法作起来比较复杂。可是我们如果采用间接法就简单得多（因此对于同一问题究竟用什么方法好，要看具体情况）。

首先把 e^z 写成：$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$ 然后把 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 代入$\frac{e^z}{z^2}$中便很快地得出 $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$在原点的展开式为：

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2+\cdots\quad(0<|z|<\infty)$$

【例 5】求 $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在环域

① $1<|z|<2$

② $0<|z-2|<\sqrt{5}$

的展开式。

【解】1）如果 $z\in\{1<|z|<2\}$，则

$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}$$

$$=\frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)}-\frac{2}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\ .$$

2）如果 $z\in\{0<|z-2|<\sqrt{5}\}$，则

$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{i}{z+i}+\frac{i}{z-i}$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)}-\frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{(2-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{(2+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n,$$

$$(0<|z-2|<\sqrt{5})$$

这个例子说明：同一个函数在不同的区域的展开式是不同的.

【例 6】把函数 $e^{\frac{1}{1-z}}$在 $1<|z|<\infty$内展开成罗朗级数.

【解】令 $\zeta=e^{\frac{1}{1-z}}$

于是有：

$$f(z)=e^{\zeta}=1+\zeta+\frac{1}{2!}\zeta^2+\frac{1}{3!}\zeta^3+\cdots\cdots$$

而 $\zeta=\frac{1}{1-z}$在$1<|z|<\infty$内的展开式为

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z\left(\frac{1}{z}-1\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\cdot(1<|z|<\infty)$$

所以所求的展开式为：

$$f(z)=1-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\frac{19}{120z^5}+\cdots$$

它是$1<|z|<\infty$内的 Laurent 级数。

§4·8 解析函数在孤立奇点邻域的性质

1. 解析函数在其有限孤立奇点邻域的性质

在§4·7中，我们研究了在一般环域内解析函数的 Laurent 展式，现在讨论一种特殊情形。

设 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域：$0<|z-z_0|<R$（即除去圆心 z_0 的某圆域）内解析，而在 z_0 点不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点。

如果 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则必存在正数 R，使得 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域：$0<|z-z_0|<R$ 内可展开成 Laurent 级数。例如，在§4·7中的例 1，例 2，例 3．0 是 $\frac{e^z}{z^2}$，$e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 及 $\frac{\sin z}{z^2}$ 的孤立奇点，它们在 0 的去心邻域的 Laurent 展式分别为：

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2+\cdots \qquad (0<|z|<\infty)$$

$$e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nz^n,\quad 其中\ C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-a\sin\theta)\,d\theta$$

$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$(0<|z|<\infty)$

从上面例题中，我们不难发现，在函数的展开式中，有的不含负幂项，有的含有有限项负幂项，有的含有无穷多项负幂项。或者说，函数 $f(z)$ 的 Laurent展式中，或不存在主要部分，或主要部分存在而是有限多项，或主要部分存在而为无穷多项。我们依次把函数 $f(z)$ 的孤立奇点 z_0（如为有限值）分别称为**可去奇点**，**极点**和**本性奇点**。

若z_0为 $f(z)$ 的极点，由定义可知，$f(z)$ 在点 z_0 的邻域内的 Laurent 展开式的主要部分应含有限多个项，故设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m},$$

其中若 $C_{-m}\neq 0$，这时称z_0为 $f(z)$的**m阶极点**，当$m=1$时，称z_0为**一阶极点**，或称**简单极点**。

显然，0 为$\frac{\sin z}{z}$的可去奇点，为$\frac{e^z}{z^2}$的二阶极点，为 $e^{\frac{z}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 的本性奇点。

下面分别讨论函数在各种孤立奇点邻域内的性质。

① **可去奇点**

定理1 $f(z)$ 以孤立奇点 z_0 为它的可去奇点的充分必要条件是：$f(z)$ 在z_0点的某一去心邻域内为有界。

【证明】 首先证明条件的必要性。

设z_0为 $f(z)$ 的可去奇点，由定义可知：

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+\cdots(0<|z-z_0|<R)$$

于是

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0$$

存在，即 $f(z)$ 在z_0的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho(\rho<R)$ 内为有界。

其次，要证明条件的充分性，只须证明，$C_n=0$ （$n=-1,-2,\cdots$）因为，设 $f(z)$ 在 z_0 的某一邻域内为有界，设其界为M，则有

$|f(z)|\leqslant M$, $(0<|z-z_0|<R)$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\qquad (n=-1,\ -2,\cdots)$$

而C_ρ为全含于 $0<|z-z_0|<R$内的圆周 C_ρ: $|z-z_0|=\rho$, ρ 可以充分小，于是由

$$|C_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho=\frac{M}{\rho^n}$$

可知：当 $n=-1,-2\cdots$, ρ 充分小时，$\rho^{-n}\to 0$,因此诸 $C_n=0$ $(n=-1,-2,\cdots)$，即 $f(z)$ 在 z_0 的 Laureut 展开式不含负幂项,依定义，z_0为可去奇点。 (证毕)

定理 2 $f(z)$ 的孤立奇点z_0，为它的可去奇点的充分与必要条件是：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$ (c_0 为一复数且不等于∞)

【证明】 设z_0为 $f(z)$ 的可去奇点，由定义可知，

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots\qquad (0<|z-z_0|<R)$$

于是有

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0\ \text{(有限常数)}$$

故，条件是必要的。

其次，证明条件是充分的。

因为，极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$ 存在，即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 $\rho(<R)$，当 $0<|z-z_0|<\rho$ 时，有：

$$\big||f(z)|-|c_0|\big|\leqslant|f(z)-c_0|<\varepsilon$$

成立。于是在z_0的某个邻域内有：

$$|f(z)|<|c_0|+\varepsilon=M$$

成立。即 $f(z)$ 为有界，z_0为$f(z)$ 的可去奇点。 (证毕)

由孤立奇点的定义，本来 $f(z)$ 在z_0 处没有意义。但在可去奇点的情形下，如果把极限

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0$$

定义为 $f(z)$ 在z_0的值，即定义 $f(z_0)=c_0$，则 $f(z)$ 在 z_0 就有定义，并且在 $|z-z_0|<R$内和幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

所确定的解析函数完全一致．于是z_0便是 $f(z)$ 的解析点了．即可以把可去奇点作为解析点看待．这样，我们便可以了解可去奇点"可去"的道理了．

②极点

定理 3 $f(z)$ 以孤立奇点z_0为m阶极点的充分与必要条件是：$f(z)$ 在z_0点的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<R$内，能表成

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m},$$

其中 $\lambda(z)$ 在$B=\{z: |z-z_0|<\rho<R\}$ 内解析，且 $\lambda(z_0)\neq 0$.

【证明】首先证明条件的必要性．

因为z_0为 $f(z)$ 的m阶极点，故 $f(z)$ 在$0<|z-z_0|<R$内有展开式

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

其中，$c_{-m}\neq 0$，即

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}.$$

其中，$\lambda(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_1(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m$
$$+\cdots+c_n(z-z_0)^{n+m}+\cdots$$

显然，$\lambda(z_0)=c_{-m}\neq 0$，$\lambda(z)$ 在z_0的邻域内是解析函数．

其次证条件的充分性．

因为 $f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}$

$$\lambda(z)=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots$$

由于 $\lambda(z_0)\neq 0$，所以 $b_0\neq 0$，代入得：

$$f(z)=\frac{b_0}{(z-z_0)^m}+\frac{b_1}{(z-z)^{m-1}}+\cdots+\cdots$$

可见$\frac{1}{(z-z_0)^m}$的系数 $c_{-m}=b_0\neq 0$，故z_0为 $f(z)$的m阶极点。（证毕）

定理 4 函数 $f(z)$ 以孤立奇点z_0为$f(z)$的m阶极点的充分与必要条件是：z_0为$g(z)=\frac{1}{f(z)}$的m阶零点。

【证明】 要证z_0为$g(z)=\frac{1}{f(z)}$的m阶零点，只须证$g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在z_0的邻域内解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$。

因为设 z_0 为 $f(z)$ 的m阶极点，即

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}.$$

其中，$\lambda(z)$ 在z_0的邻域内解析，且 $\lambda(z_0)\neq 0$，于是有：

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m}{\lambda(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

其中设$\frac{1}{\lambda(z)}=\varphi(z)$。由于 $\lambda(z)$ 在z_0的邻域内解析，且 $\lambda(z_0)\neq 0$，所以 $\varphi(z)$ 在z_0的邻域内解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，故 z_0 为 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$的m阶零点。

又因为z_0为$g(z)=\frac{1}{f(z)}$的m阶零点，所以$g(z)=\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在z_0的邻域内解析，且$\varphi(z_0)\neq 0$，所以$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}$，令$\frac{1}{\varphi(z)}=\lambda(z)$，则：

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}.$$

故z_0为 $f(z)$ 的m阶极点。（证毕）

定理5 函数 $f(z)$ 以孤立奇点 z_0 为 $f(z)$ 的极点的充分与必要条件是：$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$。

【证明】 设 z_0 为 $f(z)$ 的m阶极点，则在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内 $f(z)$ 为

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}.$$

其中 $\lambda(z_0)\neq 0$ 且 $\lambda(z)$ 在z_0的邻域内解析．显然有：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

其次，因为 $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$，故存在某一个正数 $\rho(\rho\leqslant R)$，使得在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内，$f(z)\neq 0$。

于是，令$F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，则 $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内解析，且 $F(z)\neq 0$。但 $\lim_{z\to z_0} F(z)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$，所以$z_0$为 $F(z)$的可去奇点．从而在 $0<|z-z_0|<\rho$内，$F(z)$ 的展式为

$$F(z)=\frac{1}{f(z)}=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots$$

总有 $\lim_{z\to z_0} F(z)=b_0=0$。由于在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内，$F(z)\neq 0$，于是 $b_0=b_1=\cdots=b_{m-1}=0$，$b_m\neq 0$.

$$\begin{aligned}F(z)&=b_m(z-z_0)^m+\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots\\&=(z-z_0)^m(b_m+\cdots+b_n(z-z_0)^{n-m}+\cdots)\\&=(z-z_0)^m\varphi(z).\end{aligned}$$

其中 $\varphi(z)$ 在z_0的邻域内解析，且$\varphi(z_0)\neq 0$。所以z_0为 $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$的m阶零点．z_0为 $f(z)$ 的m阶极点．（证毕）

③本性奇点

定理6 设z_0为 $f(z)$ 的孤立奇点，z_0为 $f(z)$ 的本性奇点的充分与必要条件是：不存在有限或无穷的极限$\lim_{z\to z_0} f(z)$，即当 $z\to z_0$

时，$f(z)$ 即不趋于∞，，也不趋于一个有限值。这可由可去奇点及极点的特性导出。

【例1】对于 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}, z=0$ 是它的本性奇点，这是因为：当z沿正实轴→0时，$e^{\frac{1}{z}}\to\infty$；当z沿负实轴→0时，$e^{\frac{1}{z}}\to 0$，可见 $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}$ 不存在。

2. 解析函数在其无穷远点邻域的性质

设函数 $f(z)$ 在区域 $k=\{z: R<|z|<\infty\}$ 内为解析，则称 **$z=\infty$为 $f(z)$ 的一个孤立奇点。**

关于函数 $f(z)$ 在$z=\infty$的邻域B: $|z|>R$的Laurent 展开式，及其在$z=\infty$的性质的讨论，我们是借助于变量替换：

$$\zeta=\frac{1}{z}$$

来定义和进行讨论的。

由于变换 $\zeta=\frac{1}{z}$建立着S_z平面和S_ζ平面之间的一一对应关系，点$z=\infty$与$\zeta=0$相对应，$|z|>R$ 与 $|\zeta|<\rho\left(=\frac{1}{R}\right)$相对应，故

$$f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=F(\zeta),\quad \zeta=\frac{1}{z}$$

则我们可应用 $F(\zeta)$ 在原点邻域 B：$|\zeta|<\rho\left(=\frac{1}{R}\right)$的展开式及其性质来定义和研究 $f(z)$ 在$z=\infty$邻域的展开式及性质。

设 $F(\zeta)$ 在 B：$|\zeta|<\rho\left(=\frac{1}{R}\right)$内解析，且

$$F(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta^n.$$

则相应地称 $f(z)$ 在 $|z|>R$内解析，且

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^{-n}.$$

如果 $F(\zeta)$ 以 $\zeta=0$ 为孤立奇点，且在 $0<|\zeta|<\rho\left(=\frac{1}{R}\right)$ 内有

$$F(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}\zeta^{-n}$$

相应地称 $f(z)$ 以 $z=\infty$ **为孤立奇点**，$f(z)$ 在$R<|z|<\infty$内展开成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^n$$

称之为 $f(z)$ 在$z=\infty$邻域内的 Laurent 展开式。

值得注意的是：$f(z)$ 在$z=\infty$邻域的 Laurent 级数的解析部分是负幂项，其主要部分是正幂项。

同样，我们以 $f(z)$ 在孤立奇点$z=\infty$邻域的 Laurent 级数的主要部分（正幂项部分）不存在，或存在而只含有限项，或存在而含有无穷多项，把 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 分为可去奇点，极点和本性奇点三类。

习　题(4·1)

1．求函数 $f(z)=\frac{1}{z-2}$在点$z=0$及点 $z=\infty$邻域的展开式。

2．求函数 $f(z)=\frac{z+1}{z^2(z-1)}$在$0<|z|<1$；$1<|z|<\infty$ 的展开式。

3．求函数$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$在 $z=0$，$z=a$，$z=b$ 的邻域的展开式。（其中$0<|a|<|b|$）。

4. 求函数 $f(z)=\frac{e^z}{z(z^2-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式.

5. 求函数 $f(z)=\log\frac{z-a}{z-b}$在点 $z=\infty$的邻域的展开式.

6. 求函数 $f(z)=\sqrt{(z-1)(z-2)}$在 $|z|>2$ 的展开式.

7. 证明$z=0$为$\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}$的一阶极点, $z=\pm 2i$ 为$\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}$的二阶极点.

8. 证明 $z=0$ 为 $ze^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点.

9. 证明 $z=0$, 当 $n\geqslant 1$时为$\frac{z^n}{e^z-1}$的可去奇点; 当$n\leqslant 0$时为$\frac{z^n}{e^z-1}$的 $|n|+1$阶极点; $z=2k\pi i$ 为$\frac{z^n}{e^z-1}$的一阶极点.

10. 证明$z_k=\frac{1}{k\pi}$ $(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$为$\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$ 的本性奇点.

11. 证明 $z=\infty$ 为 $e^{-\frac{1}{z^2}}$的可去奇点.

12. 证明 $z=\infty$为 $\cos z-\sin z$ 的本性奇点.

13. 设函数 $f(z)$ 在扩充复平面上只有孤立奇点, 则奇点的个数必为有限个; 相反, 设 $f(z)$ 在扩充平面上只有有限个奇点, 则此奇点必为孤立奇点, 试证之.

14. 设函数 $f(z)$ 不恒为常数, 且在 $0<|z-a|<R$ 内解析, 如果 a是 $f(z)$ 的零点的极限点, 试证a必为 $f(z)$的本性奇点.

学　习　指　导

如书中所论，这一章我们将给出复变函数级数概念．并以级数为工具，进一步揭示复变解析函数的性质．这就需要我们清楚地了解本章的基本内容与要求．

一、内容与要求

本章的基本内容是：①幂级数，Laurent级数的概念及其性质；②解析函数与幂级数，Laurent级数的关系；③零点的孤立性和唯一性定理；④解析函数在解析点及其孤立奇点（有限远点或无穷远点）的邻域内的性质等．要求读者：①熟练地把解析函数在圆域内与环域内展开成幂级数或Laurent级数；②熟练掌握判别孤立奇点的类别的方法；③掌握以级数为工具研究解析函数的方法；④了解解析函数唯一性定理的意义，弄懂“唯一性定理”的证明，熟记§4·5诸定理条件与结论；⑤用幂级数定义解析函数．

二、例　　题

（幂级数与Laurent级数）是研究解析函数的重要工具．为使用好这些工具，我们不可回避的一个问题就是：“将函数 $f(z)$ 展开成级数”．关于这个问题，我们必须注意以下几点：

①将函数 $f(z)$ 展开成什么级数？是幂级数还是Laurent级数？

②在哪些区域里展开？区域不同展开式也不一样．

③能不能展开？怎样展开？

④若能展开，展开式是不是唯一的？关于这些问题书中已作了回答，不用赘述了．现在只提出几点供读者参考．

其一，“在点 z_0 展开”与“在点 z_0 的邻域展开”．

当z_0为 $f(z)$ 的解析点时，z_0 的邻域是指圆域 $|z-z_0|<R$，$f(z)$ 可展开成幂级数，它们是一回事。当z_0为$f(z)$的孤立奇点时，z_0 的邻域是指去心圆域 $0<|z-z_0|<R$，$f(z)$ 可以展开成 Laurent 级数，其中 R 依下面的方法确定，R 等于z_0 到 $f(z)$离z_0最近奇点z' 的距离，即 $R=d(z_0, z')$。

其二，展开方法。"将 $f(z)$ 展开成级数"的方法如书上所指出的，与数学分析里将函数展开成幂级数的方法有很多相似之处。展开方法书上介绍了直接展开法和间接展开法，后者是我们常用的方法。譬如：①是利用已知函数的展开式代入所给的函数中。②是把在非原点的展开问题，通过变量替换转化为在原点的展开问题。③运用逐项微分和逐项积分法。等等。

【例1】 试将 $f(z)=\sec z$ 在点z_0展开成级数。

【解】 因为 $z=0$ 为$f(z)$的解析点，所以 $f(z)$ 在$z=0$可以展开成幂级数。由于$\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$，故$\sec z$的有限奇点为$\cos z=0$ 的零点$z_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$。而$z'=\pm\dfrac{\pi}{2}$为到 $z=0$ 最近的奇点。所以 $R=d\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$。故$\sec z$在$z=0$的展开式就是在圆域 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$内的展开式。

设 $\sec z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n z^n$

则，

$$\sec(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(-z)^n$$

但因 $\sec(-z)=\sec z$，

$$C_1=C_3=C_5=\cdots=0$$

故

$$\sec z = C_0 + C z^2 + C_4 z^4 + \cdots$$

所以有：

$$1 = \sec z \cdot \cos z = (C_0 + C_2 z^2 + C_4 z^4 + \cdots + \cdots)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots\right)$$

由对角线法，知：

$$1 = \sec z \cdot \cos z = C_0 + \left(C_2 - \frac{1}{2!}C_0\right)z^2 + \left(C_4 - \frac{1}{2!}C_2 + \frac{1}{4!}C_0\right)z^4 + \cdots$$

于是，$C_0 = 1$，$C_2 - \frac{1}{2!}C_0 = 0$，$C_4 - \frac{1}{2!}C_2 + \frac{1}{4!}C_0 = 0$，$\cdots$

得：$C_0 = 1$，$C_2 = \frac{1}{2!}$，$C_4 = \frac{5}{4!}$，$\cdots$

故 $\sec z = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \cdots$

本题还可以用求导数来定系数$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$的方法来解，读者可试之。

【例 2】 将$f(z) = \frac{z}{z+2}$在点 $z = 1$ 处展开成级数。

【解】 因为$f(z) = \frac{z}{z+2}$的有限奇点仅为 $z = -2$，所以 $z = 1$为$f(z)$ 的解析点，故$f(z) = \frac{z}{z+2}$在$z = 1$的邻域内可以展开成幂级数。又由 $z = 1$ 到 $z = -2$ 的距离$d(1, -2) = 3$，故收敛半径$R = 3$。所以 $f(z)$ 可在圆域 $B:\{z: |z-1| < 3\}$ 内展开成幂级数。由于在点 $z = 1$ 展开，我们将 $f(z) = \frac{z}{z+2}$变形为：

$$\frac{z}{z+2} = \frac{z-1+1}{z-1+3} = \frac{z-1}{3+(z-1)} + \frac{1}{3+(z-1)} \qquad (1)$$

由于 $|z-1|<3$，$\dfrac{|z-1|}{3}<1$

于是，$\dfrac{z-1}{3+(z-1)}=\dfrac{z-1}{3\left(1+\dfrac{z-1}{3}\right)}=\dfrac{z-1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{z-1}{3}\right)^n$

其中应用了 $\dfrac{1}{1-z}\overset{|z|<1}{=\!=\!=}\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$.

$$\frac{1}{3+(z-1)}=\frac{1}{3\left(1+\dfrac{z-1}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n .$$

代入（1），$\dfrac{z}{z+2}=\dfrac{z-1}{3+(z-1)}+\dfrac{1}{3+(z-1)}$

$$=\frac{z-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{3}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}.$$

为所求的展开式.

在解本题的过程中，读者可以看到，我们在开始时要判定 $f(z)$ 在 $|z-1|<3$ 内可展成幂级数，不仅有其理论上的意义（回答了能否展开的问题），而且在展开方法上，也起了保证作用，因为，得到了 $|z-1|<3$ 这样一个不等式，使本题的方法就有保证了．否则须另寻求其他解法．总之，开始确定出所给函数在指定点的可展范围（即求出 R），往往可为我们利用 $\dfrac{1}{1-z}\overset{|z|<1}{=\!=\!=}\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 提供了保证，关于这一点，读者在将函数展成 Laurent 级数的例题中业已见到.

我们还可以采用逐项微分或逐项积分的方法求幂级数展开式，

其收敛半径不变。

【例 3】 将函数$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$在点$z=0$展开成级数。

【解】 因为 $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{(1-z)^2}$

又在单位圆域 B: $|z|<1$ 内

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

内闭的一致收敛，所以逐项微分可得

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{d}{dz}(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}+\cdots$$

即 $$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}.\qquad (|z|<1)$$

【例 4】 将函数 $\operatorname{arctg}z$ 在$z=0$展开成级数。

【解】 由于

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\qquad(|z|<1)$$

故

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=1+(-z^2)+(-z^2)^2+\cdots+(-z^2)^n+\cdots$$

$$=1-z^2+z^4-z^6+\cdots+(-1)^nz^{2n}+\cdots$$

$$(|z|<1)$$

且在$|z|<1$内内闭的一致收敛。我们沿$|z|<1$内的任意一条积分路将上式逐项积分，则得：

$$\operatorname{arctg}z=\int_0^z\frac{1}{1+z^2}dz=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\cdots\quad(|z|<1)$$

【例 5】 将 $e^z\cos z$ 与 $e^z\sin z$ 在S_z平面内展开成级数。

【解】由于所给定的两个函数，在 $|z|<\infty$内解析，故它们均可展开成幂级数。

依 Euler 公式

$$e^z\cos z+ie^z\sin z=e^z(\cos z+i\sin z)$$

$$=e^{(1+i)z}=e^{e\mathrm{Log}(1+i)+\mathrm{Log}z}$$

$$=e^{e\log\sqrt{2}+i\arg(1+i)+\log z}$$

$$=e^{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot z)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)z^n \qquad ①$$

及

$$e^z\cos z-ie^z\sin z=e^z(\cos z-i\sin z)$$

$$=e^z\cdot e^{-iz}=e^{(1-i)z}=e^{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot z}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot z)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)z^n \qquad ②$$

所以

①＋②得：

$$e^z\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}\cdot z^n,$$

①－②得：

$$e^z\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\cdot z^n.$$

【例6】将 $f(z)=\sin^2 z$ 在 $z=0$ 处展开成级数。

【解法1】因为 $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$

故 $$\sin^2 z = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4}.$$

而 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{2iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n i^n z^n}{n!}$$

$$e^{-2iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n i^n z^n}{n!}$$

因此 $$\sin^2 z = -\frac{1}{4}(e^{2iz} + e^{-2iz} - 2)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}.$$

【解法 2】因为 $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z)$（三角中的半角公式）

而 $$\cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

故 $$\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot z^{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}.$$

【解法 3】 逐项求积法.

因为 $(\sin^2 z)'=2\sin z\cos z=\sin 2z$.

所以 $\sin^2 z=\int_0^z \sin 2z\,dz$

而级数 $\sin 2z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$在 $z=0$ 邻域内一致收敛，故可以逐项积分易得.

$$\sin^2 z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-1)^n\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}dz$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}.$$

【解法 4】 因为 $\sin^2 z=\sin z\cdot\sin z$

而 $\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

所以 $\sin^2 z=\sin z\cdot\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$=\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots\right)\cdot$$

$$\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots\right)$$

利用对角线法

得

$$\sin^2 z=z^2-\frac{2}{3!}z^4+\left(\frac{1}{3!\,3!}+\frac{2}{5!}\right)z^6+\left(-\frac{2}{7!}-\frac{1}{3!\,5!}\right)z^8\cdots\cdots$$

	0	1	0	$\frac{-1}{3!}$	0	$\frac{1}{5!}$	0	$\frac{-1}{7!}$	···
0	0	0	0	0	0	0	0	0	···
1	0	1	0	$\frac{-1}{3!}$	0	$\frac{1}{5!}$	0	$\frac{-1}{7!}$	···
0	0	0	0	0	0	0	0	0	···
$\frac{-1}{3!}$	0	$\frac{-1}{3!}$	0	$\frac{1}{3!\,3!}$	0	$\frac{-1}{3!\,5!}$	0	$\frac{1}{3!\,7!}$	···
0	0	0	0	0	0	0	0	0	···
$\frac{1}{5!}$	0	$\frac{1}{5!}$	0	$\frac{-1}{3!\,5!}$	0	$\frac{1}{5!\,5!}$	0	$\frac{-1}{5!\,7!}$	···
0	0	0	0	0	0	0	0	0	···
$\frac{-1}{7!}$	0	$\frac{-1}{7!}$	0	$\frac{1}{3!\,7!}$	0	$\frac{-1}{5!\,7!}$	0	$\frac{1}{7!\,7!}$	···
···	···	···	···	···	···	···	···	···	···

$$=\frac{2}{2!}z^2-\frac{2^3}{4!}z^4+\frac{2^5}{6!}z^6-\frac{2^7}{8!}z^8+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}.$$

【解法 5】设 $\sin^2 z=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$。如能求得 c_n，问题便得以解决。

为此设 $f(z)=\sin^2 z$

显然

$f(z)=\sin^2 z \qquad f(0)=0$

$f'(z)=\sin 2z \qquad f'(0)=0$

$f''(z)=2\cos 2z \qquad f''(0)=2$

$f'''(z)=-4\sin 2z \qquad f'''(0)=0$

$f^{(4)}(z)=-8\cos 2z \qquad f^{(4)}(0)=-8$

$$f^{(5)}(z)=16\sin 2z,\qquad f^{(5)}(0)=0;$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots$$

所以，$\sin^2 z=f(0)+f'(0)z+\dfrac{f''(0)}{2!}z^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}z^3+\cdots$

$$=\frac{2}{2!}z^2-\frac{2^3}{4!}z^4+\frac{2^5}{6!}z^6+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}.$$

在解题过程中，我们要注意一题多解。关键是要灵活运用所学过的知识。

【例 7】将函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$分别在 $z=-i$ 与 $z=\infty$ 展开成级数。

【解】因为 $f(z)$ 的有限奇点为 $z=i$ 与$z=-i$，所以 $f(z)$在孤立奇点 $z=-i$ 可以展开成 Laurent 级数。又因 $-i$ 到另一奇点 $z=i$ 的距离为 2，所以应在环域 $0<|z+i|<2$ 内展开。由于 $0<\left|\dfrac{z+i}{2i}\right|<1$，于是，

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{z-i}$$

$$=\frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{z+i-2i}=\frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{2i\left(\dfrac{z+i}{2i}-1\right)}$$

$$=\frac{-1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}.$$

又由于 $f(z)$ 以 $z=\pm i$ 为有限奇点，故 $f(z)$ 在$1<|z|<\infty$ 内解析，因而 $f(z)$ 在$1<|z|<\infty$内可以展开成 Laurent级数。即 $f(z)$ 可以在$z=\infty$处展开成 Laurent级数。因为 $|z|>1$，所以$\dfrac{1}{|z|}<1$

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2(n+1)}}.$$

即为所求。

这里我们也可以这样做，令 $\zeta=\frac{1}{z}$，则 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$在 $z=\infty$的 Laurent 展开式转化为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\zeta^2}{\zeta^2+1}$在 $\zeta=0$ 处的幂级数展开式。而 $\zeta=0$ 为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\zeta^2}{\zeta^2+1}$的解析点，$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\zeta^2}{\zeta^2+1}$在 $\zeta=0$处的幂级数展开式，亦即把$\frac{\zeta^2}{\zeta^2+1}$在 $|\zeta|<1$内展开成幂级数，而得：

$$\frac{\zeta^2}{\zeta^2+1}=\zeta^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^{2(n+1)}.$$

将 $\zeta=\frac{1}{z}$代入，即得$\frac{1}{z^2+1}$在 $z=\infty$的 Laurent 展开式为

$$\frac{1}{z^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{2(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{-2(n+1)}}.$$

从上题的解法过程中，我们又不难看到，后一种方法不如前一种方法来得简单。尽管如此，但它毕竟为我们提供了一种展开方法，并且这种方法对于某些问题来说也不失为一种好的方法。

【例 8】将 $f(z)=e^{\frac{z}{1+z}}$在 $z=\infty$邻域内展开。

【解】令 $z=\frac{1}{\zeta}$，则得 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=e^{\frac{1}{1+\zeta}}$。于是问题归结为求

$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$在 $\zeta=0$ 处的展开式。由于 $\zeta=0$ 为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$的解析点，故 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$在 $\zeta=0$ 的幂级数即为 $f(z)$ 在 $z=\infty$的 Laurent 级数。因为 $\zeta=-\frac{1}{2}$为$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$仅有的一个有限奇点，故$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$在$|\zeta|<\frac{1}{2}$中解析，于是它可以展开成幂级数。现令$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=F(\zeta)$

$$F'(\zeta)=-\frac{2}{(1+2\zeta)^2}e^{\frac{1}{1+2\zeta}}$$

$$F''(\zeta)=e^{\frac{1}{1+2\zeta}}\left[\frac{8}{(1+2\zeta)^3}+\frac{4}{(1+2\zeta)^4}\right],$$

等等，故有

$$F(0)=e,\ F'(0)=-2e,\ F''(0)=12e,\ \cdots$$

由此得

$$F(\zeta)=e(1-2\zeta+6\zeta^2+\cdots).$$

将 $\zeta=\frac{1}{z}$代入上式就得到在 $|z|>2$ 里的展开式

$$e^{\frac{z}{z+2}}=e\left(1-\frac{2}{z}+\frac{6}{z^2}+\cdots\right)$$

它是$e^{\frac{z}{z+2}}$在 $z=\infty$邻域的 Laurent 级数。

【例 9】 将 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$在点 $z=1$的邻域内展开成Laurent 级数。

【解】 因为 $z=1$ 为 $f(z)$ 的有限孤立奇点，所以 $f(z)$ 能在 $0<|z-1|<\infty$内展开成 Laurent 级数。因为：

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(\frac{z-1+1}{z-1}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$$

$$=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

令 $\zeta=\frac{1}{z-1}$，于是 $\cos\frac{1}{z-1}=\cos\zeta$，　$\sin\frac{1}{z-1}=\sin\zeta$。从而

$\cos\frac{1}{z-1}$与 $\sin\frac{1}{z-1}$在$z=1$处的 Laurent级数展开式将归结为 $\sin\zeta$，$\cos\zeta$ 在 $\zeta=\infty$处的 Laurent 展开式。但是由于 $\cos\zeta,\sin\zeta$在$\zeta=\infty$的展开式与 $\zeta=0$ 处的展开式相同，所以

$$\cos\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

把 $\zeta=\frac{1}{z-1}$代入，分别得

$$\cos\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{-2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!\,(z-1)^{2n}}.$$

$$\sin\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}}$$

于是 $\sin\frac{z}{z-1}$在 $z=1$ 处的展开式为

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z-1)^{2n}}+$$

$$\cos1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin1}{(2n)!\,(z-1)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}}.$$

在这里值得指出的是，在例 8，例 9 的解法中都用到这样的事实：

$\cos z$， $\sin z$， e^z 等函数在原点的幂级数可以看作它们在 $z=\infty$ 的 Laurent级数．也就是由于这个原因，故求 $\cos\frac{1}{z-1}$在 $z=1$ 的 Laurent级数与求 $\cos\zeta$ 在 $\zeta=\infty$的 Laurent 级数一致．又该级数与 $\cos\zeta$ 在 $\zeta=0$ 的幂级数相同，所以只须用$\frac{1}{z-1}$替换 $\cos\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}$中的 ζ，就能得到 $\cos\frac{1}{z-1}$在$z=1$的Laurent级数

$$\cos\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z-1)^{2n}}.$$

同样， $\sin\frac{1}{z-1}$在 $z=1$ 处的Laurent 级数也是这样得到的．

从本章的学习中，我们可以看到：确定函数的孤立奇点的类型，对于研究函数在孤立奇点邻域的性质是很重要的．不仅如此，对于孤立奇点类型的识别，在下一章学习留数理论时，也是十分重要的．为了更好的识别孤立奇点的类型，特提出以下几点，请加注意．

1°．把书中所给的定义、定理作为一种判别孤立奇点类型的方法使用时，我们必须清楚地意识到，它们只是判别孤立奇点类型的方法．换句话说，只有事先确定了所考查的点是函数的孤立奇点后，才可以使用书上所列举的方法．

事实上，就本书所遇到的奇点情况来看，可以列表如下：

$$\text{奇点}\begin{cases}\text{孤立奇点}\left.\begin{cases}\text{可去奇点}\\ \text{极　　点}\\ \text{本性奇点}\end{cases}\right\}\text{（单值函数的）}\\ \text{非孤立奇点}\\ \text{枝　点（多值函数的，将在第八章讲到）}\end{cases}$$

2°．用定义来判别 $z=\infty$的类型，要依其 Laurent 级数所含

的正幂项为标准；而在有限点时，则依Laurent 级数所含负幂项为标准。

【例10】设 $f(z)=\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$，试问 $z=0$ 与 $z=\infty$ 分别为 $f(z)$ 的何种奇点？

【解】$z=0$ 与 $z=\infty$ 均为 $f(z)$ 的孤立奇点，而 $f(z)$ 在 $z=0$ 与 $z=\infty$ 的 Laurent 级数均为

$$\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}}+\cdots\right)+\frac{1}{z^2}.$$

所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。（因为展开式中含有无穷多项负幂项）； $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点。（因其展开式中只含有负幂项，而不含正幂项）．

值得注意的是：判别 $z=\infty$ 的类别时，如果仍以负幂项为标准的话，那就会得出 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点的错误结论！

【例11】设 $f(z)=\frac{\sin z}{z-\pi}$，试确定奇点 $z=\pi$ 的类别。

【解】∵ $\lim\limits_{z\to\pi}\frac{\sin z}{z-\pi}=\lim\limits_{z\to\pi}\frac{\sin(z-\pi)}{\pi-z}=-1$,

由§4·8定理 2 知：$z=\pi$ 为可去奇点。

【例12】试求出 $f(z)=\text{ctg}\frac{1}{z}$ 的全部有限奇点，并确定其类别。

【解】因为 $\text{ctg}\frac{1}{z}=\frac{\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}$，所以 $f(z)=\text{ctg}\frac{1}{z}$ 的全部奇点只能

出自于使$\frac{1}{z}$无意义，及使 $\sin\frac{1}{z}=0$ 的点，因为

$z_0=0$ 使 $\frac{1}{z}$无意义，$z_k=\frac{1}{k\pi}(k=\pm1,\ \pm2,\cdots)$ 使 $\sin\frac{1}{z}=0$ ，

所以 $z_0=0$，$z_k=\frac{1}{k\pi}$为 $f(z)=\mathrm{ctg}\ \frac{1}{z}$的全部有限奇点。又因为：

$$\left(\cos\frac{1}{z}\right)\Big|_{z_k}\neq0,\ \left(\sin\frac{1}{z}\right)\Big|_{z_k}=0\ \text{而}\left(\sin\frac{1}{z}\right)'\Big|_{z_k}\neq0$$

所以$z_k=\frac{1}{k\pi}$为 $f(z)=\mathrm{ctg}\frac{1}{z}$的一阶极点。

并且

$\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0=z_0$。所以$z_0=0$不是$f(z)$ 的孤立奇点，而是 $f(z)$ 的非孤立奇点，或者说 $z_0=0$ 为 $f(z)$ 的诸极点的凝聚点。

【例13】 如果z为任意一复数，试证：

$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1<|z|e^{|z|}$$

【证明】 因为 $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，　　　$(|z|<\infty)$

所以 $$\left|e^z-1\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}-1$$

又因为：

$$e^{|z|}-1=|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^n+\cdots$$

$$=|z|\left(1+\frac{1}{2!}|z|+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^{n-1}+\cdots\right)$$

$$\leqslant|z|\left(1+|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots\right)$$

$$=|z|e^{|z|}.$$

所以 $|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant|z|e^{|z|}$

【例14】计算积分：$\int_0^z e^{z^2}dz$。

【解】因为在 $|z|<\infty$内，e^{z^2} 可以展开成幂级数：

$$e^{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}.$$

并且$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$在 $|z|<\infty$内一致收敛。故级数在 $|z|<\infty$内可以沿任意一条曲线逐项积分。所以有

$$\int_0^z e^{z^2}dz=\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}\right)dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{z^{2n}}{n!}dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}. \qquad |z|<\infty$$

【例15】设函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在z_0处分别有m阶及n阶极点。试问 $f(z)+g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$ 及$g(z)/f(z)$ 在z_0具有什么性质？

【解】因为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 z_0 为m阶与n阶极点，所以有：

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+f_1(z),\ a_{-m}\neq 0$$

$$g(z)=\frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{b_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots+\frac{b_{-1}}{z-z_0}+g_1(z),\ b_{-n}\neq 0$$

其中 $f_1(z)$，$g_1(z)$ 分别表示展开式中的解析部分。于是：

$$f(z)+g(z)=\left[\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots\right]+$$

$$+\left[\frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{b_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots\right]$$

当 $m\neq n$ 时，z_0为 $f(z)+g(z)$ 的 $\max\{m, n\}$阶极点。

当 $m=n$ 时，则

$$f(z)+g(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}[(a_{-m}+b_{-n})+(a_{-(m-1)}+b_{-(n-1)})(z-z_0)+\cdots]$$

故

当 $a_{-m}+b_{-n}\neq 0$ 时，z_0为 $f(z)+g(z)$ 的m阶极点。

当 $a_{-m}+b_{-n}=0$ 时，z_0为 $f(z)+g(z)$ 的低于m阶极点，或为可去奇点。

$$f(z)\cdot g(z)=\left[\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots\right]\cdot\left[\frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{b_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots\right]=\frac{a_{-m}\cdot b_{-n}}{(z-z_0)^{m+n}}+\cdots$$

$$(a_{-m}\cdot b_{-n}\neq 0)$$

故 z_0 为 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点。

$$g(z)/f(z)=\left[\frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{b_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots\right]\Big/\left[\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots\right]$$

$$=(z-z_0)^{m-n}\frac{b_{-n}+b_{-(n-1)}(z-z_0)+\cdots}{a_{-m}+b_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots}$$

当 $n>m$ 时，z_0为 $g(z)/f(z)$ 的$n-m$ 阶极点，

当 $n<m$ 时，z_0为 $g(z)/f(z)$ 的$m-n$阶零点，

当 $n=m$ 时，z_0为 $g(z)/f(z)$ 的可去奇点。

必须注意，熟练掌握唯一性定理的条件和结论，了解唯一性定理的意义，会用唯一性定理说明某些问题，这些对我们学习第七章解析开拓是很重要的。

【例16】是否存在在原点解析，且满足下列条件的解析函数 $f(z)$？

1) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$， $f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$.

2) $f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=0$, $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$.

【解】首先考虑 1），在原点解析，且满足$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$，$f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$的解析函数 $f(z)$ 存在，且为 $f(z)=z^2$。

事实上，由于$\left\{\frac{1}{n}\right\}$与$\left\{-\frac{1}{n}\right\}$$(n=1,2,\cdots)$，以 0 为聚点，由唯一性定理可知，$f(z)=z^2$ 这个函数在 $z=0$ 解析，且满足 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$的唯一函数。而且这个函数也满足条件$f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$。故$f(z)=z^2$是在原点解析，且满足$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$，$f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$ 的解析函数。

其次考虑 2），在原点解析，且满足$f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=0$, $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$的函数是不存在的。

事实上，由于 $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$与$\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$，都以 0 为凝聚点，由唯一性定理可知，$f(z)=z$ 是在原点解析且满足$f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$的唯一函数，但 $f(z)=z$ 不可能满足条件 $f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=0$ $(n=1,2,\cdots)$。因此在原点解析，同时满足$f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=0$, $f\left(\frac{1}{2n}\right)$

$=\frac{1}{2n}$的函数不存在。

三、习题解答

习　题（4·1）

1．【证明】

1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$，

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛。

2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{1}{e}<1$，

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛。

2．【证明】

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{in}\neq 0$，依级数收敛的必要条件。

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{in}$发散。

3．【证明】

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$为绝对收敛。

4．【证明】

因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在点集E上一致收敛，设其和函数为 $f(z)$。所

以对任意给定的 $\varepsilon>0$，都有一个与 z 无关的正整数N存在，使得当 $n\geqslant N$ 时，对所有点 $z\in E$，不等式：

$$|f(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{m}$$

恒成立。

又因为：

$$|\varphi(z)|<m,\quad z\in E$$

故有

$$|f(z)\varphi(z)-S_n(z)\varphi(z)|=|\varphi(z)|\ |f(z)-S_n(z)|<m\cdot\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon$$

即

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)\varphi(z)$ 在点集E上一致收敛。

5．【证明】

当z取不为零的实数时，我们有：

$\left|\frac{1}{1+z^2}\right|<1$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{1+z^2}\right|^n$收敛，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z^2}{(1+z^2)^n}\right|$也收敛。

当 $z=0$ 时，级数显然收敛于零。因此$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^2}{(1+z^2)^n}$ 沿实轴绝对收敛。

又 $R_n(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^{n+1}}+\frac{z^2}{(1+z^2)^{n+2}}+\cdots$

$$=\frac{z^2}{(1+z^2)^{n+1}}\left[1+\frac{1}{1+z^2}+\frac{1}{(1+z^2)^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{z^2}{(1+z^2)^{n+1}}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{1+z^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{(1+z^2)^n}.\quad (z\text{ 为实数})$$

$$|R_n(z)|=\left|\frac{1}{(1+z^2)^n}\right|,$$ 对任何 n，都能使

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{(1+z^2)^n}\right|=1$$

所以对 $0<\varepsilon<1$，及任何大的 n，只要 z 充分趋近于 0 时，就有

$|R_n(z)|>\varepsilon$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{(1+z^2)^n}$ 沿实轴不一致收敛。

6. 【证明】

当 $n=1$ 时，首项 $\frac{-1}{z^2+1}$ 在 $z=\pm i$ 无意义。因此应在 $|z|<1$ 内考虑级数的收敛性。对于任意给定的 $\varepsilon>0$，及任意的自然数 P（不妨设为偶数），考虑级数的部分和 $S_n(z)$：

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{z^2+n+1}+\frac{(-1)^{n+2}}{z^2+n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p}}{z^2+n+p}\right|=\left|\frac{1}{(z^2+n+1)(z^2+n+2)}+\cdots+\frac{1}{(z^2+n+p-1)(z^2+n+p)}\right|$$

而 $|z^2+n|\geqslant n-|z^2|>n-1$（因 $|z|<1$），则

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|<\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-2)(n+p-1)}$$

$$<\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p-2)^2}.$$

因为

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的常数项级数，故存在 N，对任意给定的 $\frac{\varepsilon}{2}>$

0，使得当 $n>N$时，有：

$$\left|S_{n+p}(z)-S_n(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

它在 $|z|<1$内一致成立。

当P为奇数时，只要取

$$N_0=\max\left\{N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$$

当 $n>N_0$ 时，也有（在 $|z|<1$内）

$$\left|S_{n+p}(z)-S_n(z)\right|<\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p-2)^2}+\frac{1}{n+p-1}<\frac{\varepsilon}{2}+$$

$\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ 因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2+n}$在 $|z|<1$内一致收敛。

由于 $|z^2+n|\leqslant|z^2|+n<1+n$，则

$$\left|\frac{(-1)^n}{z^2+n}\right|>\frac{1}{n+1}$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2+n}$在 $|z|<1$内不绝对收敛。

7. 【证明】

设$\overline{G'}$ 是G内任一闭子区域，在G内作闭 Jordan 曲线 C，使$\overline{G'}\subset\text{int}(c)$ 且$C\cap\overline{G'}=0$。于是，有

$$d=\{|z-z'|:\ z\in\overline{G'},\ z'\in c\}>0$$

由于 $f_n(z)$ 在G内解析，故

$$\left|f_n'(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(z)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

又由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在G内一致收敛，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数N，当 $n>N$时，对一切自然数P恒有：

$$|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)| < \frac{d^2}{L}\cdot 2\pi\varepsilon, \qquad z\in G$$

（其中L为曲线C之长度）

因此

$$|f'_{n+1}(z)+\cdots+f'_{n+p}(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_C \left|\frac{f_{n+1}(\zeta)+\cdots+f_{n+p}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right| |d\zeta|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\frac{d^2}{L}2\pi\varepsilon}{d^2}|d\zeta| = \varepsilon.$$

即，证得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n'(z)|$在$\overline{G'}$上一致收敛，因$\overline{G'}$为$G$内任意闭子区域，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f'_n(z)|$在$G$内为内闭的一致收敛。

8．【证明】

在区域A：$\mathrm{Re}z>1$内，任取$z_0\in A$，作一闭圆域$\bar{B}=\{z: |z-z_0|\leqslant\rho\}\subset\mathrm{Re}z>1$，并设$d=d(\bar{B},\mathrm{Re}z=1)$

因为$|n^{-z}|=|e^{-z\log n}|=e^{-x\log n}=n^{-x}$（logn为实对数），但当$x\geqslant 1+d$时，有

$$|n^{-z}|\leqslant n^{-(1+d)},\quad z\in\bar{B}.$$

令$M_n=n^{-(1+d)}$，　则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$收敛。

故由强级数判别法可知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}$在$\bar{B}$内一致收敛。各项在$\bar{B}$内可导，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}$在$\bar{B}$内解析，当然在$z_0$点解析，由于$z_0$为区域$A$内任意一点，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}$在$A$内解析。

9. 【证法 1】

先求出$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ 的和函数，

因为 $|z|>1$，$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，故有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}-1$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-1$$

$$=\frac{z}{z-1}-1$$

$$=\frac{1}{z-1}.$$

即$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ 在 $|z|>1$ 内的和函数 $f(z)=\frac{1}{z-1}$。显然 $f(z)$ 只在 $z=1$ 时不解析，故$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ 在A：$|z|>1$ 内解析。

【证法 2】由§4·2定理 6 可知，要证$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ 在 A 内解析，须证：① $f_n(z)=\frac{1}{z^n}$ 在A内解析，②$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ 在A内为内闭的一致收敛。

显然：$\frac{1}{z^n}$除 $z=0$ 外，处处解析，故在A: $|z|>1$ 内解析。在A内任取一闭圆域 $\bar{B}$，必存在一个 $r>1$，使得 $z\in\bar{B}$，有 $|z|>r$，则 $\left|\frac{1}{z^n}\right|<\frac{1}{r^n}=M_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}$ 收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ 在$\bar{B}$ 内一致收敛，即

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ 在A内为内闭的一致收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$在$A$内解析。

【证法 3】对$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$作变量替换。

令 $\zeta=\frac{1}{z}$，则有

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta^n$，只须证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta^n$ 在$|\zeta|<1$ 内解析。因为

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\zeta^n-1=\frac{1}{1-\zeta}-1=\frac{\zeta}{1-\zeta}$，显然，函数除 $\zeta=1$ 外，处处解析，故在$|\zeta|<1$ 内解析，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$在 $|z|>1$内解析。

10．【证明】

因为$\left|\frac{z^n}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$对所有的 $z\in A$成立，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故由强级数判别法得知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$在$A$内一致收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 在A内为内闭的一致收敛．又因$\frac{z^n}{n^2}$在A内解析，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$在 A 内解析。

11．【证明】

设$\bar{B}$ 为A 内任一闭圆域，令 δ 为 $\bar{B}$ 到边界 $\mathrm{Im}z=\pm1$的距离，对于$\bar{B}$内任意一点 $z=x+iy$，我们有

$$|e^{-n}\sin nz|=\left|e^{-n}\frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2i}\right|\leqslant e^{-n}\frac{e^{2ny+1}}{2e^{-ny}}$$

$$\leqslant e^{-n(y+1)}\leqslant n^{-n\delta}$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}\sin nz$在B内一致收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}\sin nz$在$A$内为内闭的一致收敛，又因$f_n(z)=e^{-n}\sin nz$在$A$内解析，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}\sin nz$在$A$内解析。

12. 【解法1】

因为在$|z|<\frac{1}{2}$内，$\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$收敛，和函数$f(z)=\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n=\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}$，故

$$\int_C\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)dz=\int_C\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)dz=\int_C\frac{1}{z}dz+\int_C\frac{1}{1-z}dz=2\pi i.$$

【解法2】因为$\int_C\left(\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n\right)dz=\int_C\frac{1}{z}dz+\int_C\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\right)dz$

而z^n在C：$|z|=\frac{1}{2}$上连续，取圆域$\bar{B}=\{z: |z|\leqslant r,\ \frac{1}{2}<r<1\}$，对于一切$z\in\bar{B}$，我们有

$$|z|\leqslant r,\quad |z|^n<r^n=M.$$

而$\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$收敛，故$\sum\limits_{n=0}^{n} z^n$在$\overline{B}$内一致收敛，并在$C$上一致收敛，所以级数在$C$上可以逐项积分，乃得

$$\int_C\frac{1}{z}nz+\int_C\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)dz=2\pi i+\sum_{n=0}^{\infty}\int_C z^n dz=2\pi i.$$

习　题（4·2）

1. 【解】

1）因为$C_n=\frac{n!}{n^n}$

所以 $R=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\right]^{-1}$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^{-1}$$

$$=\left(\frac{1}{e}\right)^{-1}=e。$$

2）因为 $C_n=\cos in=\frac{1}{2}(e^n+e^{-n})$

所以 $R=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\right]^{-1}$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-(n+1)}}{2}\cdot\frac{2}{e^n+e^{-n}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{1}{e}。$$

3）这里$C_n=n+a^n$。

所以 $R=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n+1}{C_n}\right|\right]^{-1}$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)+a^{n+1}}{n+a^n}\right|\right]^{-1}$$

①当$|a|\leqslant 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=0$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{n}=0$

故　$R=1$。

②当$|a|>1$时，

$$R=\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)+a^{n+1}}{n+a^n}\right|\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{a^n}+\frac{1}{a^n}+a}{\frac{n}{a^n}+1}\right|\right]^{-1}$$

$$=[|a|]^{-1}=\frac{1}{|a|}.$$

故
$$R=\begin{cases}1, & \text{当 } |a|\leqslant 1 \text{ 时},\\ \frac{1}{|a|}, & \text{当 } |a|>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

4）因为 $R=\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\right]^{-1}$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\right|\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)}{\left(1+\frac{c}{n}\right)}\right|\right]^{-1}=1.$$

2. 【证明】

因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+z_0^n)C_nz^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_0^nC_nz^n$.

而，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径为 R，

故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_0^nC_nz^n$ 的收敛半径为：

$$R'=\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_0^{n+1}C_{n+1}}{z_0^n\ C_n}\right|\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}|z_0|\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\right]^{-1}$$

$$=\frac{R}{|z_0|}.$$

故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+z_0^n)C_nz^n$的收敛半径为 $r=\min\left(R,\ \frac{R}{|z_0|}\right)$.

3. 【证明】

设 $f(z)$ 在 C: $|z-z_0|=R$ 上处处解析，在这种情况下，C 上的点都是某圆 Q 的中心．而在圆 Q 内 $f(z)$ 解析，由有限覆盖定理，我们可以在这些圆 Q 中选取有限个将 C 覆盖住．这有限个圆构成一个区域 G．用 ρ 表示从 C 到 G 的边界的距离， 于是 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R+\rho$ 内解析，这与$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R 相矛盾，故 $f(z)$ 在C: $|z-z_0|=R$上至少有一个非解析点．

4. 【解】

1) $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$在S_z平面上除 $z=0$ 及 $z_k=2k\pi i$ ($k=\pm1,\pm2,\cdots$)外解析，而

$$e^z-1=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\cdots-1$$

$$=z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$$

代入

$$f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots}$$

此函数在 $z=0$ 处解析，我们进一步用待定系数法求出 $f(z)$ 在 $z=0$ 的幂级数展开式．

那就是在 $|z|<2\pi$ 内，设 $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$

则有：

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots=\frac{1}{1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots}$$

$$\cdot(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots)\left(1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots\right)\equiv 1.$$

比较两端的系数，可有

$$\begin{cases} c_0=1 \\ c_0\frac{1}{2!}+c_1=0 \\ \cdots\quad\cdots \\ c_0\frac{1}{(n+1)!}+c_1\frac{1}{n!}+\cdots+c_{n-1}\frac{1}{2!}+c_n=0 \\ \cdots\quad\cdots \end{cases}$$

即，$c_0=1$，$c_1=\frac{-1}{2}$，$c_2=\frac{1}{12}$，$c_3=0$，$\cdots$

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{12}z^2-\cdots$$

2）因为 $\sin^2 z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$，

$$\cos^2 z=1-\sin^2 z=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}z^{2n}.$$

3）$\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]^2=\frac{1}{2}\left[-\log(1-z)\right]^2$

$$=\frac{1}{2}\left[\log(1-z)\right]^2.$$

由于 $\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$，

$$\log(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-z)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n.$$

所以有

$$\frac{1}{2}\left[\log(1-z)^{-1}\right]^2=\frac{1}{2}\left[\log(1-z)\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n\right)^2$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)z^n.$$

$$|z|<1$$

4） $e^{\frac{1}{1-z}}=e^{\frac{z}{1-z}+1}=e\cdot e^{\frac{z}{1-z}}$

由于

$$\frac{z}{1-z}=z\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},\qquad (|z|<1)$$

故 $\quad e^{\frac{z}{1-z}}=e^{z+z^2+\cdots+z^n+\cdots}$

所以有

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e\cdot e^{\frac{z}{1-z}}=e\left[1+(z+z^2+\cdots)+\frac{1}{2!}(z+z^2+\cdots)^2+\cdots\right]$$

$$=e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\frac{73}{24}z^4+\cdots\right),\qquad |z|<1$$

5）取 $|z|<\left|\frac{b}{a}\right|$， $\left|\frac{az}{b}\right|<1$

所以$\frac{1}{az+b}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+\frac{az}{b}}=\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{az}{b}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^n}{b^{n+1}}z^n.$

5．【解】

1）函数$\frac{1}{z+2}$以 $z=-2$ 为唯一有限奇点，

故，$R=d(1,-2)=3$，即$\frac{1}{z+2}$在$B=\{z:|z-1|<3\}$ 内可以展开。

因，$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-1+3}=\frac{1}{3\left(\frac{z-1}{3}+1\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$

所以，$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$。

$(|z-1|<3)$

2）$\frac{z^2}{(z+1)^2}$的有限奇点为 $z=-1$，$R=d(1,-1)=2$。即

$\frac{z^2}{(z+1)^2}$在 $B=\{z:|z-1|<2\}$ 内可展开成幂级数。

但因，$\frac{z^2}{(z+1)^2}=\frac{z^2-1+1}{(z+1)^2}=\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}$

令 $f_1(z)=\frac{z-1}{z+1}$，$f_2(z)=\frac{1}{(z+1)^2}$

而 $f_1(z)=\frac{z-1}{z+1}=\frac{z-1}{z-1+2}=\frac{z-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$f_2(z)=\frac{1}{(z+1)^2}=\left[\frac{1}{2\left(1+\frac{z-1}{2}\right)}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-(z-1)+\frac{3}{2^2}(z-1)^2-\frac{4}{2^3}(z-1)^3+\cdots\right]$$

所以$\frac{z^2}{(z+1)^2}=f_1(z)+f_2(z)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-3}{2^{n+2}}(z-1)^n$。

3) $\cos z = \cos(z-1+1)$

$$= \cos 1 \cdot \cos(z-1) - \sin 1 \cdot \sin(z-1)$$

$$= \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{(z-1)^{2n}}{(2n)!}$$

$$- \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} (z-1)^{n}. \qquad (|z-1| < \infty)$$

4) $\sin(2z-z^2) = \sin(2z-z^2-1+1)$

$$= \sin[1-(z-1)^2]$$

$$= \sin 1 \cdot \cos(z-1)^2 - \cos 1 \cdot \sin(z-1)^2$$

$$= \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(z-1)^{4n}}{(2n)!}$$

$$- \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{(z-1)^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{z!} (z-1)^{2n} \cdot (|z-1| < \infty)$$

6. **【证明】**

由于 $f(z)$ 在 B 内解析，所以 $f(z)$ 可以展开成幂级数，设为：

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \qquad (|z| < 1)$$

但 $f(0) = 0$，即 $c_0 = 0$，故

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

令 $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$，则 $\varphi(z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \cdots + c_n z^{n-1} + \cdots$

$$(|z| < 1)$$

$\varphi(0) = c_1$，$\varphi(z)$ 在 B 内解析。

于是应用最大模原理可知，对于满足 $|z|<r<1$ 的任意一点 z_0 有

$$|\varphi(z_0)|\leqslant\max_{|z|=r}|\varphi(z)|=\max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\frac{1}{r}.$$

当 $r\to1$ 时，$|f(z_0)|\leqslant|z_0|$

由于 z_0 的任意性，所以在 B: $|z|<1$ 内有

$$|f(z)|\leqslant|z|.$$

习 题（4·3）

1. 【解】

1）因为 $z^2(e^{z^2}-1)$ 在 $z=0$ 的幂级数为：

$$z^2(e^{z^2}-1)=z^2(1+z^2+\frac{1}{2!}z^4+\frac{1}{3!}z^6+\cdots+\cdots-1)$$

$$=z^4\left(1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^4+\cdots\right)$$

$$=z^4\varphi(z).$$

其中 $\varphi(0)\neq0$，$\varphi(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内解析，故 $z=0$ 为 $z^2(e^{z^2}-1)$ 的四阶零点。

2）因为 $z\cdot\sin z$ 在 $z=0$ 的展开式为

$$z\cdot\sin z=z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=z\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots+\cdots\right)$$

$$=z^2\left(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots+\cdots\right)$$

$$=z^2\varphi(z).$$

其中 $\varphi(0)\neq0$，且 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 邻域解析，故 $z=0$ 为 $z\sin z$ 的二阶零点。

3）因为 $1-\cos z$ 在 $z=0$ 的展开式为：

$$1-\cos z=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{6!}z^6-\cdots$$

显然 $c_2=\frac{1}{2!}\neq0$，故由定义可知，$z=0$ 为 $1-\cos z$ 的二阶零点。

2. 【解】

因为z_0为 $f(z)$ 的m 阶零点，

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\cdots,$$

其中 $a_m\neq0$。

又z_0为 $g(z)$ 的n阶零点，

$$g(z)=b_n(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots+\cdots,$$

其中 $b_n\neq0$。

如果 $m>n$，则

$$f(z)+g(z)=(z-z_0)^n[b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots$$
$$+(b_m+a_m)(z-z_0)^{m-n}+\cdots]$$

z_0为 $f(z)+g(z)$ 的n阶零点。

如果 $n>m$，同理可得z_0为 $f(z)+g(z)$ 的m阶零点。

如果 $m=n$，当 $a_m+b_m\neq0$ 时，z_0为 $f(z)+g(z)$的m阶零点；当 $c_m+b_m=0$ 时，零点z_0的阶数大于m。

$$f(z)\cdot g(z)=a_mb_n(z-z_0)^{m+n}+(a_{m+1}b_n+a_{m+1}b_n)(z-z_0)^{m+n+1}$$
$$+\cdots$$

故z_0为 $f(z),g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点。

$$\frac{g(z)}{f(z)}=(z-z_0)^{n-m}\frac{b_n+b_{n+1}(z-z_0)+\cdots}{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots}$$

由此可见

如果 $m<n$，则z_0为 $g(z)/f(z)$ 的 $n-m$ 阶零点。

如果 $m>n$，则z_0为 $g(z)/f(z)$ 的 $m-n$ 阶极点。

如果 $m=n$，则z_0为 $g(z)/f(z)$ 的可去奇点。

3. 【证明】

应用反证法。设 $f(z)$ 在$\overline{G}$上没有零点。因 $f(z)$在G 内解析，在$\overline{G}$上连续，且不恒为常数。依最大模与最小模原理，$|f(z)|$的最大值与最小值只能在边界上达到，但$|f(z)|$在 c 上为常数 a，即

$$\max_{z\in\overline{G}}|f(z)|=\min_{z\in\overline{G}}|f(z)|=a$$

$f(z)$在$\overline{G}$上任意一点 z，有

$$\min_{z\in\overline{G}}|f(z)|\leqslant|f(z)|\leqslant\max_{z\in\overline{G}}|f(z)|.$$

于是$|f(z)|=a$，$z\in G$，由§2·1—5 例 3 可知，$f(z)$ 恒为常数($z\in\overline{G}$)。这与 $f(z)$ 在 $\overline{G}$上不恒为一个常数的假设相矛盾。从而 $f(z)$ 在$\overline{G}$ 上至少要有一个零点。但这个零点不可能在c上，如果在c上，则因$|f(z)|$ 在 c 上是常数，从而就会推出在$\overline{G}$ 上 $f(z)\equiv0$，这与假设 $f(z)$ 在$\overline{G}$上不恒为常数相矛盾。因而 $f(z)$ 的零点只能在G内。

4. 【证明】

显然，$f(z)=a$ 的根，就是 $f(z)-a$ 在G内的零点。

设 c 为任意一条闭曲线，$c\subset G$（G 为有界单连通区域），并令$G^*=\text{int}(c)\subset G$。

假设 $f(z)-a$ 在 int(c) 有无穷多个零点，必存在点列$\{z_n\}$，$n=1,2,\cdots$，使 $f(z)-a=0$，由于 $\overline{G^*}$为闭集，故点列$\{z_n\}$的极限点 $z_0\in\overline{G^*}$。由于$\overline{G^*}\subset G$，所以$z_0\in G$。由唯一性定理可知，$f(z)-a\equiv0$，$z\in G$，即 $f(z)\equiv a$（常数），这与所设条件 $f(z)$ 不为常数相矛盾。所以 $f(z)-a$ 在 int(c)，最多只能有有限个零点。即 $f(z)=a$ 在 int(c) 最多只能有有限个根。

5．【解】

1）不存在。

如果在B：$|z|<1$ 内存在解析函数 $f(z)$，在点 $z_n=\frac{1}{n}$取值：0，1，0，1，…．因为无穷点列 $\{z_n\}=\frac{1}{n}$包含无穷点列$\left\{z_n\right\}=\left\{\frac{1}{2k}\right\}$与$\left\{z_n\right\}=\left\{\frac{1}{2k+1}\right\}$，并且这两个子点列都以属于 B 内的点 $z=0$ 为聚点。

但因为$f\left(\frac{1}{2k+1}\right)=0$，所以由唯一性定理可知，在$B$内$f(z)\equiv 0$。

同理，因为 $f\left(\frac{1}{2k}\right)=1$，所以 $f(z)\equiv 1$。

这样一来，同一个函数 $f(z)$，在B内，既恒为零，同时又恒为1，这是不可能的．故不存在．

2）不存在，道理同上．

3）存在。

作函数 $f(z)=\frac{1}{1+z}$，显然在$f(z)=\frac{1}{1+z}$在B：$|z|<1$ 内解析，且在点 $z_n=\frac{1}{n}$取题设之值。

6．【解】

答：不矛盾．

虽然 $\sin\frac{1}{1-z}$在无穷点集$\left\{1-\frac{1}{n\pi},n=1,2,\cdots\right\}$上取值为0，但这个点集的唯一的一个凝聚点 $z_0=1$，并不在 $\sin\frac{1}{1-z}$的解析域$|z|<1$ 内，而唯一性定理要求点集的凝聚点必须属于函数的解析

域内，才能由无穷点集上的值确定函数在整个解析域的值，因此 $\sin\frac{1}{1-z}$ 不恒为零与解析函数的唯一性定理不矛盾。

7. 【解】

①设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，于是在 z_0 的某邻域 $B(z_0,\delta')$ 内，

$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\quad(c_m\neq0)$

取 δ'，$(0<\delta'<\delta)$，于是在区域 $N'(z_0,\delta')$ 内

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

一致收敛，逐项积分可得

$$\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta=\int_{z_0}^{z}[c_m(\zeta-z_0)^m+c_{m+1}(\zeta-z_0)^{m+1}+\cdots]d\zeta$$

$$=\int_{z_0}^{z}c_m(\zeta-z_0)^m d\zeta+\int_{z_0}^{z}c_{m+1}(\zeta-z_0)^{m+1}d\zeta+\cdots$$

$$=\frac{c_m}{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\frac{c_{m+1}}{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots$$

令 $F(z)=\frac{c_m}{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\frac{c_{m+1}}{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots$

故 z_0 是 $F(z)$ 的 $m+1$ 阶零点。

② 设 $\varphi(z)=\int_{z_1}^{z}f(\zeta)d\zeta$，作函数

$$F(z)=\varphi(z)-\int_{z_1}^{z_0}f(\zeta)d\zeta，则$$

$$F(z)=\int_{z_1}^{z}f(\zeta)d\zeta=\int_{z_1}^{z_0}f(\zeta)d\zeta$$

$$=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta.$$

由①知 z_0 为 $F(z)$ 的 $m+1$ 阶零点，

故 $\varphi(z)-\int_{z_1}^{z_0}f(\zeta)d\zeta$ 以z_0为$m+1$阶零点，即在z_0处，$\varphi(z)$ 取值$\int_{z_1}^{z_0}f(\zeta)d\zeta$ $m+1$次。

8. 【证明】

依唯一性定理，在L上有$f(z)=f_1(z)$，而L每一点都是L的极限点，而且$L\subset G$，$f_1(z)$，$f_2(z)$ 都在G内解析，由唯一性定理有 $f_1(z)=f_2(z)$。

习　题（4·4）

1. 【解】

因为$f(z)=\dfrac{1}{z-2}$在 $z=0$ 解析，所以 $f(z)$ 在$z=0$的展开式就是 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内的幂级数，即

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

又 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$在 $z=\infty$的邻域的展开式，即在 $|z|>2$内的展开式为

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

2. 【解】

① 在 $0<|z|<1$ 的展开式为：

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{z}{z^2(z-1)}+\frac{1}{z^2(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z-1}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= -\frac{1}{z^2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}.$$

② 在 $1<|z|<\infty$内的展开式为

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z-1}$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}$$

$$= \frac{1}{z^2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}$$

3. 【解】

①函数$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$在 $z=0$ 的邻域的展开式，即在 $|z|<|a|$ 内展开，得

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{(a-b)}\left(\frac{1}{b-z} - \frac{1}{a-z}\right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{b}} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^{n+1}\cdot b^{n+1}}z^n.$$

②$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在$z=a$ 的邻域的展开式，即在：$0<|z-a|<|b-a|$ 内展开，得，

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-a+(a-b)}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a}+\frac{1}{(b-a)\left(1-\frac{z-a}{b-a}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{z-a}+\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}.$$

③ $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在 $z=b$ 的邻域的展开式，即在：$0<|z-b|<|b-a|$ 内展开，得

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{(b-a)\left(1+\frac{z-b}{b-a}\right)}-\frac{1}{z-b}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-b)^n}{(b-a)^{n+1}}-\frac{1}{z-b}\right].$$

4. 【解】

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}\cdot e^z\cdot\frac{1}{z^2+1}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

$$=\frac{1}{z}\left[1+z+\left(\frac{1}{2!}-1\right)z^2+\left(\frac{1}{3!}-1\right)z^3+\cdots+\right.$$

$$+\cdots\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k-2)!}+\cdots+\right.$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{1}{2!}+\ (-1)^k z^{2k}+\cdots\Big]$$

5. 【解】

$\log\ \dfrac{z-a}{z-b}$在 $z=\infty$邻域的展开式，即在：

$|z|>\max\{|a|,|b|\}$的展开式，有

$$\log\ \frac{z-a}{z-b}=\log(z-a)-\log(z-b)$$

$$=\log z\left(1-\frac{a}{z}\right)\ -\log z\left(1-\frac{b}{z}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(-\frac{a}{z}\right)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(-\frac{b}{z}\right)^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{nz^n}$$

（这里利用了 $\log(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n},\ \ |z|<1$）

6. 【解】

$$\sqrt{(z-1)(z-2)}=\sqrt{z^2\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)}$$

$$=\pm z\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pm z\left[1+\frac{\frac{1}{2}-1}{1!}\left(\frac{-1}{z}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{-1}{z}\right)^2\ +\cdots\right]\cdot$$

$$\left[1+\frac{\frac{1}{2}-1}{1!}\ \left(\frac{-2}{z}\right)\ +\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\ \left(\frac{-2}{z}\right)^2+\cdots\right]$$

$$= \pm \left\{ z - \left(\frac{1}{2} + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\right) + \left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\right.\right.$$

$$\left. + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot 1\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\right]\frac{1}{z}$$

$$- \left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} + 2\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} + 2^3\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\right]\frac{1}{z^2} + \cdots\right\}$$

$$= \pm\left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + \cdots + (-1)^n\frac{c_n}{z^{n-1}} + \cdots\right]$$

其中 $c_n = \binom{\frac{1}{2}}{n} + 2\cdot\binom{\frac{1}{2}}{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{1} + 2^2\binom{\frac{1}{2}}{n-2}\binom{\frac{1}{2}}{2}$

$$+ 2^3\binom{\frac{1}{2}}{n-3}\binom{\frac{1}{2}}{3} + \cdots + 2^n\binom{\frac{1}{2}}{n}.$$

7．【证明】

①因为 $\frac{z-1}{z(z^2+4)^2} = \frac{\frac{z-1}{(z^2+4)^2}}{z}$，其中 $\lambda(z) = \frac{z-1}{(z^2+4)^2}$ 在 $z=0$ 的值 $\lambda(0)\neq 0$，且在 $z=0$ 邻域内解析，故 $z=0$ 为 $\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}$ 的一阶极点。

②同理 $z=\pm 2i$ 皆为 $\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}$ 的二阶极点。

8．【证明】

因为 $\lim\limits_{z\to 0} z e^{\frac{1}{z}}$ 不存在，故 $z=0$ 为 $ze^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点。

9．【证明】

①因为$\dfrac{z^n}{e^z-1}$在 $z=0$ 的展开式为：

$$\frac{z^n}{e^z-1}=\frac{z^n}{1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots-1}=\frac{z^{n-1}}{1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots}$$

显然当 $n\geqslant1$ 时，$z=0$ 为$\dfrac{z^n}{e^z-1}$的可去奇点，而当 $n\leqslant0$ 时，有

$$\frac{z^n}{e^z-1}=\frac{1}{z^{-(|n|+1)}\left[1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots\right]},$$

故当 $n\leqslant0$ 时 $z=0$ 为 $|n|+1$ 阶极点。

②因为 $z=2k\pi i$ $(k=\pm1,\pm2)$ 为 e^z-1 的零点，故为$\dfrac{z^n}{e^z-1}$的奇点，又因为：令 $z-2k\pi i=w$，则 e^z-1 在 $2k\pi i$ 的展开式便是 $e^{w+2k\pi i}-1$，在 $w=0$ 的展开式，而

$$\begin{aligned}e^w\cdot e^{2k\pi i}-1=e^w-1&=1+w+\frac{1}{2!}w^2+\frac{1}{3!}w^3+\cdots+\cdots-1\\&=w+\frac{1}{2!}w^2+\frac{1}{3!}w^3+\cdots\\&=w\left(1+\frac{1}{2!}w+\frac{1}{3!}w^2+\cdots\right)\end{aligned}$$

显然 $w=0$ 为 $e^{w+2k\pi i}-1$ 的一阶零点，即 $z=2k\pi i$ 为 e^z-1 的一阶零点，故 $z=2k\pi i$为$\dfrac{z^n}{e^z-1}$的一阶极点。

10．【证明】

因为$\lim\limits_{z\to\frac{1}{k\pi}}\sin\left[\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right]$不存在，且当 $k\to\infty$时，$z_k=\dfrac{1}{k\pi}\to0$，

故$z_k=\dfrac{1}{k\pi}$为$\sin\left[\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right]$的本性奇点， 且 $z=0$ 为本性奇点的极

限点。

11. 【证明】

使$e^{-\frac{1}{z^2}}$在$|z|>1$内展开，得

$$e^{-\frac{1}{z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n=1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^4}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^6}+\cdots$$

显然，其中不含z的正幂项，故 $z=\infty$为 $e^{-\frac{1}{z^2}}$的可去奇点。

12. 【证明】

把 $\cos z-\sin z$ 在z平面上展开，得：

$$\cos z-\sin z=\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots\right)-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$$

显然展开式中含有无穷多项关于z的正幂项，故$z=\infty$为$\cos z-\sin z$的本性奇点。

13. 【证明】

作一闭圆域 B，除 $z=\infty$ 外，使 $f(z)$ 的一切有限奇点都$\subset B$，此时 $f(z)$ 在B内只能有有限个奇点，否则，若有无穷多个奇点，则必有一凝聚点，这奇点显然是非孤立的，这与题设相矛盾。故 $f(z)$ 在B 内只有有限个奇点，在扩充平面$\hat{S}$ 上也就只有有限个奇点。

反之，设奇点不是孤立奇点，（至少一个不是孤立的），则必有一个凝聚点，而这个凝聚点的邻域将有无穷多个奇点，与题设的有有限多个奇点相矛盾，故奇点为孤立的。

14. 【证明】

首先证明a为 $f(z)$ 的奇点，我们用反证法，设a不是 $f(z)$ 的奇点，而a又为 $f(z)$ 零点的极限点，则a为 $f(z)$ 的非孤立零点，必存在一个圆域$|z-a|<\rho<R$，使$f(z)\equiv 0$，由唯一性定理知，在$|z-a|<R$内，$f(z)\equiv 0$ 与题设矛盾，故a为$f(z)$ 的孤立奇点。

其次证a为 $f(z)$ 的本性奇点。

因为 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 内解析，且以a 为孤立奇点，故

$f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 内可展开成级数：

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+$$

$$+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

显然：①上式不可能无负幂项，否则 $z=a$ 为可去奇点或解析点，即 $f(z)\equiv$常数，这与题设矛盾．②上式不可能有有限个负幂项，否则 $z=a$ 为 $f(z)$ 的极点，$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，即对任意一个 $M>0$，当 $0<|z-a|<r<R$ 时，$|f(z)|>M$，这与a为 $f(z)$ 零点的极限点矛盾．故 $z=a$ 为本性奇点．

第五章　留数理论及其应用

从前一章的学习中，我们已经看到了积分理论在建立级数理论所起的作用．显然，要想用级数理论解决实际问题，自然要将已知函数展开成幂级数或Laurent 级数．怎样展开，应随函数及所给定的区域而定．在函数展开的过程中，Cauchy 积分公式起了关键作用，这是我们所熟知的．

这一章，我们仍然用 Cauchy积分理论来建立留数概念；用函数在其孤立奇点的邻域的展开式的系数来计算留数等等；进而论述它在计算实变函数定积分上的应用，即围道积分的计算．在理论方面，我们还将论证对数留数、 Rouché定理、辐角原理等．这对于阐明函数的零点分布起着重要的作用．

诚然，留数理论的应用，远不止这些．但限于时间作为基础，我们到此为止．至于它在流体力学、电工技术及其他领域上的应用，有兴趣的读者，可以参看其他相应的参考书．

§5·1　留数概念

1．关于有限远点的留数及其计算

① 留数概念　设 z_0（有限点）为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，圆周$C=\{z:|z-z_0|=\rho\}$，$f(z)$ 在$\overline{K}=\{z:0<|z-z_0|\leqslant\rho\}$上解析，则称

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的留数（Residue），记为 $\mathrm{Res}(f, z_0)$ 或 $\mathrm{Res}(z_0)$。

只要所取的 C 满足定义的条件，$\mathrm{Res}(f, z_0)$ 不会因 C 的变化而改变。

例如，依定义有

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}, 1\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\rho}\frac{1}{(z-1)(z-2)}dz$$

其中因 $z=1$ 是孤立奇点，对于 ρ 的值我们可以取 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{6}{7}$，…只要 $\rho<1$ 都行。但不能取 $\rho\geqslant 1$。今取 $\rho=\frac{1}{2}$，则

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}, 1\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{1}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{z-2}}{z-1}dz$$

$$=\left(\frac{1}{z-2}\right)_{z=1}=-1.$$

即依 Cauchy 积分公式得 $\mathrm{Res}(f, 1)=-1$，这里 $f(z)=1/(z-1)(z-2)$。读者不妨取 $\rho=\frac{6}{7}$，验证留数与 C 无关。

② **留数的计算**　显然留数的定义可以作为计算留数的方法。但为了应用，仅限于用定义计算留数是不够的，还需要去寻求一些更简便有力的方法。人们在实践中根据不同的情况总结出以下的方法：

方法 1　把函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某一去心邻域 $B=\{z: 0<|z$

$z| < \rho\}$内展成 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \qquad (1)$$

于是

$$\mathrm{Res}(f,\ z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\Big[\cdots+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{C_{-1}}{z-z_0}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n\Big]dz$$

其中$C=\{z:|z-z_0|=R\}$，$R<\rho$. 因为右端在C上一致收敛，故可沿C逐项积分而得

$$\mathrm{Res}(f,\ z_0)=C_{-1}$$

因此得到方法 1 为"求 $f(z)$ 在z_0 处的留数就是求（1）式的系数C_{-1}"。

方法 2　设 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，则 $f(z)$ 在某一$K=\{z:0<|z-z_0|<r(>0)\}$内的展开式为：

$$f(z)=\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

两端同乘以 $(z-z_0)$后，当 $z\to z_0$ 时取极限则得

$$C_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

故由方法 1 得

$$\mathrm{Res}(f,\ z_0)=C_{-1}$$

$$=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

方法 3　设z_0为$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$的一阶极点（只要 $\varphi(z)$与 $g(z)$均在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，$g(z_0)=0$，$g'(z_0)\neq 0$)，则

$$\operatorname{Res}(f,\ z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$$

事实上，由方法 2 有

$$\operatorname{Res}(f,\ z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi(z)}{g(z)}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}.$$

方法 4　设 z_0为 $f(z)$的m阶极点，则

$$\operatorname{Res}(f,\ z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

事实上，由 z_0为 $f(z)$的m阶极点可知它在某一环域$K=\{z:0<|z-z_0|<r(>0)\}$内，$f(z)$的展开式为

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots$$

$$+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n.$$

两端同乘以 $(z-z_0)^m$，并求 $(m-1)$阶导数，于是当 $z\to z_0$ 时取极限，经整理得

$$\operatorname{Res}(f,\ z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

从上述这些方法中，可以看到：方法 1 是对任意类型的孤立奇点都可使用的。方法 2 ～方法 4 仅适用于极点的情形。在计算留数时，究竟用哪种方法较好，需要视所给出的函数及其孤立奇点而定。对某些孤立奇点来说，当然方法 1 并非是最佳的。

下面来看几个例子。

【例 1】 求$f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)}$在 $z=0$ 的留数。

【解法 1】 由留数定义有

$$\text{Res}(f,\ 0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\dfrac{5z-2}{z-1}}{z}dz$$

$$=\left(\frac{5z-2}{z-1}\right)_{z=0}=2.$$

【解法 2】 由于 $z=0$为 $f(z)$的孤立奇点，$f(z)$ 在 $K:0<|z|<\frac{1}{2}$内的展开式为：

$$f(z)=-\frac{5z-2}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\left(\frac{2}{z}-5\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$=\frac{2}{z}-3\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

故

$$\text{Res}(f,\ 0)=C_{-1}=2.$$

【解法 3】 因为 $z=0$为 $f(z)$的一阶极点，所以

$$\text{Res}(f,\ 0)=\left(\frac{5z-2}{(z(z-1))'}\right)_{z=0}=2.$$

【解法 4】 因 $z=0$为 $f(z)$的一阶极点，所以

$$\text{Res}(f,\ 0)=\lim_{z\to 0}z\cdot f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{5z-2}{z-1}=2.$$

【例 2】 试证 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-a)^2}$在 $z=a$的留数为 e^a。

【证明】 因 $z=a$为 $f(z)$的二阶极点，所以

$$\text{Res}(f,\ a)=\lim_{z\to a}\frac{1}{1!}((z-a)^2\cdot f(z))'=e^a.$$

【例 3】问符号 $\text{Res}\left(\sin\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}},0\right)$有意义否？为什么？

【答】无意义．因为，$z=0$不是$\sin\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$的孤立奇点．事实上，使 $\sin\dfrac{1}{z}=0$的点有

$$z_k=\frac{1}{k\pi},\quad k\text{为整数．}$$

这无穷多个点均为所给函数的奇点，而

$$\lim_{k\to\infty} z_k=0.$$

故 $z=0$ 不是一个孤立奇点．

2．关于无穷远点的留数及其计算

设 $z=\infty$为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，圆周$C=\{z: |z|=\rho\}$，$f(z)$在环域 $K=\{z: r<|z|<\infty\}$ 内解析，其中 $r<\rho$．则称

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz$$

为函数 $f(z)$在点 $z=\infty$的留数，记为 $\text{Res}(f,\infty)$或 $\text{Res}(\infty)$．

由定义可得

$$\text{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\cdots+\frac{C_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z}+C_0+C_1z+\cdots+C_nz^n+\cdots\right)dz$$

由于被积分的级数当 $z\in C$ 时一致收敛，故可逐项积分而得

$$\text{Res}(f,\infty)=-C_{-1},$$

【例 1】 求 $f(z)=\frac{z^2+1}{e^z}$在 $z=\infty$的留数.

【解】 取圆周 $C: |z|=1$, 则

$$\operatorname{Res}(f, \infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{z^2+1}{e^z}dz$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{z^2+1}{e^z}dz$$

$$=0.$$

这里在计算积分时, 用到了 Cauchy 定理.

【例 2】 试证: 设 $f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$, 则

$$\operatorname{Res}(f, \infty)=-1.$$

【证明】 将 $f(z)$在 $z=\infty$的邻域 $B(\infty, \rho)$内展开成 Laurent 级数. 于是在 $K: 2<|z|<\infty$内,

$$f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}=\frac{z^{15}}{z^{16}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-2\cdot\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1-3\cdot\frac{2}{z^4}+\cdots\right)$$

从而 $C_{-1}=1$, 故 $\operatorname{Res}(f, \infty)=-C_{-1}=-1$.

3. 留数基本定理

定理 1 (留数基本定理) 设区域G是由逐段光滑曲线 C 所围成. 如果函数 $f(z)$在G内除有限个奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$外为解析, 在闭区域$\bar{G}$上除 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外连续, 则

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f, z_j).$$

【证明】 我们分别以孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为中心, 以适当的 $r>0$为半径作圆周 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 使具备复连通区域上的

Cauchy 定理所需要的条件．于是

$$\int_C f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j}f(z)dz$$

而

$$\int_{C_j} f(z)dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,z_j)$$

故

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f,\ z_j).$$ （证毕）

从定理的结论容易看到：对于一个"在大范围内"的量（如沿一条有限的逐段光滑的闭路的积分）的计算问题，可以归结为对一些"在小范围内"的量（如诸留数 $\operatorname{Res}(f,\ z_j)$ 的计算问题．

作为复变函数理论主要结果之一的留数基本定理，是本章的中心议题，同时它又是留数理论之所以能够应用于实际的根据．因此它是十分重要的．

定理 2　设函数 $f(z)$ 在扩充平面 $\widehat{S}_z$上除去有限个奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, ∞外是解析的，则 $f(z)$在 z_1, z_2, $\cdots$, z_n, ∞ 诸点的留数之和为零．即

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f,\ z_j)+\operatorname{Res}(f,\ \infty)=0.$$

【证明】作适当的圆周 C: $|z|=\rho$, 使 z_1, z_2, $\cdots$, z_n 全部位于圆域 B: $|z|<\rho$内，则由留数基本定理有

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f,\ z_j)$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f,\ z_j)-\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=0.$$

而

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz = \mathrm{Res}(f,\infty)$$

故

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_j)+\mathrm{Res}(f,\ \infty)=0. \qquad \text{（证毕）}$$

上述等式说明，计算$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,\ z_j)$的问题，可以转化为计算 $-\mathrm{Res}(f,\infty)$的问题；反之，计算 $\mathrm{Res}(f,\ \infty)$的问题又可以转化为计算$-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,\ z_j)$的问题。

【例 1】 设

$$f(z)=\frac{1}{(z-5)\left(z^7-\frac{1}{2}\right)}$$

并设 z_j 为方程 $z^7-\frac{1}{2}=0$的根，$j=1,\ 2,\ \cdots,7$。试问

$$\mathrm{Res}(f,\ 5)+\sum_{j=1}^{7}\mathrm{Res}(f,\ z_j)=?$$

【解】 由定理 2

$$\mathrm{Res}(f,\ 5)+\sum_{j=1}^{7}\mathrm{Res}(f,\ z_j)=-\mathrm{Res}(f,\infty).$$

为计算 $\mathrm{Res}(f,\ \infty)$，将 $f(z)$在 $z=\infty$的邻域内展开成 Laurent 级数

$$f(z)=\frac{1}{(z-5)\left(z^7-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{z\left(1-\frac{5}{z}\right)\cdot z^7\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{z^7}\right)}$$

$$=\frac{1}{z^8}\left(1+\frac{5}{z}+\frac{5^2}{z^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{z^7}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{z^{14}}+\cdots\right)$$

故 $C_{-1}=0$，于是 $\mathrm{Res}(f,\ \infty)=-C_{-1}=0$，则

$$\mathrm{Res}(f,\ 5)+\sum_{j=1}^{7}\mathrm{Res}(f,\ z_j)=-\mathrm{Res}(f,\ \infty)=0.$$

【例 2】 求函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 在 $z=\infty$ 处的留数。

【解】 因为 $f(z)$ 在扩充平面 $\hat{S}_z$ 上共有两个奇点是 $z=1$ 与 $z=\infty$。所以由定理 2 有

$$\mathrm{Res}(f,\ \infty)=-\mathrm{Res}(f,\ 1)$$

而

$$f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots$$

在环 K：$0<|z-1|<\infty$ 内成立。于是，$\mathrm{Res}(f,\ 1)=1$，故 $\mathrm{Res}(f,\ \infty)=-1$。

如果不用定理 2，而是将 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内展开，将得出同样的结果。

习 题(5·1)

1．试总结计算留数的方法。

2．计算下列函数在指定点的留数：

1) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 在 $z=\pm i$。

2) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$ 在 $z=0,\ \pm 1$。

3) $\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ 在 $z=\pm 1,\ \infty$。

4) $\dfrac{1}{\sin z}$ 在 $z=n\pi$，n 为正整数。

5) $e^{\frac{1}{z-1}}$ 在 $z=1$, ∞.

6) $\cos z-\sin z$ 在 $z=\infty$.

7) $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$在 $z=0$, 1, ∞.

8) $\dfrac{e^z}{z\cdot\sin z}$在 $z=0$.

3. 试求函数 $\sin\dfrac{z}{z+1}$在 $z=-1$ 的留数.

4. 设 $\varphi(z)$在 a点解析, a 为 $f(z)$的一阶极点且 $\mathrm{Res}(f,a)=A$, 试证:

$$\mathrm{Res}[(f\cdot\varphi),\ a]=A\cdot\varphi(a).$$

5. 记号 $\mathrm{Res}(\mathrm{tg}z,\ \infty)$有意义吗? 为什么?

6. 你能用几种方法计算 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{5z-2}{z(z-1)},1\right)$?

7. 下面的说法对吗? 为什么?

如果 $\mathrm{Res}(f,\ z_0)=\alpha$, 则$\mathrm{Res}(f^2,\ z_0)=\alpha^2$.

8. 试证:

$$6\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2\cdot\sin z},0\right)=1.$$

§5·2 用留数计算复变函数沿闭路的积分

关于复变函数沿闭路的积分问题, 在第三章(§3·2)曾经遇到过. 当被积分的函数在闭路的内部不解析时, 曾用 Cauchy 积分公式与高阶微商公式计算过. 但当时所能计算的那类积分, 从孤立奇点的类型来看, 对被积函数来说, 它在积分的闭路的内部所含的孤立奇点只能是极点的情形. 显然, 这有一定的局限性, 尽管极点的情形是较多的. 以下我们将应用留数基本定理来讨论这样的积分——被积分的函数在积分闭路的内部含有有限多个奇点, 或者被积

分的函数在积分闭路内部所含的奇点不但是极点，而且可以是任何一种孤立奇点。从这里也可以看出留数基本定理对讨论复变函数沿闭路积分的作用。

【例1】试计算积分 $\int_{|z-i|=1}\frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz$。

【解法1】由高阶微商公式（§3·5—1的（1）式）便有

$$\int_{|z-i|=1}\frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz=\frac{2}{e+e^{-1}}\cdot\frac{2\pi i}{2!}\left((\cos z)''\right)_{z=i}$$

$$=-\frac{2\pi i}{e+e^{-1}}\cdot\cos i=-\frac{2\pi i}{e+e^{-1}}\cdot\frac{e^{-1}+e}{2}=-\pi i.$$

【解法2】由定理1

$$\int_{|z-i|=1}\frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3},i\right)$$

$$=2\pi i\cdot\frac{2}{e+e^{-1}}\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^3\cdot\frac{\cos z}{(z-i)^3}\right]''$$

$$=\frac{2\pi i}{e+e^{-1}}\cdot(-\cos i)=\frac{2\pi i}{e+e^{-1}}\cdot\left(-\frac{e+e^{-1}}{2}\right)=-\pi i.$$

【例2】计算积分 $\int_C\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$，

其中 C 为 $|z|=4$。

【解】被积函数的奇点来自解方程

$$(z^2+1)^2(z^4+2)^3=0,$$

所得的全部根，其中有六个根 $z_1=i$，$z_2=-i$，$z_3=\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$，$z_4=\sqrt[4]{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$，$z_5=\sqrt[4]{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}$，$z_6=\sqrt[4]{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$，都位于圆域 B：$|z|<4$的内部。由定理1有

$$\int_C\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{6}\mathrm{Res}(z_j)$$

$$=-2\pi i\,\mathrm{Res}(\infty) \qquad (1)$$

为求 Res(∞)，我们把被积分函数展开，即

$$\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}=\frac{z^{15}}{z^{16}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{6}{z^4}+\cdots\right)$$

由这个展式中得出 $C_{-1}=1$。故代入（1）式得

$$\int_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4-2)^3}dz=-2\pi i\text{Res}(\infty)$$

$$=2\pi i\cdot C_{-1}=2\pi i.$$

【例 3】 计算积分 $\int\limits_{|z|=1}\frac{2i}{z^2+2az+1}dz$，$a>1$。

【解】 令 $z^2+2az+1=0$。解之，得其根为

$$\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}\,,\quad \beta=-a-\sqrt{a^2-1}\,.$$

因 $a>1$，所以 $|\beta|>1$。又由于 $|\alpha\cdot\beta|=1$，故 $|\alpha|<1$，于是，只有 $\alpha\in\text{int}(|z|=1)$，而 $\beta\in\text{ext}(c)$。由定理 1 得

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{2i}{z^2+2az+1}dz=2\pi i\cdot\text{Res}(\alpha)$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{2i}{(z-\alpha)(z-\beta)}\cdot(z-\alpha)\right]=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

§5·3 围道积分

所谓围道积分就是用留数计算某些实变量函数的积分。

在这里我们先引入几个预理。

预理 1 设 C_R为圆周 $C=\{z:|z|=R\}$上的一段弧（图5·1），函数 $f(z)$在 C_R（R充分大时）上连续。如果对于 C_R 上的任意一点 z，都有

$$\lim_{R\to\infty} z\cdot f(z)=k$$

则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = i(\beta-\alpha)k.$$

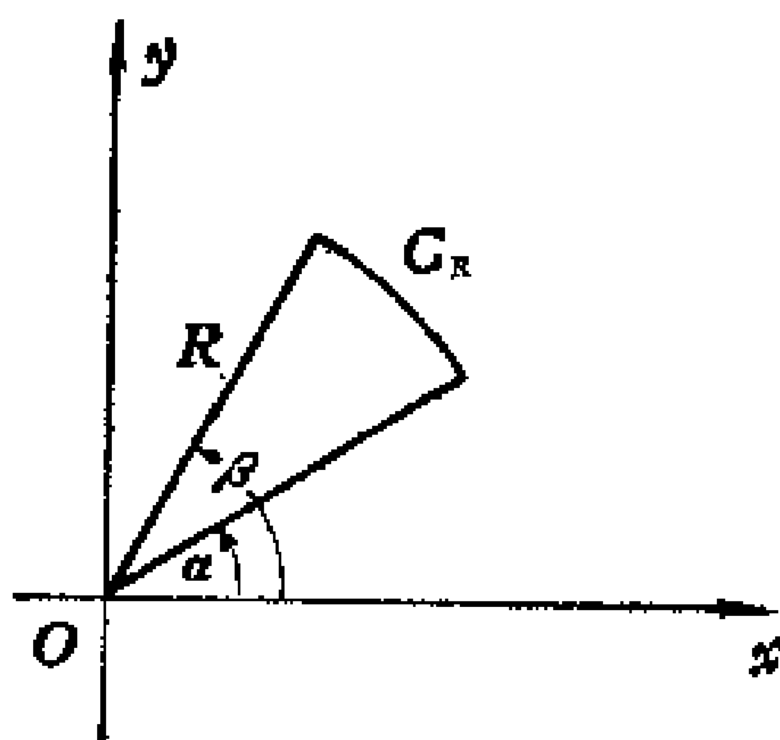


图 5·1

【证明】为证上式只须证明对于任意的 $\varepsilon>0$，当R充分大时，有

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz - i(\beta-\alpha)k\right| < \varepsilon$$

即可。为此将$i(\beta-\alpha)k$ 表成沿 C_R 的积分为

$$i(\beta-\alpha)k = k\int_{C_R}\frac{dz}{z}$$

于是

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz - i(\beta-\alpha)k\right| = \left|\int_{C_R}\frac{zf(z)-k}{z}dz\right|$$

由 $\lim\limits_{R\to\infty} zf(z)=k$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在 R_0（仅依赖于 ε 的正数），使得当 $R>R_0$ 时，有

$$|zf(z)-k| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha},\quad z\in C_R$$

则有

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz - i(\beta-\alpha)k\right| = \left|\int_{C_R}\frac{zf(z)-k}{z}dz\right| <$$

$$<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\cdot\frac{R(\beta-\alpha)}{R}=\varepsilon$$

（$R(\beta-\alpha)$为 C_R 的长度）

于是定理得证。　　　　（证毕）

仿此可得

预理 2　设 C_r为圆周 C：$|z-a|=r$ 上的一段弧（图5·2），$f(z)$在 C_r（r 充分小时）上连续，如果对于 C_r 上的任一点z都有

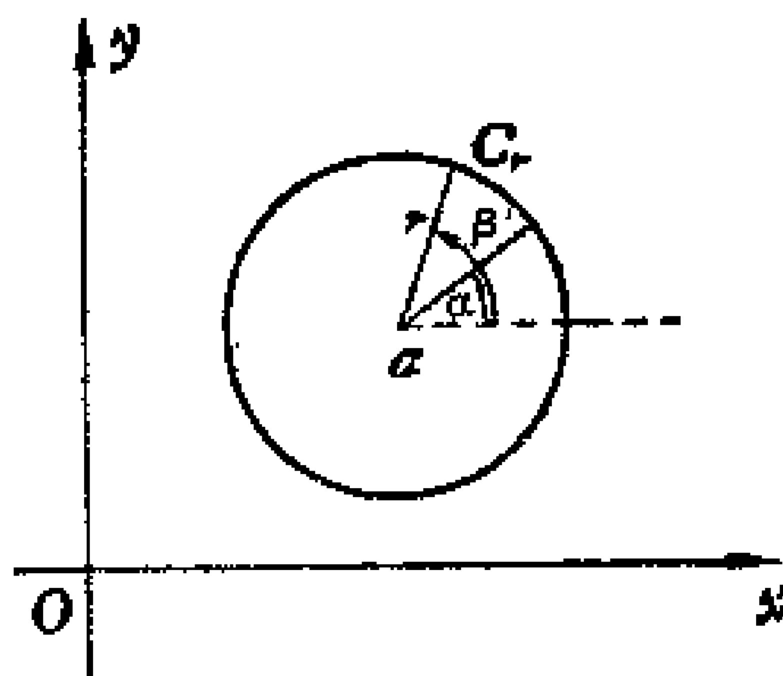


图 5·2

$$\lim_{r\to 0}\ (z-a)f(z)=k$$

则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)k$$

希读者自己作出预理 2 的证明。这里只须注意到

$$i(\beta-\alpha)k=k\int_{C_r}\frac{dz}{z-a}$$

即可。

预理 3 （Jordan引理）设 $F(z)$ 在半圆周 C_R：$z=Re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$R$充分大时）上连续，且对于 C_R 上的 z 都有

$$\lim_{R\to\infty}\ F(z)=0$$

则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz=0。\ (m>0)$$

【证明】 为便于证明，我们先证明：如果$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\theta\geqslant\frac{2\theta}{\pi}$这一事实。我们令

$$g(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$$

于是

$$g'(\theta)=\frac{\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}=\frac{\cos\theta(\theta-\operatorname{tg}\theta)}{\theta^2}<0。\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

因此实函数 $g(\theta)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内是递减的。所以有

$$g(\theta)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

即

$$\sin\theta>\frac{2\theta}{\pi}.$$

又当$\theta=0$与 $\theta=\frac{\pi}{2}$时都有$\sin\theta=\frac{2\theta}{\pi}$。故当$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时有

$$\sin\theta\geqslant\frac{2\theta}{\pi}$$

成立。

现在根据上述事实，来证明本预理：由于

$$\lim_{R\to\infty} F(z)=0$$

所以对于任意的 $\varepsilon>0$,总存在 R_0（依赖于ε的正数），使当$R>R_0$时有

$$|F(z)|=|F(Re^{i\theta})|<\varepsilon.$$

于是

$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right|=\left|\int_0^{\pi}F(Re^{i\theta})\cdot e^{imRe^{i\theta}}\cdot Re^{i\theta}\cdot id\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant R\varepsilon\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}d\theta$$

$$\leqslant 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\theta}d\theta$$

$$\leqslant 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}d\theta=2R\varepsilon\left(-\frac{e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}}{\frac{2mR}{\pi}}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi\varepsilon}{m}(1-e^{-mR})$$

$$<\frac{\pi\varepsilon}{m}.$$

故有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{imz}\ dz=0$$

成立。（证毕）

下面我们应用上述预理来讨论三种类型实变量函数积分的计

算：

I. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$型及举例

其中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 分别为 x 的 n 次和 m 次多项式；$P(x)$ 与 $Q(x)$ 无公因式；$m-n\geqslant 2$；$Q(x)\neq 0$。

为了方便，对以下所讨论的积分的存在性均不一一检验。因为这些类型的积分都是存在的。（这可用数学分析的知识来证明），我们将着重讨论各种类型积分的方法，并通过例题，说明求围道积分的方法和步骤。自然，究竟用什么方法，应分几步，要依具体积分而定。

【例1】 计算积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$。

【解】 步骤：

（1）依被积分的实函数，适当选取辅助复函数，并求其有限值奇点，即令

$$f(z)=\frac{z^2}{z^4+z^2+1}.$$

为求 $f(z)$的奇点并弄清 $f(z)$ 的奇点在复平面 S_z 上的分布状况，令

$$z^4+z^2+1=0$$

即

$$z^4+z^2+1=(z^4+2z^2+1)-z^2=(z^2-z+1)(z^2+z+1)=0.$$

于是

$$z^2-z+1=0 \text{ 或 } z^2+z+1=0$$

得根为

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$-\alpha=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -\beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

它们都是 $f(z)$的有限值奇点，$f(z)$ 的有限值奇点只有这四个．其中 α 与 β 位于上半平面，$-\alpha$与$-\beta$位于下半平面。

（2） 依奇点适当选取辅助积分路，在实轴上取线段$[-R, R]$，在上半平面中取圆周 $C: |z|=R$ 的上半圆周C_R，并组成积分路 $[-R, R] \cup C_R$（图5·3）．其中的R要这样来选取：使$f(z)$的位于上半平面的有限值奇点全部被包含在积分闭路的内部，亦即使 α 与 β 都落入所选取的积分路的内部。

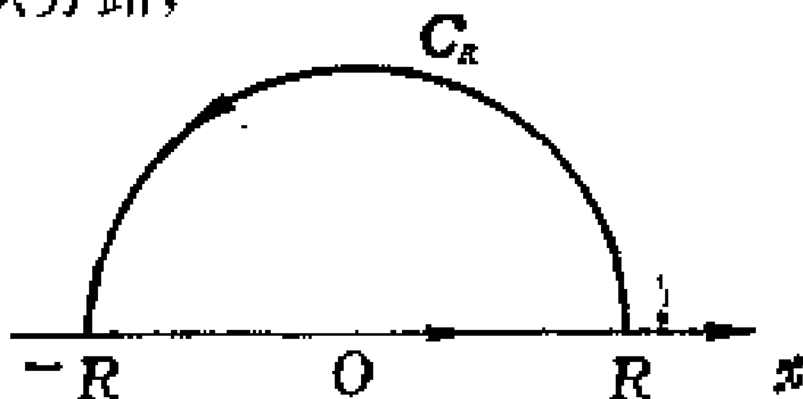


图5·3

（3） 应用留数定理，则

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i[R(f, \alpha) + R(f,\beta)]$$

而 α 与 β 都是 $f(z)$的一阶极点．由相应的留数计算方法得

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha)\frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\alpha)(z+\beta)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}i}.$$

$$\mathrm{Res}(f,\beta) = \lim_{z\to\beta} (z-\beta)\frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\alpha)(z+\beta)}$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}i},$$

于是有

$$\int_{-R}^{R} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, \alpha) + \mathrm{Res}(f, \beta)]$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}i} + \frac{1-\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}i}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

（4）取极限。当$R\to\infty$时对上式两边取极限。由预理1可知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0。$$

乃得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}。$$

由于$\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$为偶函数，我们立即可以得到另一个积分的结果是

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}。$$

由此不难想到，如果问题一开始就是求$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$，那么依偶函数的性质，我们便可将问题归结为求$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$，只要$f(x)$是偶函数。请看下面的例题：

【例2】试计算积分$\int_0^{\infty}\dfrac{dz}{(x^2+1)^2}$

【解】因$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$为偶函数，所以

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}。$$

（1）取辅助函数并求有限值的奇点。令

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$$

由$(z^2+1)^2=0$得$z=\pm i$为$f(z)$的二阶极点，其中只有$z=i$位于上半平面。

（2） 依奇点选取辅助积分路，取圆半径为$R>1$（图5·3）。

（3） 由留数定理，则有

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{C_R} f(z)\,dz=2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,\ i).$$

而 $z=i$为 $f(z)$ 的二阶极点，由相应的留数算法得

$$\mathrm{Res}(f,\ i)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\cdot\frac{1}{(z-i)^2\cdot(z+i)^2}\right]'$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'=\frac{-2}{(2i)^3}=-\frac{1}{4}i.$$

故

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{C_R} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}i\right)=\frac{\pi}{2}.$$

（4） 令$R\to\infty$，对上式两边取极限．因

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}$$

则

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}.$$

II. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx$型及举例

其中 $m>0$；$P(x)$与 $Q(x)$都与I型中的条件相同。

【例3】 计算积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dz$，$a>0$。

【解】（1）选取辅助函数，并求有限值奇点。

令

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$

由 $z^2+a^2=0$ 得 $f(z)$ 在上半平面只有一个奇点 $z=ai$；

（2）依 $z=ai$ 选取辅助积分路。（图5·3）；（其中 $R>a$）

（3）由留数定理，得

$$\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,\ ai)$$

$$=2\pi i\left[\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}}{(z-ai)(z+ai)}\right]=\frac{\pi}{ae^a}.$$

（4）令 $R\to\infty$，对上式两端取极限。由预理3知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$$

故得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{ae^a}.$$

因为

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

所以由本例题，我们立刻可以得到下面两个积分的结果：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx\right)=\frac{\pi}{ae^a};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+a^2}dx=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx\right)=0.$$

一般来说．利用Ⅰ型积分的结果，我们可得出下面两种“混合型”积分的值

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\,dx=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}\,dx\right);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\,dx=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx\right).$$

自然，这里的 m、$P(x)$、$Q(x)$ 都是受Ⅰ型积分条件的限制。

【例 4】 试计算积分$\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}dx$，$\beta>0$，$b>0$。

【解】 因为

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{i\beta x}}{(x^2+b^2)^2}dx\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}A.$$

为计算A

（1） 选取辅助函数并求其有限值奇点。

令

$$f(z)=\frac{z\cdot e^{i\beta z}}{(z^2+b^2)^2}$$

由$(z^2+b^2)^2=0$得 $f(z)$在上半平面只有一个奇点$z=bi$；

（2） 依 bi 选取积分路（图5·4）

其中 $R>|b|$。

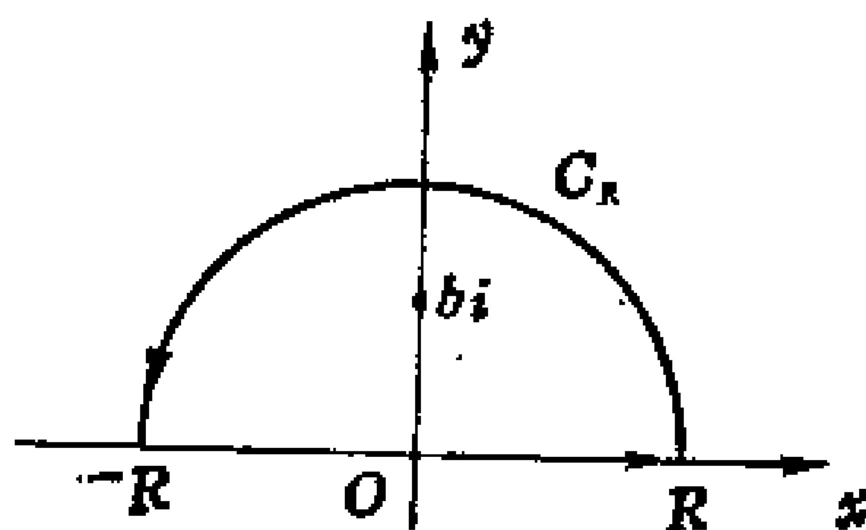


图5·4

（3） 用留数定理得

$$\int_{-R}^{R}f(x)\,dx+\int_{C_R}f(z)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,\ bi)$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{1!}\lim_{z\to bi}\left((z-bi)^2\cdot\frac{ze^{i\beta z}}{(z-bi)^2(z+bi)^2}\right)'\right]$$

$$=2\pi i\frac{\beta e^{-b\beta}}{4b}=\frac{\pi\beta e^{-b\beta}}{2b}i.$$

（4）令$R\to\infty$，对上式两边取极限。由预理3知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$$

故

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{i\beta x}}{(x^2+b^2)^2}dx=\frac{\pi\beta e^{-b\beta}}{2b}i$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}A=\frac{\pi\beta e^{-b\beta}}{4b}.$$

III. $\int_0^{2\pi}\mathrm{Ra}(\cos x,\sin x)dx$型及举例

其中 $\mathrm{Ra}(\cos x,\ \sin x)$表示$\cos x$及$\sin x$的一个有理函数，且在$[0,2\pi]$上连续。

因为$\cos x$与$\sin x$都以2π为周期，所以$\mathrm{Ra}(\cos x,\ \sin x)$也以$2\pi$为周期。于是

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Ra}(\cos x,\sin x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Ra}(\cos x,\ \sin x)dx.$$

为了处理Ⅲ型的积分，我们是将Ⅲ型的积分转化为已经处理过的那几种类型中的某一种。例如

（一）将Ⅲ型积分转化为计算某一复变函数沿一闭路的积分。

设法将$\mathrm{Ra}(\cos x,\ \sin x)$变为复变量$z$的函数。为此，我们把$\cos x$与$\sin x$分别用$z$表示出来。

因为依 Euler 公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

$$\therefore\ \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{e^{2ix}-1}{2ie^{ix}};$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{e^{2ix}+1}{2e^{ix}}.$$

设 $e^{ix}=z$，则

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

另外，把 dx 变为

$$dx = \frac{dz}{iz},$$

并且当 x 由0变到 2π时，可得单位圆周 $C\{z: |z| = 1\}$，于是

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Ra}(\cos x, \sin x)\, dx = \int_C \mathrm{Ra}\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}.$$

这样，就将Ⅱ型积分化成了复变函数沿闭路的积分。

（二）将Ⅱ型积分转化为Ⅰ型的积分。

设法将 $\mathrm{Ra}(\cos x, \sin x)$ 化成某一实变量 t 的有理函数。为此，只须将$\cos x$与 $\sin x$分别表为 t 的有理函数即可。而这首先又需要将它们用含x的公式表示出来，由于

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

我们令

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

则

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

并且当x由 $-\pi$变到 π 时， t 由 $-\infty$变到∞，于是

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Ra}(\cos x,\sin x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Ra}(\cos x,\sin x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Ra}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

这样，就将Ⅱ型积分化成了Ⅰ型积分.

在上述方法（一）与（二）中，我们常用（一）法来计算Ⅱ型积分，当然要依具体问题来使用.

【例 5】 试证积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+2\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{21}}$.

【证明】 令 $z=e^{i\theta}$，则

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\quad d\theta=\frac{dz}{iz},$$

当θ由0变到 2π 时，可得单位圆周C: $|z|=1$。于是有

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+2\cos\theta}=\int_C\frac{dz}{i(z^2+5z+1)}$$

由 $z^2+5z+1=0$ 可得在 $|z|<1$内只有被积函数的一个一阶极点为 $\alpha=\frac{1}{2}(-5+\sqrt{21})$. 而

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+5z+1},\alpha\right)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{1}{(z-\alpha)\left(z+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{21}}.$$

于是有

$$\frac{1}{i}\int_C\frac{dz}{z^2+5z+1}=\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+5z+1},\alpha\right)$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{21}}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+2\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{21}}.$$

【例 6】试证

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}. \qquad (0<p<1)$$

【证明】令 $z=e^{ix}$，则

$$\cos x=\frac{z^2+1}{2z},\ dx=\frac{dz}{iz},$$

当 x 从0变到 2π 时，可得圆周 C: $|z|=1$。于是有

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}=\frac{1}{i}\int_C\frac{dz}{[-pz^2+(p^2+1)z-p]}$$

$$=-\frac{1}{i}\int_C\frac{dz}{p\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)}$$

$$=-\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{p\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)},\ p\right)$$

因为被积分函数只有一个一阶极点 $z=p$ 位于圆域 C': $|z|<1$内。所以

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{p\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)},\ p\right)$$

$$=\lim_{z\to p}(z-p)\cdot\frac{1}{p\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)}=\frac{1}{p^2-1}.$$

故得

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}.$$

习　题(5·2)

1．计算下列积分

1）$\int\limits_C \sin\frac{1}{z}dz$，$C$：$|z|=r$ $(r\neq 0)$．

2）$\int\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}dz$．

3）$\int\limits_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$，$C$：$x^2+y^2=2(x+y)$．

2．证明下列等式：

1）$\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}dz=0$，其中 $|a|<1$，$|b|<1$，$a\neq b$，n 为正整数．

2）$\int\limits_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz=\frac{-\pi i}{121}$．

3）$\int\limits_{|z|=n} \operatorname{tg}\pi z dz=-4ni$，$n$ 为正整数．

4）$\int\limits_{|z|=2} \frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}=-\pi^2 i$．

3．计算下列积分：

1）$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$，$a>0$，$b>0$．

2）$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-x+2}dx$．

3）$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{2x^4+5x^2+2}dx$．

4) $\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$，$a>0$。

5) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$。

4．计算下列积分：

1) $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{\frac{5}{4}+\sin x}dx$。

2) $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}d\theta$，$a>1$。

3) $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(1+a\cos x)^2}dx$，$0<a<1$。

4) $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}dx$。

5) $\int_{0}^{\pi}\operatorname{tg}(\theta+ib)d\theta$，$b$ 为实数且不为零。

6) $\int_{0}^{2\pi}\operatorname{ctg}(\theta+b)d\theta$，$b$ 为复数且 $\operatorname{Im}b\neq 0$。

5．计算下列积分：

1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$。

2) $\int_{0}^{\infty}\frac{x\cdot\sin ax}{x^2+1}dx$，$a>0$。

3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\sin x}{x^2+4x+20}dx$。

4）$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.

5）$\int_{0}^{\infty} \frac{x \cdot \sin \lambda x}{x^4+b^4} dx$, $\lambda>0$, $b>0$.

6．试证：

$$\int_{0}^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos(nx - \sin x) dx = \frac{2\pi}{n!}.$$

7．设 C 为逐段光滑闭曲线，$\mathrm{int}(C)=G$，函数 $f(z)$ 在 G 内除极点 a_1，a_2，…，a_n（均$\neq 0$）外解析，在 $\overline{G}=G\cup C$ 上除这些点外连续，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_{k=1}^{n} G_k(z),$$

其中 $z\neq 0$，且 $z\in G$ 及 $z\neq a_k$（$k=1, 2, \cdots, n$），$G_k(z)$ 为 $f(z)$ 在点 a_k 的 Laurent展开式的主要部分．试证之．

§5·4　辐角原理、Rouché定理及其应用

1．对数留数

定理 1　设C为一条逐段光滑闭曲线，a_1，a_2，…，$a_m\subset \mathrm{int}(C)$ 为函数 $f(z)$的零点，它们的阶分别为 α_1，α_2，…，α_m；且当 $z\in C$ 时，$f(z)\neq 0$；b_1，b_2，…，$b_n\subset \mathrm{int}(C)$为函数 $f(z)$ 的极点，它们的阶分别为 β_1，β_2，…，β_n；$f(z)$在 $z\in\{\mathrm{int}(C)\cup C\}$上除 b_1, b_2，…，b_n外为解析函数，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum_{i=1}^{n} \beta_j \qquad (1)$$

【证明】要证（1）式，实际上是计算左边的积分．为此需要弄清该积分的类型，然后才好用相应的方法去计算．从积分路看，

左边的积分是沿闭路C进行的．从被积函数看，它在集$C\cup\mathrm{int}(C)$上解析还是非解析？从被积函数的形状与$f(z)$的条件可以看出，使$\frac{f'(z)}{f(z)}$不解析的点至多只能是点$a_1, a_2, \cdots, a_m$与$b_1, b_2, \cdots, b_n$。事实上，$a_j (j=1, 2, \cdots, m)$与$b_l (l=1,2,\cdots,n)$都是$\frac{f'(z)}{f(z)}$的一阶极点．这是因为a_j为$f(z)$的α_j阶零点．所以在$B=\{z: |z-a_j|<R\}$内有

$$f(z)=(z-a_j)^{\alpha_j}\cdot\varphi(z).$$

其中$\varphi(z)$在a_j解析，且$\varphi(a_j)\neq 0$．于是

$$f'(z)=\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1}\cdot\varphi(z)+(z-a_j)^{\alpha_j}\cdot\varphi'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha_j}{(z-a_j)}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \tag{2}$$

显然，$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$在$a_j$处解析，$a_j$为$\frac{f'(z)}{f(z)}$的一阶极点．

又因为b_l为$f(z)$的β_l阶极点，所以在$K=\{z: 0<|z-b_l|<r\}$内有

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-b_l)^{\beta_l}}$$

其中$g(z)$在b_l点解析且$g(b_l)\neq 0$．于是有

$$f'(z)=\frac{g'(z)}{(z-b_l)^{\beta_l}}-\frac{g(z)\cdot\beta_l}{(z-b_l)^{\beta_l+1}}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{\beta_l}{(z-b_l)} \tag{3}$$

可见$\frac{g'(z)}{g(z)}$在b_l点解析，并且b_l为$\frac{f'(z)}{f(z)}$的一阶极点．

至此，我们得到了：被积函数$\frac{f'(z)}{f(z)}$在$C\cup\mathrm{int}(C)$上除$m+n$个一阶极点$a_1, a_2, \cdots, a_m; b_1, b_2, \cdots, b_n$外是解析的．于是由§5·1的定理1，可有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a_j\right)$$

$$+\sum_{l=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},\ b_l\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum_{l=1}^{n}\beta_l \qquad \text{(证毕)}$$

（1）式左端的积分通常称为函数 $f(z)$关于闭路 C 的对数留数．因为$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$是 $f(z)$ 的对数导函数$\dfrac{d}{dz}(\log f(z))$．

如果我们把一个 α_j 阶零点算作 α_j 个零点，把一个 β_l 阶极点算作 β_l 个极点，则（1）式右端的差就是 $f(z)$在 $\mathrm{int}(C)$ 的零点个数与极点个数之差．

因此，计算复变函数沿闭路的积分又多了一种方法．即依（1）式先将被积函数化成$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的形状后，且满足定理 **1** 的全部条件，并求出 $f(z)$在 $\mathrm{int}(C)$ 内的零点与极点．当它们全被找到后，再作（1）式右端的差．

特别地，如当（1）式左端被积函数中的 $f(z)$ 在 $C\cup\mathrm{int}(C)$ 皆无奇点时，则计算左端形状的积分，只须将 $f(z)$在 $\mathrm{int}(C)$ 内的零点个数算出即可．

例如，方程$z^{10}-1=0$在圆周$C=\{z: |z|=4\}$的内部有10个根，即函数 $z^{10}-1$在 $\mathrm{int}(C)$有10个零点．且 $z^{10}-1$ 在闭圆域 $\bar{B}=\{z: |z|\leqslant 4\}$上解析．于是依（1）式有

$$\int_C \frac{10z^9}{z^{10}-1}dz = 2\pi i\times 10 = 20\pi i.$$

2．辐角原理

定理 2（辐角原理）

在定理 1 的条件下，有

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{l=1}^{n}\beta_l=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\ \arg f(z).$$

其中 $\Delta_C\arg f(z)$ 表示 z 沿C的正向绕行一周后 $f(z)$的辐角的改变量.

【证明】 由定理 1 有

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{l=1}^{n}\beta_l=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C(\log f(z))'dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\log f(z)\Big|_{z_0}^{z}=\frac{1}{2\pi i}[\log|f(z)|+i\arg f(z)]\Big|_{z_0}^{z}$$

当z 沿 C 的正向从 $z_0\in C$ 出发，绕行一周后再回到 z_0 时，$\log|f(z)|$ 的值从 $\log|f(z_0)|$ 开始连续变化最后仍为 $\log|f(z_0)|$；而 $\arg f(z)$却不一定回到开始的值 $\arg f(z_0)$，这要依 $f(z)$所在的曲线 C' 绕原点的周数而定（图5·5）.

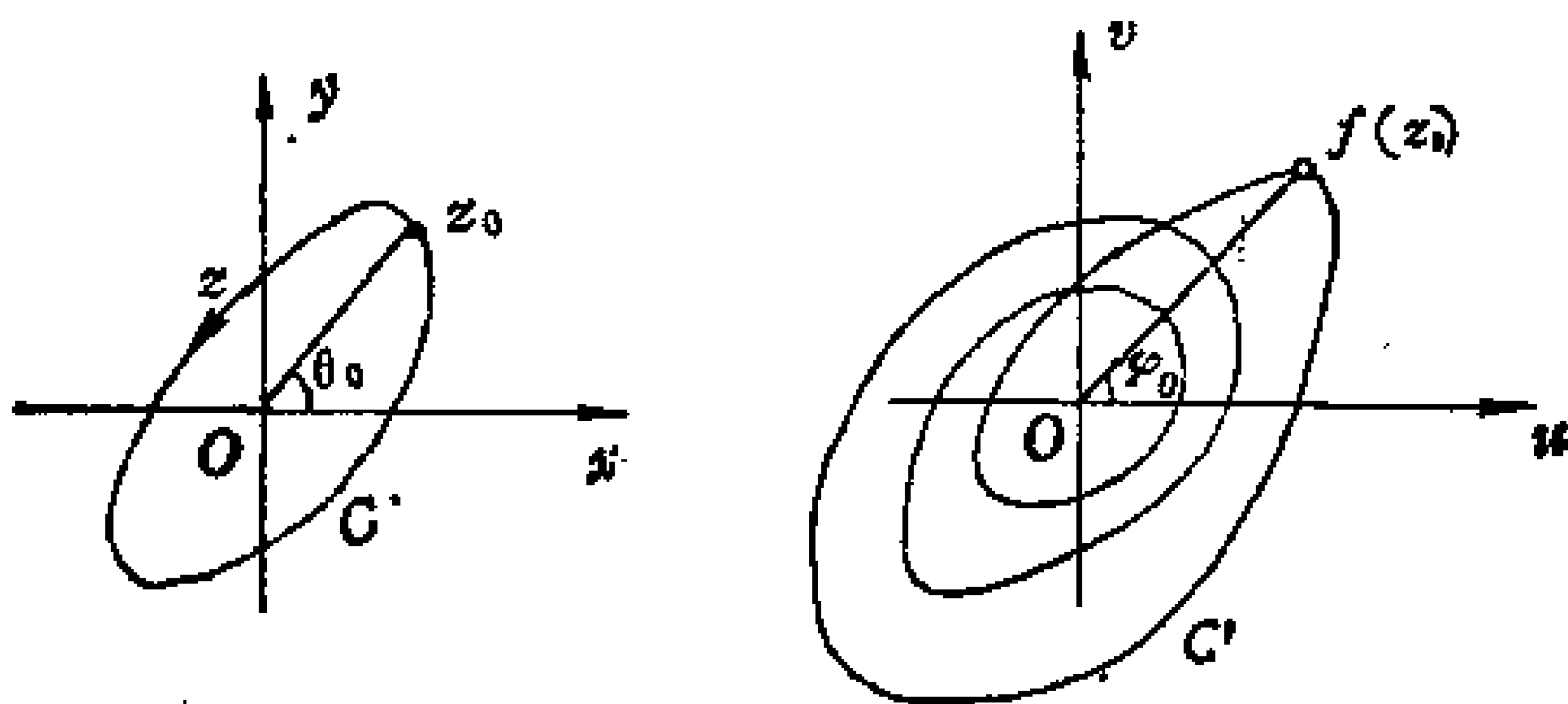


图 5·5

如果 C' 不绕原点时，则点 z 在 C 上从 z_0 出发绕行一周再回到 z_0 时，$\arg f(z)$与开始的值 $\arg f(z_0)$相同；如果 C'绕原点k次，则点 z 在 C 上绕原点一周再回到 z_0 时，$\arg f(z)$应为$\arg f(z_0)+2k\pi$（k为整数），这是因为当沿 C 绕行一周时，对应地，C' 绕原点时，可依逆时针方向也可依顺时针方向（k 为正或为负）．于

是，由前式得

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j-\sum_{l=1}^{n}\beta_l=\frac{1}{2\pi i}[\log|f(z)|+i\arg f(z)]\Big|_{z}^{z_0}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}[\log|f(z_0)|-\log|f(z_0)|+i((\arg f(z_0)+2k\pi)$$

$$-\arg f(z_0))$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot i((\arg f(z_0)+2k\pi)-\arg f(z_0))$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z).$$ （证毕）

由于符号 $\Delta_C\arg f(z)$ 的引入，可以看到辐角原理实际上是定理1的一种几何解释。

利用辐角原理，我们可以得到一个判定解析函数的零点分布状况的非常有用的定理——Rouché（儒歇）定理。而判定解析函数的零点分布状况的问题无论在理论上，还是在实际应用上，都较为有价值。

3. Rouché 定理及其应用

这个定理又称为**零点个数比较定理**。

定理3 设 C 为逐段光滑闭曲线。函数 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 当 $z\in\{C\cup\text{int}(C)\}$ 时为解析函数，且满足

$$|\varphi(z)|<|f(z)|,\quad z\in C.$$

则函数 $f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 $\text{int}(C)$ 的零点个数相同（n阶零点算作n个零点）.

【证明】只须证明

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg[f(z)+\varphi(z)]=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)$$

即证

$$\Delta_C\arg[f(z)+\varphi(z)]=\Delta_C\arg f(z).$$

但是

$$\Delta_C \arg[f(z)+\varphi(z)] = \Delta_C \arg\left[f(z)\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right]$$

$$= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)$$

所以只须证明

$$\Delta_C \arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = 0$$

即可。为此，令

$$W = 1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

于是

$$|W-1| = \left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|$$

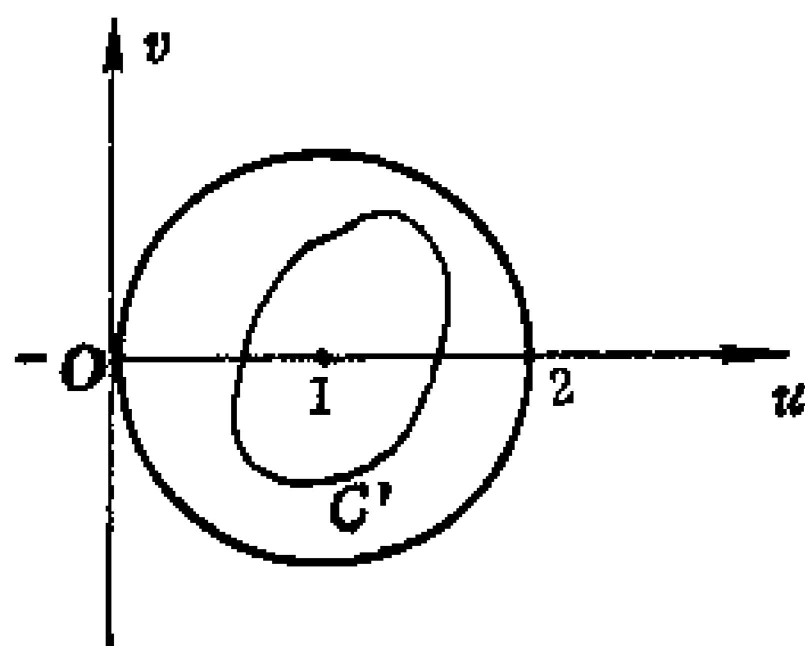


图 5·6

当 $z\in C$ 时有

$$|W-1| < 1.$$

这说明当 z 沿 C 绕行一周时，相应的函数值 W 相应地在圆域 B: $|W-1|<1$ 内的一条闭曲线 C' 上变化（图5·6）。显然，C' 不含原点，故

$$\Delta_C \arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

于是，

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg[f(z)+\varphi(z)] = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

即函数 $f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 当 $z\in \operatorname{int}(C)$ 时的零点个数相同。

（证毕）

【例 1】 问 $g(z)=z^8-5z^5-2z+1$ 在 $B=\{z: |z|<1\}$ 内有几个零点？

【解】 令 $f(z)=-5z^5$，$\varphi(z)=z^8-2z+1$，显然 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 均

在 $\bar{B}=\{z: |z|\leqslant 1\}$上解析，且在 $C=\{z: |z|=1\}$上有

$$|f(z)|=5, \quad |\varphi(z)|\leqslant |z^8|+|-2z|+1=4$$

即

$$|f(z)|>|\varphi(z)|, \quad z\in C$$

所以由Rouché定理知 $g(z)$在 $B: |z|<1$内的零点个数与 $f(z)$的相同。而 $f(z)=-5z^5$ 在B内的零点个数为5，故 $g(z)$ 在B内也有五个零点。

【例2】试证：任何一个n次多项式

$$P(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\cdots+C_n, \quad (C_0\neq 0, \ n\geqslant 1)$$

在 S_z 平面上必有 n 个零点。

【证明】应用 Rouché 定理，作圆周 $C: |z|=R$。然后检验 $f(z)=C_0z^n$ 与 $\varphi(z)=C_1z^{n-1}+\cdots+C_n$当 $z\in C\cup \mathrm{int}(C)$ 时是否满足定理所需条件？

显然，$f(z)$与 $\varphi(z)$在 $\bar{B}: |z|\leqslant R$ 上解析。

其次，在 $C: |z|=R$上有

$$|f(z)|=|C_0|R^n,$$

$$|\varphi(z)|=|C_1z^{n-1}+C_2z^{n-2}+\cdots+C_n|$$

$$\leqslant |C_1|R^{n-1}+|C_2|R^{n-2}+\cdots+|C_n|,$$

为使

$$|f(z)|>|\varphi(z)|$$

只须取

$$R>\max\left\{\frac{|C_1|+\cdots+|C_n|}{|C_0|}, 1\right\}$$

即可。因为，此时有

$$|\varphi(z)|<(|C_1|+\cdots+|C_n|)R^{n-1}<|C_0|R^n=|f(z)|$$

由 Rouché 定理可知

$$f(z)+\varphi(z)=P(z)\text{与 } f(z)=C_0z^n,$$

在 $B: |z|<R$内的零点个数相同，而 C_0z^n 在 $B: |z|<R$ 内有 n个零点，故 $P(z)$ 在 Sz 平面上必有n 个零点。

习 题(5·3)

1．记号 $\text{Res}(f, a)$表示什么？它与 $f(z)$在 a 点的去心邻域的展开式中的系数有何联系？

2．试总结函数在其极点的留数的求法．为了计算函数在极点的留数，需要确定极点的阶，你有哪些方法可以判定极点的阶？

3．设函数以有限远点为可去奇点，其留数必为零，为什么？

设函数以无穷远点为可去奇点，其留数是否一定为零？为什么？

4．你能计算出函数 $f(z)=\frac{1}{\sin z}$在$z=\infty$的留数吗？为什么？

5．如果在扩充平面 $\hat{S}$ 上只有 $f(z)$ 的两个奇点，一为有限远点 a，另一为∞．试问 $\text{Res}(f, \infty)$与 $\text{Res}(f, a)$有何联系？试说明这种联系的实质，且指出 $\text{Res}(f, \infty)$与 $\text{Res}(f, a)$的异同．

6．到目前为止，你能用哪几种方法计算出复变函数沿闭路的积分？

7．在计算$\int_0^{2\pi} \text{Ra}(\cos x, \sin x)dx$ 型积分时，可作替换$z=e^{ix}$或$t=\text{tg}\frac{x}{2}$，然后再作计算．关于这两个替换，你是怎样想到的呢？

8．在计算

$$\text{I}.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx\text{与}\text{II}.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}\,dx,\ (m>0)$$

两种类型的积分时，基本想法是什么？我们是通过哪几个步骤来实现这一想法的？在选取辅助函数与辅助积分路时需要注意什么问题？有无规律可循？

9．你能否从 Rouché 定理的证明中，找出在C上要求 $f(z)\neq 0$与 $f(z)+\varphi(z)\neq 0$ 的理由？在定理的条件里有哪一条可以保证 $f(z)$与 $f(z)+\varphi(z)$在C 上均无零点？

10. 计算下列函数在其所有极点处的留数

1） $\dfrac{1}{z^3(z+4)}$.

2） $\dfrac{1}{z^2+2z+1}$.

3） $\dfrac{1}{z^3-3}$.

11. 计算下列函数在其有限奇点的留数

1） $\dfrac{e^z}{(1-z)^3}$.

2） $\dfrac{e^z}{z(1-z)^3}$.

3） $\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$.

12. 计算积分

1） $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-2x+4}dx$.

2） $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

3） $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2+\cos^2\theta}d\theta$.

4） $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$.

5） $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz$.

13. 设 $g(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，且 $|g(z)|<1$，试问方程

$g(z)=z$

在 $|z|<1$ 内有几个根？

14．试问方程

$$z^4 - 8z + 10 = 0$$

在 $|z| < 1$ 内与在 $1 < |z| < 2$ 内各有几个根？

15．如果 $|a| > \frac{e^R}{R^n}$，试问方程

$$e^z = az^n \qquad (n：正整数)$$

在 $|z| < R$ 内有几个根？

16．试证方程

$$e^{z-\beta} = z \qquad (\beta > 1)$$

在 $|z| < 1$ 内只有一个根。

17．试问方程

$$e^z - e^\beta z^n = 0 \qquad (\beta > 1)$$

在 $|z| < 1$ 内有几个根？

18．设 $g(z)$ 在逐段光滑闭曲线 C 的内部除有一个一阶极点外解析，并在 C 上解析，且 $|g(z)| = 1$。试证：

$$g(z) = a \qquad (|a| > 1)$$

在 C 的内部只有一个根。

19．利用 Rouché 定理确定下列方程在 $B = \{z: |z| < 1\}$ 内的根的个数

1）$z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$。

2）$2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$。

3）$z^8 + 4z^5 + z^2 - 1 = 0$。

4）$z^4 + 6z + 10 = 0$。

20．方程

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

在 $|z| < 1$ 与圆环域：$1 < |z| < 2$ 内各有几个根？

学 习 指 导

一、内容与要求

在这一章，我们首先建立了留数概念，进而推得复变函数理论的主要结果之一的留数基本定理．在此基础上又获得了 Rouché定理（零点个数比较定理）．最后，我们讨论了留数理论在三个方面的应用：一是计算复变函数沿闭路的积分；二是计算某些实变量函数的定积分；三是判定某些函数的零点分布．

本章的重点是留数基本定理．为了便于应用它，希望读者做到：（1）弄清留数定义，总结并熟练掌握计算留数的一般方法与特殊方法；（2）牢记留数基本定理的条件与结论；（3）理解并掌握利用留数基本定理计算定积分的想法、步骤及注意事项（参看习题（5·3）8 题的解答），熟练掌握 §5·4所论三种类型积分的计算；（4）弄懂 Rouché定理的证明方法；牢记 Rouché 定理的条件与结论，并应用它确定某些函数在指定范围内的根的个数．

二、例　　题

【例 1】 试求 $f(z)=\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}$在 $z=0$ 与 $z=\infty$处的留数．

【解】 因为 $f(z)$在 $z=0$与 $z=\infty$的 Laurent级数均为

$$\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{z^3}$$

所以

$$\text{Res}(f,\ 0)=C_{-1}=1,\ \text{Res}(f,\ \infty)=-C_{-1}=-1.$$

这里要强调指出的是：在用C_{-1}计算留数时，对于函数在$z=\infty$处的留数，应是“$-C_{-1}$”，其中 C_{-1} 前面的“$-$”号常常容易丢掉而造成错误．希读者注意．

【例2】 设 $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$，试计算 $\mathrm{Res}(f,\ -1)$ 与 $\mathrm{Res}(f,\infty)$。

【解】 因 $z=-1$为 $f(z)$的三阶极点，依计算在极点处的留数的方法有

$$\mathrm{Res}(f,-1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\left[(z+1)^3\cdot\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}(\sin 2z)''$$

$$=2\cdot\sin 2.$$

为计算$\mathrm{Res}(f,\ \infty)$，本来可以用定义或求"$-C_{-1}$"而得。但因为有定理2（§5·1），所以我们可以应用定理2得

$$\mathrm{Res}(f,\ \infty)=-\mathrm{Res}(f,\ -1)$$

$$=-2\sin 2.$$

容易看到，在此用定理2来计算 $\mathrm{Res}(f,\ \infty)$ 的值较之用定义或求"$-C_{-1}$"来计算要简单些。

【例3】 设 z_0 为 $f(z)$ 的 n 阶极点，且设

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$$

其中 $\varphi(z)$在点 z_0 处解析且$\varphi(z_0)\neq 0$，试求 $\mathrm{Res}(f,\ z_0)$。

【解】 因为 $\varphi(z)$在点 z_0 解析，则存在 $\rho>0$使得 $\varphi(z)$ 在B：$|z-z_0|\leqslant\rho$上解析，于是

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}dz$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(z_0).$$

自然，本题也可以用适合极点的方法去算。不过如果用计算

C_{-1} 的方法就较麻烦些。

【例 4】 试证

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\cdot\sin\frac{\pi}{n}},$$

其中整数 $n\geqslant 2$。

【证明】 从所要证明的等式左边来看，被积函数的形状与 I 型（§5·2）同；但积分是从 $0\to\infty$，这与 I 型又不同，并且被积函数的奇、偶性也无法确定。我们现在按照用留数基本定理计算定积分的方法和步骤来计算这个积分。

首先，依被积分的函数选取辅助函数

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$

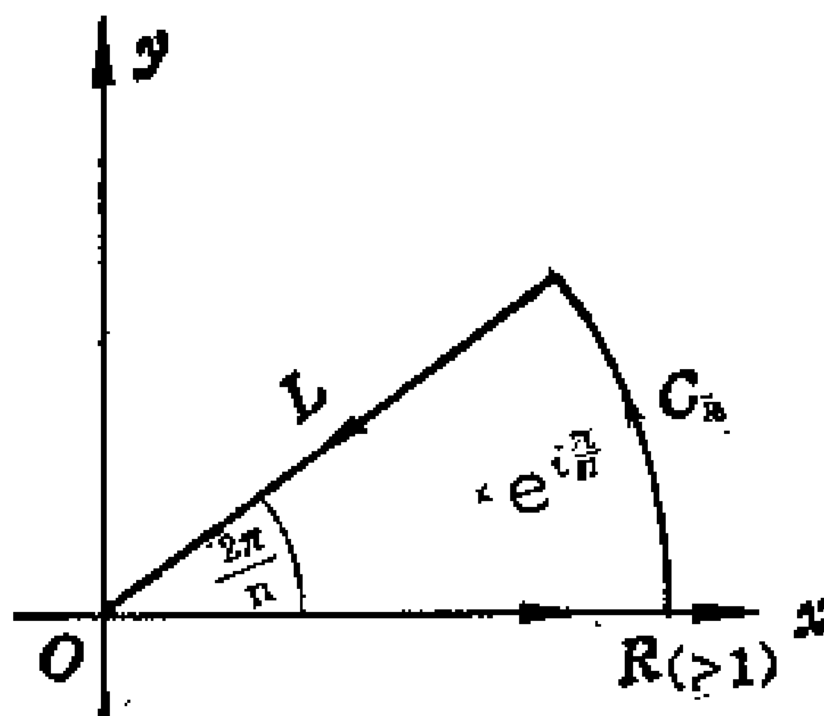
并求它的一切有限奇点。这些奇点来自方程

$$1+z^n=0$$

的根 $\sqrt[n]{-1}$，它们是

$$e^{i\frac{\pi}{n}},\quad \cdots,\quad e^{i\frac{2n-1}{n}\pi},$$

显然，它们每两个相邻点的辐角的差为 $\frac{2\pi}{n}$，且当 $n\geqslant 2$ 时，点 $e^{i\frac{\pi}{n}}$ 总



指导图 5·1

位于上半平面。

其次，选取辅助积分路如（指导图5·1）。由图可见，在所选闭路的内部，只含 $f(z)$ 的一个奇点 $e^{i\frac{\pi}{n}}$。

第三，应用留数基本定理得

$$\int_0^R f(x)dx+\int_{C_R} f(z)dz+\int_L f(z)dz$$

$$=2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^n},e^{i\frac{\pi}{n}}\right) \qquad (1)$$

应用关于极点的留数的求法得

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^n},\ e^{i\frac{\pi}{n}}\right)=-\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} \qquad (2)$$

最后，令 $R\to+\infty$，取极限得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0 \qquad \text{（由预理 1）}$$

在 L 上，令 $z=re^{i\frac{2\pi}{n}}$，于是

$$\lim_{R\to\infty}\int_L\frac{dz}{1+z^n}=\lim_{R\to\infty}\int_R^0\frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}}{1+r^n}dr$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(-\int_0^R\frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}}{1+r^n}dr\right)$$

$$=-\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}}{1+x^n}dx;$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{1}{1+x^n}dx.$$

将所得到的诸极限表示式及（2）代入（1），整理得

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^n}=\frac{2\pi i\cdot e^{i\frac{\pi}{n}}}{n\cdot(e^{i\frac{2\pi}{n}}-1)}$$

$$=\frac{\pi}{n\cdot\sin\frac{\pi}{n}}.$$

【例5】计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z\cdot\sin z}{(1-e^z)^3}dz$.

【解】这是一个复变函数沿闭路的积分问题。为计算它，需要弄清被积函数在 $\bar{B}$: $|z|\leqslant 1$ 上的情况（如是否解析等等。）

容易看到，被积函数在 $\bar{B}$: $|z|\leqslant 1$上是以 $z=0$为孤立奇点的。事实上，被积函数的奇点就是使 $1-e^z=0$ 的点 $z_k=2k\pi i$，$k=0$，±1，±2，…。其中位于 $|z|=1$内部的仅有点 $z=0$。因此由定理1（§5·1）得

$$\int_{|z|=1}\frac{z\cdot\sin z}{(1-e^z)^3}dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{z\cdot\sin z}{(1-e^z)^3},0\right)\qquad(1)$$

由于奇点 $z=0$ 的类别尚不清楚，故用计算 C_{-1} 的办法来计算（1）式右端的留数。为此，需求被积函数在 $z=0$点的Laurent级数，而有

$$\frac{z\cdot\sin z}{(1-e^z)^3}=\frac{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}{-\left(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)^3}$$

$$=-\frac{z^2}{z^3}\cdot\frac{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)}{\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right)^3}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\frac{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)}{\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right)^3}$$

$$=\frac{-\varphi(z)}{z}\qquad(2)$$

其中 $\varphi(z)$在点 $z=0$解析且 $\varphi(0)\neq0$。于是 $z=0$ 为 $-\frac{1}{z}\varphi(z)$的一

阶极点，

$$\mathrm{Res}\left(-\frac{\varphi(z)}{z},0\right)=\lim_{z\to 0}\left[z\cdot\left(\frac{-\varphi(z)}{z}\right)\right]=-\varphi(0)=-1$$

代入（1）便得到所求积分的值为 $-2\pi i$。

【例 6】试证

$$A=\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz=2\pi i.$$

【证明】为求A，先弄清被积函数在 B: $|z|\leqslant 4$ 上的情况。

被积函数共有七个奇点为：

$$z_{1,2}=\pm i,\quad z_{3,4,5,6}=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i},\quad k=0,1,2,3,\quad z_7=\infty.$$

前六个奇点均被包含在 C: $|z|=4$ 的内部（这六个奇点可由被积函数的分母等于零解出）。由定理 1 得

$$A=2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{6}\mathrm{Res}\left(\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3},\ z_j\right)\qquad(1)$$

因计算右端六个奇点的留数十分麻烦，故我们可应用定理 2 来求出留数的和为

$$\sum_{j=1}^{6}\mathrm{Res}\left(\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3},\ z_j\right)$$

$$=-\mathrm{Res}\left(\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3},\ \infty\right)\qquad(2)$$

为计算在 $z=\infty$的留数，先求函数在 $z=\infty$ 的 Laurent 级数，即

$$\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}=\frac{z^{15}}{z^{16}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-2\cdot\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1-3\cdot\frac{2}{z^4}+\cdots\right)$$

由此可得 $C_{-1}=1$。于是由（1）与（2）得

$$A=2\pi i\left[-\mathrm{Res}\left(\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3},\ \infty\right)\right]$$

$= 2\pi i \cdot [-(-C_{-1})]$

$= 2\pi i$.

【例 7】 设多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_t z^{n-t} + \cdots + a_n,\quad a_t \neq 0$$

满足条件

$$|a_t| > |a_0| + \cdots + |a_{t-1}| + |a_{t+1}| + \cdots + |a_n|$$

则 $P(z)$在单位圆域：$|z|<1$内有 $(n-t)$个零点，试证之。

【证明】 为了确定$P(z)$的零点的个数，我们用 Rouché 定理。为此，适当将 $P(z)$分为合于定理条件的 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$。而这又只须选出 $f(z)$即可（因为 $\varphi(z) = P(z) - f(z)$）。

取 $f(z) = a_t z^{n-t}$

$\varphi(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{t-1} z^{n-t+1} + a_{t+1} z^{n-t-1} + \cdots + a_n$，容易看到 $f(z)$与 $\varphi(z)$在 $|z| \leqslant 1$上解析，在 $|z| = 1$上经检验有

$$|f(z)| > |\varphi(z)|$$

则由 Rouché 定理知 $f(z)$与 $f(z) + \varphi(z) = P(z)$在 B: $|z|<1$内的零点个数相同。而 $f(z)$ 在B内的零点个数为 $(n-t)$，所以$P(z)$在B内有$(n-t)$个零点。

【例 8】 试证明方程

$$z + e^{-z} = \lambda,\quad \lambda > 1$$

在右半平面内有唯一的一个实根。

【证明】 为便于考虑问题起见，取由线段 $[-Ri, Ri]$ 与右半圆周 $|z| = R$组成的闭曲线C来检验 Rouché 定理的条件。

我们取 $f(z) = \lambda - z$, $\varphi(z) = -e^{-z}$，则在线段 $[-Ri, Ri]$上，由于 $z = yi$，则有

$$|f(z)| = |\lambda - iy| \geqslant \lambda > 1$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-yi}| = 1,$$

在半圆周：$\{|z| = R,\ \mathrm{Re}z = x(>0)\}$ 上，当R充分大时 $(R > \lambda + 1)$，有

$$|f(z)| \geqslant |z| - \lambda > 1,$$

$$|\varphi(z)| = e^{-x} \leqslant 1.$$

总之，在C上满足条件：

$$|f(z)| > |\varphi(z)|$$

又因 $f(z)$与 $\varphi(z)$ 在C的内部直到C上解析，故由 Rouché 定理知 $f(z)+\varphi(z)$与 $f(z)$在C的内部有相同个数的零点．而 $f(z)$ 在C的内部只有一个零点，故 $f(z)+\varphi(z)$ 在C的内部的零点的个数为 1．

又因当 $z=0$ 时，所给方程左边等于 $1(<\lambda)$；而当 $z=x\to\infty$时，左边无限制地增大，所以可有这样的$z=x$，使左边等于λ．故所给方程在右半平面内的根为实数．

三、习题解答

习　题(5·1)

2.【解】

1）因 $\pm i$ 为所给函数的二阶极点，所以

$$\text{Res}(i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)^2\cdot z^2}{(z+i)^2\cdot(z-i)^2}\right)' = -\frac{i}{4},$$

$$\text{Res}(-i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -i}\left(\frac{(z+i)^2\cdot z^2}{(z+i)^2\cdot(z-i)^2}\right)' = \frac{i}{4}.$$

2）因 $z=0$为所给函数的三阶极点，所以

$$\text{Res}(0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\cdot\frac{1}{z^3-z^5}\right)'' = 1;$$

因 $z=\pm 1$ 为所给函数的一阶极点，

$$\text{Res}(1) = \left[\frac{1}{(z^3-z^5)'}\right]_{z=1} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{Res}(-1) = \left[\frac{1}{(z^3-z^5)'}\right]_{z=-1} = -\frac{1}{2}.$$

3）因 $z=1$ 为所给函数的一阶极点，

$$\mathrm{Res}(1)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}=\frac{1}{4};$$

因 $z=-1$ 为所给函数的二阶极点，

$$\mathrm{Res}(-1)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-1}\left[(z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right]'=-\frac{1}{4};$$

由定理 2 (§5·2)，

$\therefore$ $\mathrm{Res}(\infty)=-[\mathrm{Res}(1)+\mathrm{Res}(-1)]=0.$

4）因 $z=n\pi$ 为所给函数的一阶极点，于是

$$\mathrm{Res}(n\pi)=\left[\frac{1}{(\sin z)'}\right]_{z=n\pi}$$

$$=\left(\frac{1}{\cos z}\right)_{z=n\pi}$$

$$=\begin{cases}1, & n\ \text{为偶数.}\\ -1, & n\ \text{为奇数.}\end{cases}$$

5）因为 $z=1$ 为所给函数的本性奇点，所以无特殊方法求留数，只得用定义或计算 C_{-1} 的办法来作. 今用后者，将所给函数在 $z=1$ 处展成 Laurent 级数

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n!(z-1)^n}+\cdots$$

所以 $C_{-1}=1$. 于是

$\mathrm{Res}(1)=C_{-1}=1.$

由定理 2 (§5·2) 得

$\mathrm{Res}(\infty)=-\mathrm{Res}(1)=-1.$

6）因 $\cos z-\sin z$ 在 $z=\infty$ 处的 Laurent 级数为

$$\cos z-\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^{2n}}{(2n)!}-\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

所以 $C_{-1}=0$，于是，$\mathrm{Res}(\infty)=-C_{-1}=0.$

7）因 $z=0$ 为所给函数的二阶极点，所以

$$\text{Res}(0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}\right]'=0;$$

因 $z=1$为所给函数的一阶极点，

$$\text{Res}(1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}=1;$$

由定理 2 (§5·2)可得

$$R(\infty)=-[R(0)+R(1)]=-1.$$

8）因为

$$\frac{e^z}{z\cdot\sin z}=\frac{e^z}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}=\frac{e^z}{z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)}$$

所以 $z=0$ 为所给函数的二阶极点．于是，

$$\text{Res}(0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{e^z}{z\cdot\sin z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots}\right)'$$

$$=1.$$

3．【解】

因 $\sin\frac{z}{z+1}$在点 $z=-1$处的 Laurent 级数为

$$\sin\frac{z}{z+1}=\sin\frac{z+1-1}{z+1}=\sin\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z+1}-\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z+1}$$

$$=\sin 1\cdot\left[1-\frac{1}{2!(z+1)^2}+\cdots\right]$$

$$-\cos 1\cdot\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\cdots\right]$$

所以 $C_{-1}=-\cos 1$,

$$\mathrm{Res}(-1)=C_{-1}=-\cos 1.$$

4．【解】

因$z=a$为 $f(z)$ 的一阶极点，$f(z)$在 $z=a$处的 Laurent 级数为

$$f(z)=\frac{C_{-1}}{z-a}+g(z),$$

其中 $g(z)$在 $z=a$解析．又因 $\mathrm{Res}(f,\ a)=A$，所以 $C_{-1}=A$，于是 $f(z)\cdot\varphi(z)$在 $z=a$处的 Laurent 级数为

$$f(z)\cdot\varphi(z)=\frac{A\cdot\varphi(z)}{z-a}+g(z)\cdot\varphi(z),$$

其中 $g(z)\cdot\varphi(z)$在 $z=a$ 解析，故 $z=a$为 $f(z)\cdot\varphi(z)$ 的一阶极点．于是

$$R[(f\cdot\varphi),\ a]=\lim_{z\to a}(z-a)[f(z)\cdot\varphi(z)]=A\cdot\varphi(a),$$

5．【答】

无意义．因为 $z=\infty$ 不是 $\mathrm{tg}z$ 的孤立奇点．

事实上，我们知道，使 $\cos z=0$的点 $z_k=(2k\pm1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$都为 $\mathrm{tg}z$ 的一阶极点，而

$$\lim_{k\to\infty} z_k=\infty.$$

所以 $z=\infty$ 为 $\mathrm{tg}z$ 的极点的极限点，故$z=\infty$不是 $\mathrm{tg}z$ 的孤立奇点．因而 $\mathrm{tg}z$ 在 $z=\infty$处是无留数可言的，记号 $\mathrm{Res}(\mathrm{tg}z,\ \infty)$无意义．

6．

【解法 1】由留数定义

$$\mathrm{Res}(1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\frac{1}{3}}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{5z-2}{z}}{z-1}dz$$

$$=\left(\frac{5z-2}{z}\right)_{z=1}=3.$$

【解法 2】将$\frac{5z-2}{z(z-1)}$在$z=1$的去心邻域 $0<|z-1|<1$ 展成 Laurent 级数为

$$\frac{5z-2}{z(z-1)}=\frac{5(z-1+1)-2}{(z-1+1)(z-1)}=\frac{5(z-1)+3}{(z-1)[(z-1)+1]}$$

$$=\frac{1}{1-[-(z-1)]}\cdot\left(5+\frac{3}{z-1}\right)$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right]\left(5+\frac{3}{z-1}\right)$$

$$=[1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots]\left(5+\frac{3}{z-1}\right)$$

$$=\frac{3}{z-1}+8+8(z-1)+8(z-1)^2+\cdots$$

所以

$$\text{Res}(1)=C_{-1}=3.$$

【解法 3】因 $z=1$ 为所给函数的一阶极点，所以

$$\text{Res}(1)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{5z-2}{z(z-1)}=3.$$

【解法 4】因 $z=1$ 为所给函数的一阶极点，且所给函数为一分式，故由相应的计算留数的方法有

$$\text{Res}(1)=\left\{\frac{5z-2}{[z(z-1)]'}\right\}_{z=1}=3.$$

【解法 5】由定理 2 (§5·2)得

$$\text{Res}(1)=-[\text{Res}(0)+\text{Res}(\infty)],$$

故只须求出 Res(0)与 Res(∞)即可.

因 $z=0$ 为所给函数的一阶极点，所以

$$\text{Res}(0)=\lim_{z\to0}z\cdot\frac{5z-2}{z(z-1)}=2.$$

将所给函数在 $z=\infty$的邻域：$|z|>1$ 展成 Laurent 级数有

$$\frac{5z-2}{z(z-1)}=\frac{5z-2}{z}\cdot\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

$$=\left(\frac{5}{z}-\frac{2}{z^2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

$C_{-1}=5$。于是

$$\text{Res}(\infty)=-C_{-1}=-5$$

所以得

$$\text{Res}(1)=-[\text{Res}(0)+\text{Res}(\infty)]=3.$$

7. 【答】

不对。因为可以举出反例如下：

令

$$f(z)=\frac{1}{z},\quad z_0=0$$

则有

$$\text{Res}(f,\ z_0)=\text{Res}\left(\frac{1}{z},0\right)=1,$$

而

$$\text{Res}(f^2,z_0)=\text{Res}\left(\frac{1}{z^2},0\right)=0\neq 1^2.$$

8. 【证明】因为

$$z^2\cdot\sin z=z^2\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)$$

$$=z^3\cdot\varphi(z)$$

所以 $z=0$ 为所给函数的三阶极点，于是

$$6\cdot\text{Res}\left(\frac{1}{z^2\cdot\sin z},0\right)=\frac{6}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\cdot\frac{1}{z^3\cdot\varphi(z)}\right]''$$

$$= 3\cdot\lim_{z\to 0}\frac{2\varphi'(z)-\varphi''(z)\cdot\varphi(z)}{\varphi^3(z)}$$

$$= 1.$$

这里，计算 $\varphi'(z)$ 与 $\varphi''(z)$ 时用到了级数的逐项微分法则。

习　题(5·2)

1. 【解】

1）由留数定义

$$\int_C \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\cdot\text{Res}\left(\sin\frac{1}{z},\ 0\right)$$

$$= 2\pi i\cdot C_{-1}$$

而 $\sin\frac{1}{z}$ 在 $z=0$ 处的 Laurent 级数为

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \cdots$$

所以 $C_{-1}=1$，于是

$$\int_C \sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i\cdot C_{-1} = 2\pi i.$$

2）由留数基本定理

$$\int_{|z|=3}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2-4)} = \int_{|z|=3}\frac{dz}{(z+i)(z-i)(z+2)(z-2)}$$

$$= 2\pi i[\text{Res}(i)+\text{Res}(-i)+\text{Res}(2)+\text{Res}(-2)]$$

而

$$\text{Res}(i) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{1}{(z+i)(z-i)(z^2-4)}\right] = \frac{i}{10};$$

$$\text{Res}(-i) = \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\frac{1}{(z+i)(z-i)(z^2-4)}\right] = -\frac{i}{10};$$

$$\text{Res}(2) = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{1}{(z^2+1)(z-2)(z+2)}\right] = \frac{1}{20};$$

$$\text{Res}(-2)=\lim_{z\to-2}\left[(z+2)\frac{1}{(z^2+1)(z-2)(z+2)}\right]=-\frac{1}{20},$$

所以

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2-4)}=0.$$

3）首先弄清C是什么样的曲线？为此将 $x^2+y^2=2(x+y)$ 变成

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2.$$

即C为以点（1，1）为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆周。

显然，被积函数的奇点中只有 $z=1$ 与 $z=i$ 位于C的内部。由留数基本定理有

$$\int\limits_{C}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i\cdot[\text{Res}(1)+\text{Res}(i)]$$

而

$$\text{Res}(1)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right]'=-\frac{1}{2};$$

$$\text{Res}(i)=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{1}{(z-1)^2\cdot(z+i)(z-i)}\right]=\frac{1}{4};$$

所以

$$\int\limits_{C}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi i}{2}.$$

2. **【证明】**

1）因被积函数的奇点 $z=a$ 与 $z=b$ 均位于$|z|=1$的内部，所以由留数基本定理有

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}=2\pi i[\text{Res}(a)+\text{Res}(b)]$$

而 a 与 b 均为被积函数的 n 阶极点，故

$$\text{Res}(a)=\lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\right]$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(z-b)^{2n-1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(a-b)^{2n-1}}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}},$$

$$\text{Res}(b)=\lim_{z\to b}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-b)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\right]$$

$$=\lim_{z\to b}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(z-a)^{2n-1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(b-a)^{2n-1}}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1}},$$

故

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}=2\pi i[\text{Res}(a)+\text{Res}(b)]=0.$$

2）因被积函数的奇点中只有使 $z^5-1=0$ 的五个根 $z_j(j=1,2,3,4,5)$在 $|z|=\frac{5}{2}$的内部（这是因为 $|z_j|=1<\frac{5}{2}$），由留数基本定理有

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}=2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{5}\text{Res}(z_j)\qquad(1)$$

为了计算右端的结果，按通常做法应先将满足$z^5-1=0$的z_j算出；其次判别诸 z_j 为被积函数的何类奇点；再次需算出诸 $\text{Res}(z_j)$；最后算出$\sum_{j=1}^{5}\text{Res}(z_j)$。依此计算，读者容易想到其工作量是不小的。为了减少工作量，我们可以这样来处理：

由于被积函数在扩充平面 $\hat{S}$ 上总共只有七个奇点：z_1, z_2，z_3，z_4, z_5，$3, \infty$，由定理2（§5·2）有

$$\sum_{j=1}^{5}\operatorname{Res}(z_j) = -[R(3)+R(\infty)].$$

因此使计算（1）式右端的问题转化为计算 Res(3) 与 Res (∞) 的问题了。读者可以想见，如果函数的奇点（有限值）含在积分路内部的愈多，那么这种转化就愈省力。

而

$$R(3) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{242}$$

又因 $\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ 在 $z=\infty$的邻域 $|z|>3$的 Laurent 级数为

$$\frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)\cdot z^5\left(1-\frac{1}{z^5}\right)}$$

$$= \frac{1}{z^6}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z^5)^n}\right)$$

所以 $C_{-1}=0$，于是

$$\operatorname{Res}(\infty) = -C_{-1} = 0$$

代入（1）式得

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = 2\pi i\sum_{j=1}^{5}\operatorname{Res}(z_j)$$

$$= 2\pi i[-R(3)-R(\infty)]$$

$$= -\frac{\pi i}{121}.$$

3）先求出 $\operatorname{tg}\pi z = \frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$的奇点：它们出自使 $\cos\pi z=0$ 的点，即

$$\pi z=(2k\pm1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

于是

$$z=\left(k\pm\frac{1}{2}\right),\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

为 $\mathrm{tg}\pi z$的奇点，它们均为一阶极点。

为了便于识别它们之中有哪些位于 $|z|=n$ 的内部。今将 $k\pm\frac{1}{2}$改写成 $\pm n\pm\frac{1}{2}$，n为正整数。于是 $\mathrm{tg}\pi z$的奇点可分为四组：

(A) 组：$1-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2},\ 3-\frac{1}{2},\ \cdots, n-\frac{1}{2}, (n+1)-\frac{1}{2}, \cdots$;

(B) 组：$-1+\frac{1}{2}, -2+\frac{1}{2}, -3+\frac{1}{2}, \cdots, -n+\frac{1}{2}, -(n+1)+\frac{1}{2},\ \cdots$;

(C) 组：$1+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2},\ 3+\frac{1}{2},\ \cdots, n+\frac{1}{2}, (n+1)+\frac{1}{2}, \cdots$;

(D) 组：$-1-\frac{1}{2}, -2-\frac{1}{2}, -3-\frac{1}{2}, \cdots,\ -n-\frac{1}{2}, -(n+1)-\frac{1}{2},\ \cdots$;

显然，最后两组的点均在 $|z|=n$的外部，前两组中各有 n 个点在 $|z|=n$ 的内部。因此，共有$2n$ 个奇点位于 $|z|=n$ 的内部，设这$2n$ 个奇点为 z_j，$j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n$，则

$$\int_{|z|=n}\mathrm{tg}\pi z dz=2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{2n}\mathrm{Res}(z_j) \qquad (1)$$

由于 z_j 为 $\mathrm{tg}\pi z$ 的一阶极点，而$\mathrm{tg}\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$，所以

$$\mathrm{Res}(z_j)=\left[\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right]_{z=z_j}=\left(\frac{\sin\pi z}{-\pi\cdot\sin\pi z}\right)_{z=z_j}=-\frac{1}{\pi}.$$

即 $\mathrm{tg}\pi z$ 在每个极点 z_j 处的留数均为$-\frac{1}{\pi}$，于是由（1）式得

$$\int_{|z|=n} \operatorname{tg}\pi z dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{2n} \operatorname{Res}(z_j)$$

$$= 2\pi i \cdot 2n \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right)$$

$$= -4ni.$$

4）因为使$\frac{1}{2}-\sin^2 z=0$的点中只有$\pm\frac{\pi}{4}$位于$|z|=2$的内部。由留数定理有

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z} dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{Res}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

而 $z=\pm\frac{\pi}{4}$均是被积函数的一阶极点，且被积函数还是一分式，故

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left[\frac{z}{\left(\frac{1}{2}-\sin^2 z\right)'}\right]_{z=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{Res}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left[\frac{z}{\left(\frac{1}{2}-\sin^2 z\right)'}\right]_{z=-\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4},$$

所以

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z} dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{Res}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= -\pi^2 i.$$

3. 【解】

1）本题属于Ⅰ型(§5·3)积分。

选辅助函数为

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}.$$

它有四个有限奇点 $z=\pm ai$，$z=\pm bi$。它们均为一阶极点。

选辅助积分路为：由实轴上的〔$-R$，R〕与上半圆周 C_R（以

0为圆心，R为半径）组成。为使$f(z)$位于上半平面的奇点ai与bi都在该积分路内部，取$R>\max(a, b)$。

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(ai) + \operatorname{Res}(bi)]$$

令$R\to\infty$，取极限并应用预理1（§5·3）得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = 2\pi i[\operatorname{Res}(ai) + \operatorname{Res}(bi)] \quad (1)$$

而

$$\operatorname{Res}(ai) = \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{1}{(z+ai)(z-ai)(z^2+b^2)}$$

$$= \frac{1}{2ai\cdot(b^2-a^2)};$$

$$\operatorname{Res}(bi) = \lim_{z\to bi}(z-bi)\frac{1}{(z^2+a^2)(z-bi)(z+bi)}$$

$$= \frac{1}{2bi(a^2-b^2)};$$

代入（1）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

2）易知本题属于Ⅰ型。

选取辅助函数

$$f(z) = \frac{1}{z^2-z+2}$$

它有两个有限奇点为$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$与$\beta = \dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$，它们均为一阶极点。

选取辅助积分路线为：由实轴上的$[-R, R]$与上半圆周C_R（以

O 为圆心，R 为半径）组成．为使 $f(z)$ 位于上半平面的奇点 α 在该积分路内部，取 $R>|\alpha|$．

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{C_R} f(z)\,dz=2\pi i\cdot \mathrm{Res}(\alpha).$$

令 $R\to\infty$，取极限并应用预理 1 后得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+2}=2\pi i\,\mathrm{Res}(\alpha) \qquad (1)$$

而

$$\mathrm{Res}(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\left[(z-\alpha)\cdot\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{7}i}$$

代入（1）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+2}=2\pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{7}i}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\pi.$$

3）被积函数属于 I 型，但积分限非 I 型．由于被积函数为偶函数，故可将原积分归为 I 型有

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{2x^4+5x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2x^4+5x^2+2}dx \qquad (1)$$

为计（1）式右端积分，选辅助函数

$$f(z)=\frac{z^2}{2z^4+5z^2+2}$$

它有四个有限奇点 $\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$，$\pm\sqrt{2}i$（解 $2z^4+5z^2+2=0$ 所得），它们为一阶极点．

选辅助积分路为：由实轴上的 $[-R,R]$ 与上半圆周 C_R（以原点为圆心，R 为半径）组成，为使 $f(z)$ 位于上半平面的奇点

$\frac{i}{\sqrt{2}}$与$\sqrt{2}i$ 都在该积分路内部，取 $R>|\sqrt{2}i|$。

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{C_R} f(z)\,dz=2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\operatorname{Res}(\sqrt{2}i)\right]$$

令 $R\to\infty$，取极限并应用预理1后得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2x^4+5x^2+2}dx=2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\operatorname{Res}\sqrt{2}i)\right] \quad (2)$$

而

$$\operatorname{Res}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{2}}}\left[\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\frac{z^2}{2\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)(z^2+2)}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}i;$$

$$\operatorname{Res}(\sqrt{2}i)=\lim_{z\to\sqrt{2}i}\left[(z-\sqrt{2}i)\frac{z^2}{2\left(z^2+\frac{1}{2}\right)(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}i)}\right]$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{12}i;$$

代入（2）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2x^4+5x^2+2}dx=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi.$$

将此结果代入（1）式得

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{2x^4+5x^2+2}dx=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi.$$

4）与3）题类似，可将问题转化为

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx \quad (1)$$

为计（1）式右端的积分（I 型）．选取辅助函数

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$$

它有两个有限奇点 $\pm ai$，它们均为二阶极点。

选取辅助积分路为：由实轴上的〔$-R, R$〕与上半圆周C_R（以原点为圆心，R为半径）组成，为使 $f(z)$ 位于上半平面的奇点 ai 在该积分路内部，取 $R>a$。

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{C_R} f(z)\,dz=2\pi i\cdot \text{Res}(ai)$$

令$R\to\infty$，取极限并应用预理1后得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=2\pi i\text{Res}(ai) \tag{2}$$

而

$$\text{Res}(ai)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to ai}\left[(z-ai)^2\frac{z^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right]'=\frac{1}{4ai}.$$

代入（2）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=2\pi i\ \frac{1}{4ai}=\frac{\pi}{2a}$$

将此结果代入（1）式得

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{\pi}{4a}.$$

5）本题属于 I 型积分

选取辅助函数

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}$$

它有四个有限奇点 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，$\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$，

$\alpha'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$， $\beta'=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，它们均为一阶极点。

选取辅助积分路为：由实轴上的〔$-R$，R〕与上半圆周C_R（以原点为圆心，R为半径）组成，为使$f(z)$位于上半平面的奇点α与β都在该积分路内部，取$R>|\alpha|$。

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{C_R} f(z)\,dz=2\pi i[\mathrm{Res}(\alpha)+\mathrm{Res}(\beta)]$$

令 $R\to\infty$，取极限并应用预理1得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=2\pi i[\mathrm{Res}(\alpha)+\mathrm{Res}(\beta)] \qquad (1)$$

而

$$\mathrm{Res}(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\left[(z-\alpha)\frac{z^2+1}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\alpha')(z-\beta')}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\,i},$$

$$\mathrm{Res}(\beta)=\lim_{z\to\beta}\left[(z-\beta)\frac{z^2+1}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\alpha')(z-\beta')}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\,i},$$

代入（1）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\,i}+\frac{1}{2\sqrt{2}\,i}\right)=\sqrt{2}\pi.$$

4. 【解】

1）本题属于Ⅱ型积分（§5·3），令

$z=e^{ix}$

则

$$\sin x=\frac{z^2-1}{2iz},\quad dx=\frac{dz}{iz}$$

当 x 从0变到 2π 时，z 作成圆周 $|z|=1$，于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\frac{5}{4}+\sin x}=\int_{|z|=1}\frac{4}{2z^2+5iz-2}dz \qquad (1)$$

解 $2z^2+5iz-2=0$得 $\alpha=-\frac{i}{2}$与$\beta=-2i$ 为被积函数的奇点，它们为一阶极点，其中仅有 α 落在 $|z|=1$内部．由留数基本定理得

$$\int_{|z|=1}\frac{4}{2z^2+5iz-2}dz=2\pi i\cdot\text{Res}(\alpha) \qquad (2)$$

而

$$\text{Res}(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{4}{2(z-\alpha)(z-\beta)}=\frac{4}{3i}$$

代入（2）与（1）式得

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\frac{5}{4}+\sin x}=2\pi i\cdot\frac{4}{3i}=\frac{8}{3}\pi.$$

2）本题属于Ⅱ型积分．令

$$z=e^{i\theta}$$

则

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\quad d\theta=\frac{dz}{iz}$$

且当 θ 从0变到2π时，z 作成圆周 $|z|=1$，于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\int_{|z|=1}\frac{-2idz}{z^2+2az+1}$$

解 $z^2+2az+1=0$ 得 $\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}$ 与$\beta=-a-\sqrt{a^2-1}$ 为被积函数的奇点，且知它们为一阶极点，其中仅有 α位于 $|z|=1$ 的内部（因为 $|\beta|>1$，$|\alpha\cdot\beta|=1$，所以$|\alpha|=\frac{1}{|\beta|}<1$）

由留数基本定理得

$$\int_{|z|=1} \frac{-2i\,dz}{z^2+2az+1} = 2\pi i \cdot \text{Res}(\alpha) \qquad (1)$$

而

$$\text{Res}(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha)\frac{-2i}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}.$$

代入（1）式得

$$\int_{|z|=1} \frac{-2i\,dz}{z^2+2az+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

3）本题属于Ⅱ型积分．令

$$z = e^{ix}$$

则

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z}，\ dx = \frac{dz}{iz}$$

且当 x 从 0 变到 2π 时，得圆周 $|z|=1$，于是

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1+a\cos x)^2} = \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{(az^2+2z+a)^2}dz$$

解方程

$$az^2+2z+a=0$$

得

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a} \text{ 与 } \beta = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$$

为被积函数的奇点，且它们均为二阶极点，其中仅有 α 在 $|z|=1$ 的内部（因为 $|\beta|>1$ 及 $|\alpha\cdot\beta|=1$）．于是由留数基本定理有

$$\frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{(az^2+2z+a)^2}dz = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i\cdot\text{Res}(\alpha) \qquad (1)$$

而

$$\text{Res}(\alpha) = \lim_{z\to\alpha}\left[(z-\alpha)^2\frac{z}{a^2(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\right]'$$

$$= \frac{1}{4(1-a^2)^{3/2}}.$$

代入（1）式得

$$\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(az^2+2z+a)^2}dz=\frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}$$

于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1+a\cos x)^2}=\frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}.$$

4）本题属于Ⅱ型积分。令

$z=e^{ix}$

则

$$\cos x=\frac{z^2+1}{2z},\quad dx=\frac{dz}{iz}.$$

且当 x 从0变到 2π 时，z作成圆周 $|z|=1$，于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}=\int_{|z|=1}\frac{4z\,dz}{i(\sqrt{3}z^2+4z+\sqrt{3})^2}\quad(1)$$

解方程

$$\sqrt{3}z^2+4z+\sqrt{3}=0$$

得

$$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{与 }\beta=-\frac{3}{\sqrt{3}}.$$

为被积函数的奇点，且它们均为二阶极点，其中仅 α位于 $|z|=1$的内部。由留数基本定理有

$$\int_{|z|=1}\frac{4z\,dz}{i(\sqrt{3}z^2+4z+\sqrt{3})^2}=\frac{4}{i}\cdot 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(\alpha)\qquad(2)$$

而

$$\mathrm{Res}(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\left[(z-\alpha)^2\frac{z}{(\sqrt{3})^2(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\right]'=\frac{1}{2}$$

代入（2）式后再由（1）式得

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}=4\pi.$$

5）类似于Ⅱ型积分的方法，将问题转化为一复变函数沿闭路的积分。为此令

$$z=e^{2i(\theta+ib)}$$

则

$$dz=e^{2i(\theta+ib)}\cdot 2id\theta$$

于是

$$d\theta=\frac{dz}{2iz} \tag{1}$$

又因

$$\operatorname{tg}x=\frac{\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}=-i\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$$

所以

$$\operatorname{tg}(\theta+ib)=-i\frac{e^{2i(\theta+ib)}-1}{e^{2i(\theta+ib)}+1}=-i\frac{z-1}{z+1} \tag{2}$$

当 θ从0变到π时，z 作成圆周 $|z|=e^{-2b}$，这是因为

$$z=e^{2i(\theta+ib)}=e^{-2b}\cdot e^{2i\theta}$$

的缘故。

将（1）与（2）代入原积分式得到

$$\int_0^\pi \operatorname{tg}(\theta+ib)\,d\theta=\int_{|z|=e^{-2b}}-i\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{dz}{2iz}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{|z|=e^{-2b}}\frac{z-1}{z(z+1)}dz \tag{3}$$

显然，被积函数的有限奇点仅有 $z=0$ 与 $z=-1$。

当 $b>0$时，因 $e^{-2b}<1$，所以只有$z=0$含在$|z|=e^{-2b}$的内部，依留数基本定理有

$$-\frac{1}{2}\int_{|z|=e^{-2b}}\frac{z-1}{z(z+1)}dz=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{Res}(0)$$

$$= -\pi i\left[\lim_{z\to 0} z\frac{z-1}{z(z+1)}\right] = \pi i;$$

当 $b<0$ 时，因 $e^{-2b}>1$，所以 $z=0$ 与 $z=-1$ 均位于 $|z|=e^{-2b}$ 的内部，故依留数基本定理有

$$-\frac{1}{2}\int_{|z|=e^{-2b}}\frac{z-1}{z(z+1)}dz = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\pi i\cdot[\text{Res}(0)+\text{Res}(-1)]$$

$$= -\pi i\left[\lim_{z\to 0} z\frac{z-1}{z(z+1)} + \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z-1}{z(z+1)}\right]$$

$$= -\pi i$$

故

$$\int_0^\pi \text{tg}(\theta+ib)d\theta = \begin{cases}\pi i, & \text{当 } b>0\text{时，}\\ -\pi i, & \text{当} b<0 \text{ 时。}\end{cases}$$

G）类似于Ⅱ型积分的方法，设法将问题转化为一复变函数沿闭路的积分。为此令

$$z = e^{i(\theta+b)}$$

再设 $b = A + Bi$，则

$$dz = e^{i(\theta+b)}\cdot i d\theta$$

于是

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \tag{1}$$

且当 θ 从 0 变到 2π 时，z 作成圆周 $|z| = e^{-B}$，这是因为

$$z = e^{i(\theta+b)} = e^{i(\theta+A)+Bi} = e^{-B}\cdot e^{i(\theta+A)}$$

的缘故。又因

$$\text{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}} = i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$$

所以

$$\text{ctg}(\theta+b) = i\frac{e^{2i(\theta+b)}+1}{e^{2i(\theta+b)}-1} = i\frac{z+1}{z-1} \tag{2}$$

将（1）与（2）代入原积分式得到

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(\theta+b)\,d\theta = \int_{|z|=e^{-B}} \frac{z+1}{z(z-1)}\,dz \qquad (3)$$

显然，右端积分的被积函数共有两个有限奇点 $z=0$与 $z=1$.

当 $B>0$时，因 $e^{-B}<1$，所以只有 $z=0$ 位于 $|z|=e^{-B}$ 的内部，故依留数基本定理有

$$\int_{|z|=e^{-B}} \frac{z+1}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i\cdot \operatorname{Res}(0)$$

$$= 2\pi i\cdot \lim_{z\to 0} z\frac{z+1}{z(z-1)} = -2\pi i.$$

当$B<0$时，因 $e^{-B}>1$，所以 $z=0$与 $z=1$ 均含在$|z|=e^{-B}$ 的内部，故依留数基本定理有

$$\int_{|z|=e^{-B}} \frac{z+1}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}(1)]$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to 0} z\frac{z+1}{z(z-1)} + \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z+1}{z(z-1)}\right] = 2\pi i.$$

故

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(\theta+b)\,d\theta = \begin{cases} -2\pi i, & 当\ B>0\ 时, \\ 2\pi i, & 当\ B<0\ 时. \end{cases}$$

5. 【解】

1）将问题转化为Ⅰ型积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9}\,dx\right) \qquad (1)$$

为计（1）式右端积分，选取辅助函数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$$

它有两个有限奇点 $z=\pm 3i$，均为一阶极点.

选取辅助积分路为：由实轴上的$[-R, R]$与上半圆周C_R（以

原点为圆心，R为半径）组成一闭路，为使 $f(z)$ 位于上半平面的奇点 $3i$ 在该闭路内部，取 $R>3$。

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,\ 3i)$$

令 $R\to\infty$，取极限并应用预理 3（§5·3）后得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9}dx = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,\ 3i)$$

$$= 2\pi i\cdot \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)} = \frac{\pi}{3e^3}.$$

代入（1）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}dx = \mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{3e^3}\right) = \frac{\pi}{3e^3}.$$

2）将问题转化为Ⅱ型积分有

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\cdot\sin ax}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cdot\sin ax}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+1}dx\right) \qquad (1)$$

为计（1）式右端积分，选取辅助函数

$$f(z) = \frac{z\cdot e^{iaz}}{z^2+1}$$

它有两个有限奇点 $z=\pm i$，均为一阶极点。

选取辅助积分路为：由实轴上的 $[-R,\ R]$ 与上半圆周 C_R（以原点为圆心，R为半径）组成一闭路，为使 $f(z)$ 位于上半平面的奇点 i 在该闭路内部，取 $R>1$。

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,\ i)$$

令 $R\to\infty$，取极限并应用预理 3 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{iax}}{x^2+1}dx=2\pi i\cdot\text{Res}(f,\ i)$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\frac{ze^{iaz}}{(z-i)(z+i)}$$

$$=\frac{\pi}{e^a}i.$$

代入（1）式得

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin ax}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\text{Im}\left(\frac{\pi}{e^a}i\right)=\frac{\pi}{2e^a}.$$

3）将问题转化为 Ⅱ 型积分有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\sin x}{x^2+4x+20}dx=\text{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{ix}}{x^2+4x+20}dx\right) \quad (1)$$

为计（1）式右端积分，选取辅助函数

$$f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2+4z+20}$$

它有两个有限奇点 $\alpha=-2+4i$ 与 $\beta=-2-4i$，且均为一阶极点.

选取辅助积分路为：由实轴上的 $[-R,R]$ 与上半圆周 C_R（以原点为圆心，R 为半径）组成一闭路，为使 $f(z)$ 位于上半平面的奇点 α 在该积分路内部，取 $R>|\alpha|$.

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz=2\pi i\cdot\text{Res}(f,\ \alpha).$$

令 $R\to\infty$，取极限并应用预理 3 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+4x+20}dx=2\pi i\cdot\text{Res}(f,\ \alpha)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{ze^{iz}}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$= 2\pi i \frac{(-2+4i)\cdot e^{i(-2+4i)}}{8i}$$

$$= 2\pi i \frac{(-2+4i)(\cos 2 - i\sin 2)}{8e^4 i}$$

$$= \frac{\pi}{4e^4}[(4\sin 2 - 2\cos 2) + i(4\cos 2 + 2\sin 2)]$$

代入（1）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cdot\sin x}{x^2+4x+20}\, dx = \mathrm{Im}\left\{\frac{\pi}{4e^4}\left[(4\sin 2 - 2\cos 2) + i(4\cos 2 + 2\sin 2)\right]\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2 + \sin 2)$$

4）将问题转化为 **I** 型积分有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx\right) \quad (1)$$

为计算（1）式右端积分，选取辅助函数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}$$

它有四个有限奇点 $\pm i$ 与 $\pm 3i$，且均为一阶极点。

选取辅助积分路为：由实轴上的 $[-R, R]$ 与上半圆周 C_R（以原点为圆心，R 为半径）组成一闭路．为使 $f(z)$ 位于上半平面内的奇点 i 与 $3i$ 都在该闭路内部，取 $R>3$。

由留数基本定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, i) + \mathrm{Res}(f, 3i)]$$

令 $R\to\infty$，取极限并应用预理 3 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, i) + \mathrm{Res}(f, 3i)]$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\lim_{z\to i} (z-i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)(z^2+9)}\right.$$

$$\left.+\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-3i)(z+3i)}\right]$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{16ei}-\frac{1}{48e^3 i}\right)=\frac{\pi}{24e^3}(3e^2-1)。$$

代入（1）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx = \mathrm{Re}\left[\frac{\pi}{24e^3}(3e^2-1)\right]$$

$$=\frac{\pi}{24e^3}(3e^2-1)。$$

5）将问题转化为Ⅰ型积分有

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin\lambda x}{x^4+b^4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\sin\lambda x}{x^4+b^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{i\lambda x}}{x^4+b^4}dx\right) \qquad (1)$$

为计（1）式右端积分，选取辅助函数

$$f(z)=\frac{ze^{i\lambda z}}{z^4+b^4}$$

它有四个有限奇点 $\alpha=\frac{b(1+i)}{\sqrt{2}}$，$\beta=\frac{b(-1+i)}{\sqrt{2}}$，$-\alpha$，$-\beta$. 它们均为一阶极点。

选取积分路为：取实轴上的〔$-R,R$〕与上半圆周C_R（以原点为圆心，R为半径）组成一闭路，为使 $f(z)$ 位于上半平面的奇点在该闭路内部，取 $R>|\alpha|$。

由留数基本定理得：

$$\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,\ \alpha)+\mathrm{Res}(f,\ \beta)]$$

令 $R\to\infty$，取极限并应用预理 3 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\lambda x}}{x^4+b^4}dx=2\pi i[\operatorname{Res}(f,\ \alpha)+\operatorname{Res}(f,\ \beta)] \qquad (2)$$

而

$$\operatorname{Res}(f,\alpha)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{ze^{i\lambda z}}{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\alpha)(z+\beta)}$$

$$=\frac{e^{-\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}\cdot e^{i\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}}{4b^2 i};$$

$$\operatorname{Res}(f,\beta)=\lim_{z\to\beta}(z-\beta)\frac{ze^{i\lambda z}}{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\alpha)(z+\beta)}$$

$$=\frac{-e^{-\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}\cdot e^{-i\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}}{4b^2 i};$$

代入（2）得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\lambda x}}{x^4+b^4}dx=2\pi i\cdot\frac{e^{-\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}\left(e^{i\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}-e^{-i\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}\right)}{4b^2 i}$$

$$=\frac{\pi e^{-\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}}{2b^2}\left[\left(\cos\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}+i\sin\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}\right)-\left(\cos\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}-i\sin\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\pi}{b^2}\cdot e^{-\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}\right)i$$

代入（1）式得

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin\lambda x}{x^4+b^4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\left(\frac{\pi}{b^2}\cdot e^{-\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}\right)i\right]$$

$$=\frac{\pi\cdot\sin\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}{2b^2 e^{\frac{\lambda b}{\sqrt{2}}}}.$$

6. 【证明】

令

$$A=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\cos(nx-\sin x)\,dx,$$

$$B=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\sin(nx-\sin x)\,dx,$$

则

$$A+Bi=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot e^{i(nx-\sin x)}dx$$

$$=\int_0^{2\pi} e^{inx}\cdot e^{\cos x-i\sin x}dx$$

$$=\int_0^{2\pi} e^{inx}\cdot e^{e^{-ix}}dx \qquad (1)$$

显然，为了证明本题，只须求出A即可，而这又只要算出（1）式右端的积分后取其实部即得。为此，令

$$z=e^{ix}$$

则

$$dz=ie^{ix}dx=iz\,dx$$

于是

$$dx=\frac{dz}{iz}$$

又 $e^{inx}=(e^{ix})^n=z^n$，$e^{-ix}=z^{-1}$

并且当 x从 0 变到 2π时，z 作成圆周 $|z|=1$。故

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\cdot e^{e^{-ix}}\,dx=\int_{|z|=1} z^n\cdot e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{1}{i}\int_{|z|=1} z^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}\cdot dz=\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left((z^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}),0\right) \quad (2)$$

将 $z^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}$在$z=0$的邻域（去心邻域 $0<|z|<\infty$）表成 Laurent级数有

$$z^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^{n-1}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\,z^n}+\cdots\right)$$

$$=z^{n-1}+z^{n-2}+\frac{1}{2!}z^{n-3}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z}+\cdots$$

所以 $C_{-1}=\frac{1}{n!}$，代入（2）式得

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\cdot e^{e^{-ix}}dx=\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot \text{Res}\left((z^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}),\ 0\right)$$

$$=2\pi C_{-1}=\frac{2\pi}{n!}.$$

即 $A+Bi=\frac{2\pi}{n!}$，所以

$$A=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\cos(nx-\sin x)\,dx=\frac{2\pi}{n!}.$$

7. 【证明】

该证明题实为一计算题．为此需弄清被积函数在$\overline{G}$上的条件．今令

$$F(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

由 $F(\zeta)$的形式及 $f(z)$在$\overline{G}$上的条件，知 $F(\zeta)$当 $\zeta\in\text{int}(C)$ 时只有 $n+1$ 个极点为z，a_1，a_2，$\cdots$，a_n．因此，由留数基本定理，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\text{Res}(F,\ z)+\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(F,a_k)\qquad(1)$$

显然，z 为 $F(\zeta)$ 的一阶极点，于是

$$\text{Res}(F,\ z)=\lim_{\zeta\to z}(\zeta-z)\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=f(z)\qquad(2)$$

设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n分别为 $F(\zeta)$的 m_1，m_2，$\cdots$，m_n阶极点．为

了计算 $\mathrm{Res}(F,\ a_k)$，将 $F(\zeta)$在 a_k展成 Laurent 级数。首先，将 $f(\zeta)$ 在 $0<|\zeta-a_k|<\rho$（使 $|\zeta-a_k|\leqslant\rho$ 位于 G 内部）内展成 Laurent 级数有

$$f(\zeta)=\frac{C_{-m_k}}{(\zeta-a_k)^{m_k}}+\frac{C_{-m_k+1}}{(\zeta-a_k)^{m_k-1}}+\cdots+\frac{C_{-1}}{\zeta-a_k}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta-a_k)^n=G_k(\zeta)+\varphi_k(\zeta).$$

其中 $G_k(\zeta)$ 与 $\varphi_k(\zeta)$分别为 $f(\zeta)$在点 a_k的 Laurent 级数的主要部分与解析部分。

其次，将$\dfrac{1}{\zeta-z}$在点 a_k 展成 Laurent 级数。由于 a_k为$\dfrac{1}{\zeta-z}$的解析点，所以即是将$\dfrac{1}{\zeta-z}$在 a_k 亦即在 $|\zeta-a_k|<|z-a_k|$ 内展成幂级数有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a_k-z+a_k}=\frac{1}{(z-a_k)-(\zeta-a_k)}$$

$$=-\frac{1}{(z-a_k)\left(1-\dfrac{\zeta-a_k}{z-a_k}\right)}$$

$$=-\frac{1}{z-a_k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a_k}{z-a_k}\right)^n$$

$$=-\frac{1}{z-a_k}-\frac{\zeta-a_k}{(z-a_k)^2}-\cdots-\frac{(\zeta-a_k)^{m_k-1}}{(z-a_k)^{m_k}}-\cdots$$

因此在 $0<|\zeta-a_k|<\min(\rho,\ |z-a_k|)$时有

$$F(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\left[G_k(\zeta)+\varphi_k(\zeta)\right]$$

$$\left[-\frac{1}{z-a_k}-\cdots-\frac{(\zeta-a_k)^{m_k-1}}{(z-a_k)^{m_k}}-\cdots\right]$$

整理后，在右端级数的展式中，项$\frac{1}{\zeta-a_k}$的系数为

$$-\frac{C_{-m_k}}{(z-a_k)^{m_k}}-\cdots-\frac{C_{-2}}{(z-a_k)^2}-\frac{C_{-1}}{(z-a_k)}$$

这恰是 $-G_k(\zeta)$在点 z 的值；于是

$$\text{Res}(F, a_k)=-G_k(z), \quad k=1, 2, \cdots, n. \qquad (3)$$

将（2）式与（3）式代入（1）式得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)-\sum_{k=1}^{n}G_k(z).$$

习　题(5·3)

1—7 题由读者自己回答.

8. 【答】

大家知道，留数基本定理在计算复变函数 $f(z)$ 沿闭路C的积分时是很有用的。今若将闭路C分成m条首尾相接的曲线 C_1, C_2, $\cdots$, C_m后，如果函数 $f(z)$ 在C所围成的闭区域$\overline{G}$上，满足留数基本定理的条件，则有

$$\sum_{l=1}^{m}\int_{C_l}f(z)\,dz=2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{n}\text{Res}(f, z_j) \qquad (A)$$

其中z_1, z_2, $\cdots$, z_n为 $f(z)$在G内的全部奇点．显然，在等式(A)中，只要知道积分$\int_{C_1}$，$\int_{C_2}$，$\cdots$，$\int_{C_{m-1}}$ 的结果就可将积分$\int_{C_m}$ 求出（因为(A)式右端是不难得到的）．这表明留数基本定理还可以用来计算某些开路的积分$\int_{C_m}$.

特别地，如果我们要计算实变量函数 $f(x)$沿x轴上某一条（有限的或无限的）线段(a, b)的积分时，如果用留数基本定理时，则可适当选取辅助函数 $f(z)$，并适当补充 (a, b)和某一曲线 C_R，使它连同 (a, b)围成一个区域G，使得 $f(z)$在$\overline{G}$上满足留数基本定

理的条件，于是有

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{C_R} f(z)dz=2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{n}\text{Res}(f,\ z_j) \qquad \text{(B)}$$

其中 z_1，z_2，…，z_n是 $f(z)$ 在G内的全部奇点。由此可见，一旦积分$\int_{C_R}$可以算出或可用所求的积分$\int_a^b$表达出时。那么，计算积分$\int_a^b$的问题就可解决了。

在某些情形下，适当选取辅助函数 $F(z)$，使给定在 (a, b) 上的函数 $f(x)$，是它的实数部分或虚数部分（如 §5·3，Ⅱ型积分中例 4）；则依前面的想法在求得$\int_a^b F(x)dx$ 的结果后，将此结果分出实数部分与虚数部分即可得所求积分$\int_a^b f(x)dx$ 的结果。

以上便是利用留数定理计算Ⅰ与Ⅱ型积分的基本想法。

为实现上述想法，我们采取了四个步骤：

（1）适当选取辅助函数；

（2）适当选取辅助积分路；

（3）应用留数基本定理；

（4）令 $R\to\infty$，取极限。

需要注意的是：

(a) 在步骤（1）中有“适当”二字，这就意味着在选取辅助函数时需要一定的技巧。不过，对于Ⅰ与Ⅱ型积分来说，规律是明显的，只须将被积函数中的 x 换成 z 即可。也就是说，当被积函数是 $g(x)$ 时，辅助函数就取为 $g(z)$。

倘若读者在计算不同于Ⅰ、Ⅱ型的积分时，仍依此种选法就不一定奏效。不过，有个规律我们必须遵循，那就是在选取辅助函数$\varphi(z)$时，一定要顾及到当 $z=x$时，要使 $\varphi(x)$ 与被积函数$g(x)$有一定的联系（如 $\varphi(x)=g(x)$或 $\text{Re}[\varphi(x)]=g(x)$ 等等）。否则，将 $\varphi(x)$ 的积分求出后，尽管方法、技巧均很精彩也无助于我们要

求的关于 $g(x)$ 的积分问题的解决。

（b）在步骤（2）中，应（3）与（4）的需要，R 的选取应当使 C_R 上及由 $[-R, R]$ 与 C_R 组成的积分闭路外部没有 $\varphi(z)$ 的有限值奇点。

另外，在选取辅助积分路时，对于Ⅰ、Ⅱ型的积分无技巧可言，均可选为如图5·3所示的路线。倘若读者去处理不同于Ⅰ、Ⅱ型的积分时，仍用此法就不一定奏效了。不过，有一个规律是必须遵循的，那就是在所选取的辅助积分路上一定要有一段能与所求积分的积分路发生联系。例如，所求积分是从 $0\to\infty$，那么所选的辅助积分路就应包含实轴上的 $(0, R)$（最后令 $R\to\infty$ 即得所求积分的积分限）。否则，尽管算出了沿辅助积分路的积分也无助于所需求的积分问题的解决。

（c）在步骤（4）中，对于非Ⅰ、Ⅱ型的积分，有时可将 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\varphi(z)dz$ 用所求的积分表出后再计算。

另外，在计算 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\varphi(z)dz$ 时，若无预理可用，就只得"硬"算了（算出 $\int_{C_R}$ 后取极限或估计 $\left|\int_{C_R}\right|$）。不过，对于Ⅰ、Ⅱ型的积分而言，预理1、3的条件总是满足的。因此，在Ⅰ、Ⅱ型积分的步骤（4）中，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}$ 总是等于零。

10. 【解】

1）$\mathrm{Res}(0)=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to0}\left[z^3\dfrac{1}{z^3(z+4)}\right]''=\dfrac{1}{64}$，

$\mathrm{Res}(-4)=\lim\limits_{z\to-4}(z+4)\dfrac{1}{z^3(z+4)}=-\dfrac{1}{64}$。

2）$\mathrm{Res}(-1)=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{z\to-1}\left[(z+1)^2\dfrac{1}{z^2+2z+1}\right]'=0$。

3）由 $z^3-3=0$ 得

$$\alpha=\sqrt[3]{3},\beta=\sqrt[3]{3}e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad \gamma=\sqrt[3]{3}e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

它们均为一阶极点，故

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3-3},\ \alpha\right)=\left[\frac{1}{(z^3-3)'}\right]_{z=\alpha}=\frac{1}{3\alpha^2}=3^{-\frac{5}{3}},$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3-3},\ \beta\right)=\left[\frac{1}{(z^3-3)'}\right]_{z=\beta}=\frac{1}{3\beta^2}=3^{-\frac{5}{3}}\cdot e^{-\frac{4\pi i}{3}},$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3-3},\ \gamma\right)=\left[\frac{1}{(z^3-3)'}\right]_{z=\gamma}=\frac{1}{3\gamma^2}=3^{-\frac{5}{3}}\cdot e^{-\frac{8\pi i}{3}}$$

$$=3^{-\frac{5}{3}}\cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

11.【解】

1）$\mathrm{Res}(1)=\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to1}\left[(z-1)^3\frac{e^z}{(1-z)^3}\right]''=-\frac{e}{2}.$

2）$\mathrm{Res}(0)=\lim\limits_{z\to0}z\frac{e^z}{z(1-z)^3}=1,$

$\mathrm{Res}(1)=\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to1}\left[(z-1)^3\frac{e^z}{z(1-z)^3}\right]''=-\frac{e}{2}.$

3）$\mathrm{Res}(2i)=\lim\limits_{z\to2i}\left[(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z^2+1)(z+2i)(z-2i)}\right]$

$$=\frac{-4-4i}{(2i+1)\cdot4i}=\frac{7+i}{25}.$$

$\mathrm{Res}(-2i)=\lim\limits_{z\to-2i}\left[(z+2i)\frac{z^2-2z}{(z^2+1)(z+2i)(z-2i)}\right]$

$$=\frac{-4+4i}{(-2i+1)^2\cdot(-4i)}=\frac{7-i}{25}.$$

$\mathrm{Res}(-1)=\frac{1}{1!}\lim\limits_{z\to-1}\left[(z+1)^2\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right]'=-\frac{14}{25}.$

12.【解】

1）本题属于 Ⅰ 型，经过四个步骤（指§5·3计算 Ⅰ、Ⅱ 型积分的步骤）易得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+4}=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2-2z+4},\ 1+\sqrt{3}i\right]$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to(1+\sqrt{3}i)}\left[z-(1+\sqrt{3}i)\right]\frac{1}{\left[z-(1+\sqrt{3}i)\right]\left[z-(1-\sqrt{3}i)\right]}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2）可化成Ⅱ型积分有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\cos x}{x^2-2x+10}dx=\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{ix}}{x^2-2x+10}dx\right) \qquad (1)$$

经四个步骤可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{ix}}{x^2-2x+10}dx=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left(\frac{z\cdot e^{iz}}{z^2-2z+10},\ 1+3i\right)$$

$$=2\pi i\left[\frac{ze^{iz}}{(z^2-2z+10)'}\right]_{z=1+3i}=2\pi i\cdot\frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}$$

$$=\frac{\pi}{3e^3}\left[(\cos 1-3\sin 1)+i(\sin 1+3\cos 1)\right].$$

代入（1）式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1).$$

3）设法转化为Ⅱ型积分有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d\theta}{2a^2+\cos 2\theta+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d\theta}{2a^2+\cos 2\theta+1}\overset{\text{令}2\theta=x}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2a^2+\cos x+1}.$$

按Ⅱ型积分的做法令 $e^{ix}=z$，经计算得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2+\cos^2\theta} d\theta = \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}.$$

4）按Ⅱ型积分的做法，令 $z=e^{i\theta}$，则

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \cos 3\theta = \frac{z^3+z^{-3}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

于是

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} dz$$

$$= -\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}, \ 0\right) \right.$$

$$\left. + \operatorname{Res}\left(\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}, \ \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= -\pi\left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

5）被积函数共有三个有限奇点 $z_1=0$， $z_2=-1+i$ 及 $z_3=-1-i$，它们均在 $|z|=3$的内部，于是依留数基本定理得

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz = 2\pi i \cdot [\operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(-1+i)$$

$$+ \operatorname{Res}(-1-i)] \qquad (1)$$

而

$$\operatorname{Res}(0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left[z^2 \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right]'$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(z^2+2z+2)(te^{zt}) - e^{zt}(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{t-1}{2},$$

$$\operatorname{Res}(-1+i) = \lim_{z\to(-1+i)}\left\{[z-(-1+i)]\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}$$

$$= \frac{e^{-t+it}}{4},$$

$$\text{Res}(-1-i)=\lim_{z\to(-1-i)}\left\{[z-(-1-i)]\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}$$

$$=\frac{e^{-t-it}}{4},$$

代入（1）式得

$$\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz=2\pi i\left(\frac{t-1}{2}+\frac{e^{-t+it}}{4}+\frac{e^{-t-it}}{4}\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t\right),$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz=\frac{t-1}{2}+\frac{e^{-t}\cos t}{2}.$$

13．【答】

取 $f(z)=z$，$\varphi(z)=-g(z)$，应用 Rouché 定理后得 $g(z)=z$ 在 $|z|<1$内有一个根。

14．【答】

用 Rouché定理，得在 $|z|<1$内没有根；在 $1<|z|<2$ 内有4个根。

15．【答】

用 Rouché定理，得方程在 $|z|<R$内有 n 个根。

16．【证明】

取

$$f(z)=-z,\quad \varphi(z)=e^{z-\beta},$$

则它们在 $|z|\leqslant1$上均为解析，且在 $|z|=1$上有

$$|f(z)|=1,\quad |\varphi(z)|=e^{x-\beta}<e^{1-\beta}<1$$

即

$$|f(z)|>|\varphi(z)|$$

由 Rouché定理得

$$f(z)+\varphi(z)=e^{z-\beta}-z\text{与}f(z)=-z,$$

在 $|z|<1$内的零点个数相同．而 $f(z)=-z$ 在 $|z|<1$ 内只有一个零点($z=0$)．所以

$$e^{z-\lambda}=z$$

在 $|z|<1$内只有一个根。

17．【答】

用 Rouché定理得所给方程在 $|z|<1$内有n个根．

18．【证明】

设 $g(z)-a$ 在C的内部的零点个数为 N，往证 $N=1$．

由于$g(z)$在C的内部只有一个极点，故 $g(z)-a$ 在C内的极点个数为1．

依辐角原理有

$$N-1=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg[g(z)-a] \qquad (1)$$

而

$$\Delta_C\arg[g(z)-a]=\Delta_C\arg\left[a\left(\frac{g(z)}{a}-1\right)\right]$$

$$=\Delta_C\arg a+\Delta_C\arg\left[\frac{g(z)}{a}-1\right] \qquad (2)$$

因为

$$\Delta_C\arg a=0 \qquad (3)$$

再令

$$W=\frac{g(z)}{a}-1,$$

则在C上有

$$|W+1|=\left|\frac{g(z)}{a}\right|<1$$

(因为 $|a|>1$，$|g(z)|=1$)，于是C的像位于 $|W+1|<1$ 内(图5·6)．所以

$$\Delta_C\arg W=\Delta_C\arg\left[\frac{g(z)}{a}-1\right]=0.$$

将此结果与（3）式代入（2）得

$$\Delta_C \arg[g(z)-a]=0$$

再由（1）式得 $N=1$。

19. 【解】

1）取

$$f(z)=-8z,\ \varphi(z)=z^9-2z^6+z^2-2$$

显然，$f(z)$与 $\varphi(z)$均在 $|z|\leqslant 1$上解析．在$|z|=1$上有

$$|f(z)|=8,\quad |\varphi(z)|<|z|^9+2|z|^6+|z|^2+2=6$$

即在 $|z|=1$上

$$|f(z)|>|\varphi(z)|$$

故由 Rouché定理知 $f(z)+\varphi(z)=z^9-2z^6+z^2-8z-2$ 与 $f(z)=-8z$在 $|z|<1$内的零点个数相同．而 $f(z)$ 在$|z|<1$ 内的零点个数为 1，所以方程

$$z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$$

在 $|z|<1$ 内根的个数为 1．

2）取

$$f(z)=8,\ \varphi(z)=2z^5-z^3+3z^2-z$$

显然，$f(z)$与 $\varphi(z)$均在 $|z|\leqslant 1$上解析，且在 $|z|=1$上

$$|f(z)|>|\varphi(z)|$$

（因为 $|f(z)|=8,\quad |\varphi(z)|<|2z^5|+|z^3|+|3z^2|+|z|=7$）

所以方程

$$2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$$

在 $|z|<1$内根的个数与 $f(z)=8$ 在 $|z|<1$ 内的零点个数相同，且都为零．

3）取

$$f(z)=4z^5,\ \varphi(z)=z^6+z^2-1$$

显然，$f(z)$与 $\varphi(z)$均在 $|z|\leqslant 1$上解析，且在 $|z|=1$上有$|f(z)|>|\varphi(z)|$（因为 $|f(z)|=4,\quad |\varphi(z)|<|z^6|+|z^2|+1=3$）．

所以方程

$$z^8 + 4z^5 + z^2 - 1 = 0$$

在 $|z| < 1$内根的个数与 $f(z) = 4z^5$在 $|z| < 1$ 内零点的个数相同且都为 5 .

4）取

$$f(z) = 10, \quad \varphi(z) = z^4 + 6z,$$

显然，$f(z)$与 $\varphi(z)$均在 $|z| \leqslant 1$上解析，且在 $|z| = 1$上有$|f(z)| > |\varphi(z)|$（因为 $|f(z)| = 10$, $|\varphi(z)| < |z^4| + |6z| = 7$）。所以方程

$$z^4 + 6z + 10 = 0$$

在 $|z| < 1$内根的个数与 $f(z) = 10$在 $|z| < 1$ 内零点的个数相同且都为零。

20．【解】

首先确定所给方程在 $|z| < 1$内有几个根？

取 $f(z) = -5z$, $\varphi(z) = z^4 + 1$,

经检验，Rouché 定理的诸条件均满足，所以方程 $z^4 - 5z + 1 = 0$在 $|z| < 1$ 内根的个数与 $f(z) = -5z$在 $|z| < 1$ 内的零点个数相同且都为 1 。

由于在 $|z| = 1$上有 $|f(z)| > |\varphi(z)|$，所以 $f(z) + \varphi(z)$在C上不会为零（否则，$|f(z)| = |\varphi(z)|$）。

其次，为确定所给方程在 $|z| < 2$ 内有几个根，取

$$f(z) = z^4, \quad \varphi(z) = -5z + 1,$$

显然，$f(z)$与 $\varphi(z)$在 $|z| \leqslant 2$上均解析，且在 $|z| = 2$上有$|f(z)| > |\varphi(z)|$（因 $|f(z)| = 16$, $|\varphi(z)| < |-5z| + 1 = 11$）。所以在 $|z| < 2$内方程

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

的根的个数与方程 $z^4 = 0$的根的个数相同且都为 4 .

总之，方程 $z^4 - 5z + 1 = 0$在 $|z| < 1$ 内有一个根．在圆环 $1 < |z| < 2$内有 3 个根。

第六章　共形映射

共形映射亦称共形变换，是复变函数几何理论的组成部分．它是用几何的方法研究解析函数性质的．复变函数的几何理论也是复变函数论的重要分支之一．

共形映射这个概念，是数学里重要的概念之一．它是从物理学的观念中产生的．它对于物理学的某些领域有许多重要应用．如共形映射的方法成功地解决了流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁场与热场理论，以及其它方面许多实际问题．

在这一章里，我们首先从连续函数的导数模及导数辐角的几何意义出发，给出共形映射的概念；并由此得到解析函数在导数不为零处构成共形映射．接着又得出单叶解析函数在其单叶性区域上构成共形映射，并提出了共形映射的两类基本问题；然后进一步地讨论了初等函数（分式线性函数、幂函数及其反函数——根式函数、指数函数及其反函数——对数函数、儒苛夫斯基函数及其反函数）所构成的共形映射；最后给出一些简单区域之间的共形映射的综合例子．

§6·1　共形映射概念

1．导数的模及其辐角的几何意义

设函数$w=f(z)$在区域G内连续．$z_0\in G$．在z_0点$f(z)$的导数存在且$f'(z_0)\neq 0$．设S_z平面上过z_0点的曲线C在函数$w=f(z)$的映射下是S_w平面上过$w_0=f(z_0)$的曲线Γ．

由于

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w-w_0}{z-z_0}$$

所以有

$$|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=r.\ (\neq 0) \qquad (1)$$

这表示模 $|f'(z_0)|$ 等于曲线Γ上过 w_0 无穷小的弦长与曲线 C 上过 z_0 点无穷小弦长之比的极限.

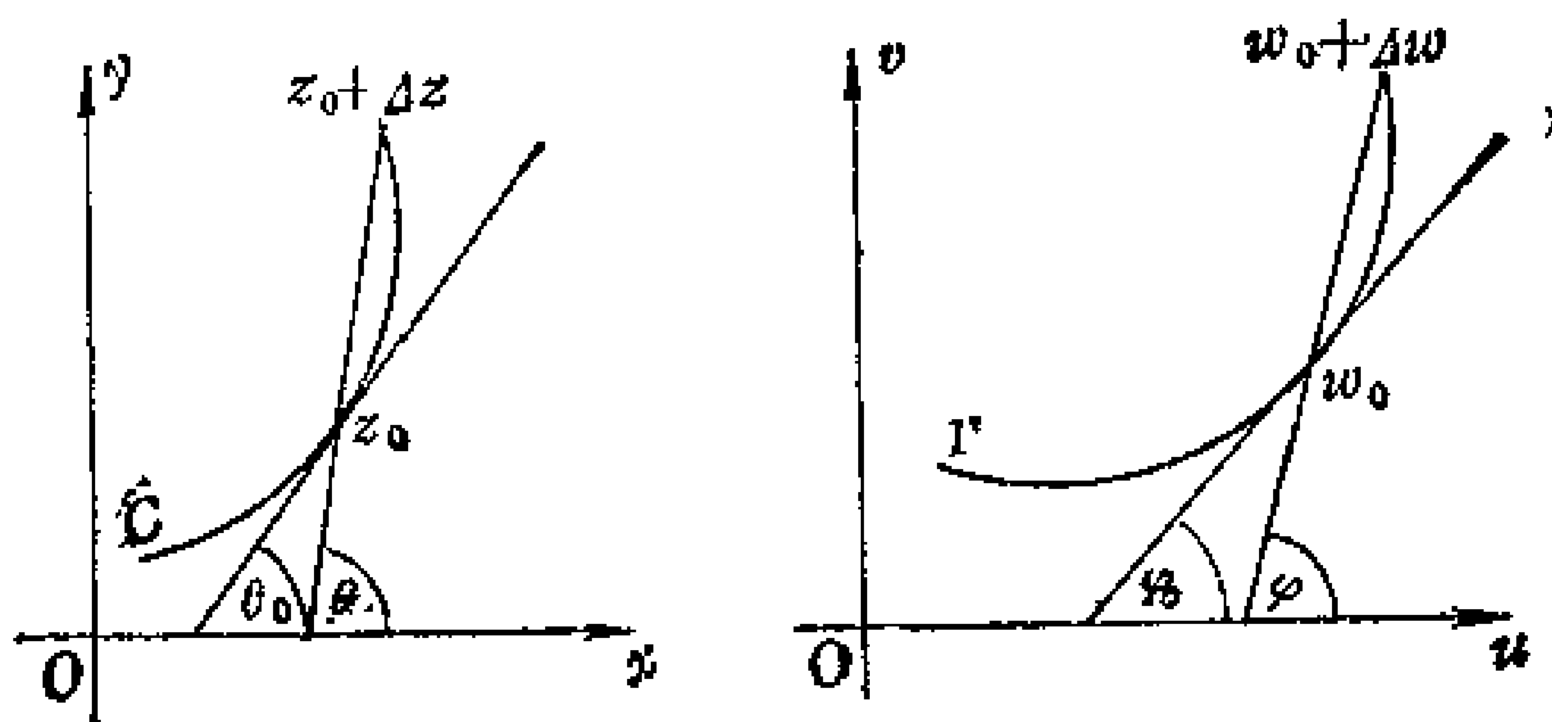


图 6·1

我们称$|f'(z_0)|=r$为函数 $w=f(z)$在 z_0 点的伸缩率.

值得注意的是：伸缩率$|f'(z_0)|=r$只与函数 $f(z)$ 及点 z_0 有关，而与曲线C的形状及方向的选择无关．我们把伸缩率的这个性质称为伸缩率的不变性.

另一方面，从导数的辐角可得

$$\lim_{z\to z_0}\arg\frac{w-w_0}{z-z_0}=\arg f'(z_0)$$

由于

$$\arg\frac{w-w_0}{z-z_0}=\arg(w-w_0)-\arg(z-z_0),\quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\arg(w-w_0)-\lim_{z\to z_0}\arg(z-z_0)=\arg f'(z_0).$$

设以 θ_0 表示曲线C在 z_0 的切线与 x 轴正向的夹角，φ_0 表示曲线 Γ在 w_0 处的切线与 u 轴正向的夹角（如图6·1）。则

$$\lim_{z\to z_0}\arg(z-z_0)=\theta_0,\quad \lim_{w\to w_0}\arg(w-w_0)=\varphi_0$$

于是

$$\arg f'(z_0)=\varphi_0-\theta_0,\text{或 }\varphi_0=\theta_0+\arg f'(z_0)\tag{2}$$

设 S_z 平面与 S_w 平面重合，坐标方向一致。如果我们把C在 z_0 处的切线与Γ 在 w_0 处的切线方向间的夹角看成是旋转角，则（2）表明函数$w=f(z)$在 z_0 点处导数的辐角等于曲线C 在 z_0 点的切线变成曲线 Γ在对应点 w_0 的切线所应旋转的角度。

因此，我们称 $\arg f'(z_0)$为函数 $w=f(z)$在 z_0 点的**旋转角**。旋转角的大小与曲线C的形状、方向选择无关，我们把这个性质称为**旋转角的不变性**。

显然，对于区域G内的解析函数 $f(z)$，如果 $z_0\in G$，且 $f'(z_0)\neq 0$，则 $f(z)$在点 z_0 附近所作的映射具有伸缩率的不变性与旋转角的不变性。

设过 z_0 有两条曲线 C_1 与 C_2，它们在函数 $w=f(z)$ 的映射下，曲线 C_1 与 C_2 分别被映射线 S_w 平面过点 $w_0=f(z_0)$ 的两条曲线 Γ_1 与 Γ_2。设 θ_1 与 θ_2 是曲线 C_1 与曲线 C_2 在点 z_0 处的切线与 x 轴正向的夹角；φ_1 与 φ_2 是曲线 Γ_1 与 Γ_2 在点w_0处的切线与 u轴正向的夹角。依旋转角 $\alpha=\arg f'(z_0)$ 的不变性，我们有

$$\varphi_1-\theta_1=\alpha,\quad \varphi_2-\theta_2=\alpha$$

即

$$\varphi_2-\varphi_1=\theta_2-\theta_1.\tag{3}$$

而 $\theta_2-\theta_1$ 是曲线 C_1 与 C_2 的夹角（逆时针方向为正），$\varphi_2-\varphi_1$ 是曲线 Γ_1 与 Γ_2 的夹角（逆时针方向为正）（如图6·2）。这就证明了：

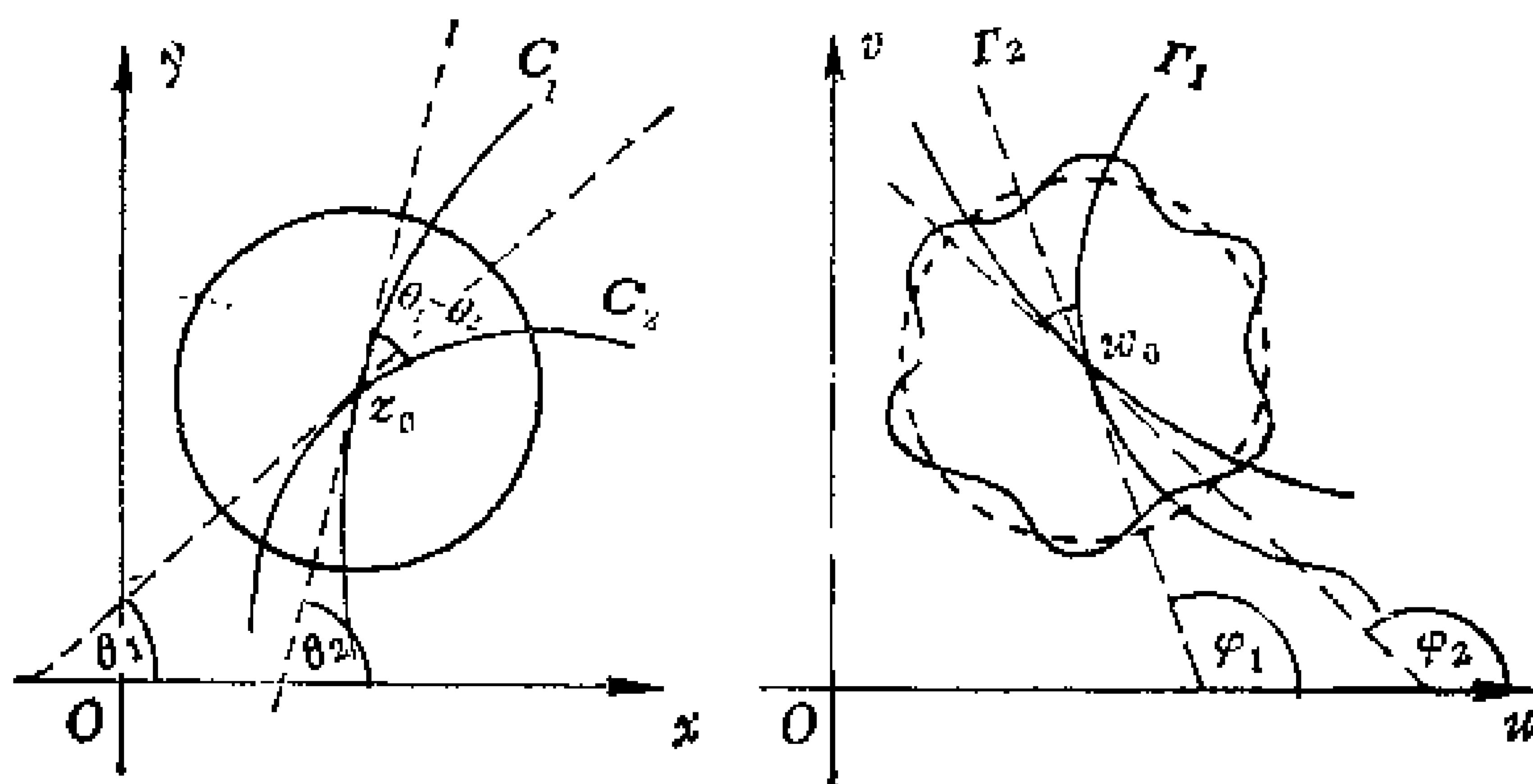


图 6·2

定理1 在连续函数 $w=f(z)$ 的映射下，如果 $f'(z_0)\neq 0$，则过 z_0 点的任意两条有向连续曲线间的夹角（如果存在切线时），与其像曲线在 $w_0=f(z_0)$ 点的夹角大小相等且方向相同.

2. 共形映射的概念

设给定区域 G 内任意连续函数 $f(z)$，$z\in G\subset S_z$ 如果在 z 点具有伸缩率的不变性且保持夹角的不变性（大小及方向）时，则称该映射 $f(z)$ 在 z_0 点构成**共形映射**（或称**第一类共形映射**）.

如果函数 $f(z)$ 在 z 点具有伸缩率的不变性且保持夹角大小不变但方向相反（如图 6·3，$f(z)=\bar{z}$），称 $f(z)$ 在 z 点构成第二类共形映射. 图6·4是 S_z 与 S_w 重合的情形.

如果函数 $w=f(z)$ 在区域 G 内的每一点都构成共形映射，则称 $w=f(z)$ 在区域 **G 内构成共形映射**.

定理2 设解析函数 $w=f(z)$ 在其定义域 G 内 $f'(z)\neq 0$，则它构成共形映射.

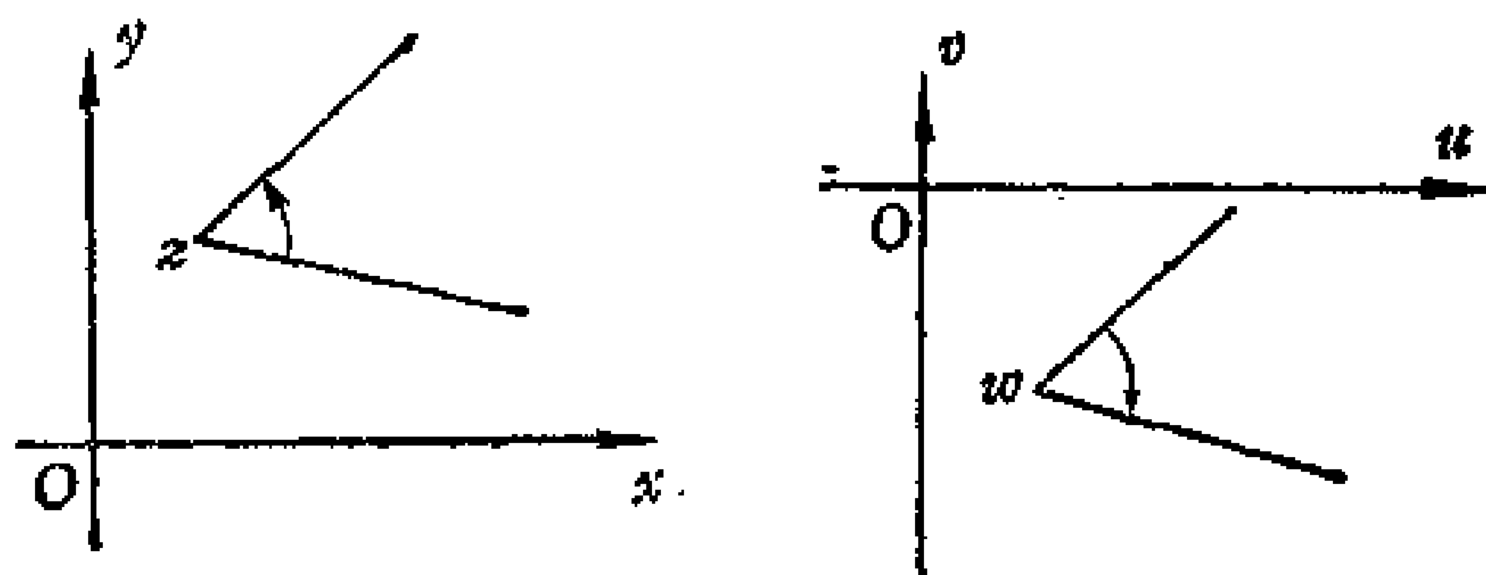


图 6·3

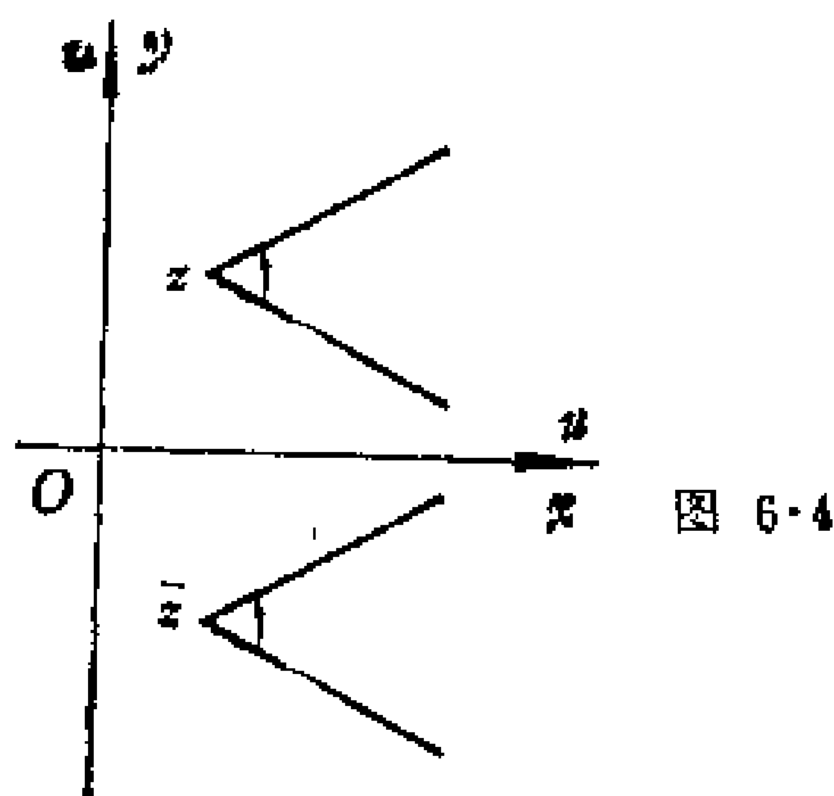


图 6·4

§6·2　解析函数的映射性质

1. 解析函数的保域性

由前节的叙述，可知解析函数在导数不为零的区域内构成共形映射。除此之外，解析函数的映射还具有保域性，即有如下的定理成立。

定理 1　设在区域 G 内的函数 $w=f(z)$ 为解析且不为常数，则它把区域 G 映射成区域 D。

【证明】 要证明 D 是区域必须证明 D 是连通的开集合。为此，首先证明 D 的每一点都是内点。任取一点 $w_0\in D$，它是 G 内一点 z_0 的像，即 $w_0=f(z_0)$。因为函数 $w=f(z)$ 在 G 内不为常数且解析，故函数 $f(z)-w_0$ 的零点必是孤立的。不然的话，依§4·5的唯一性

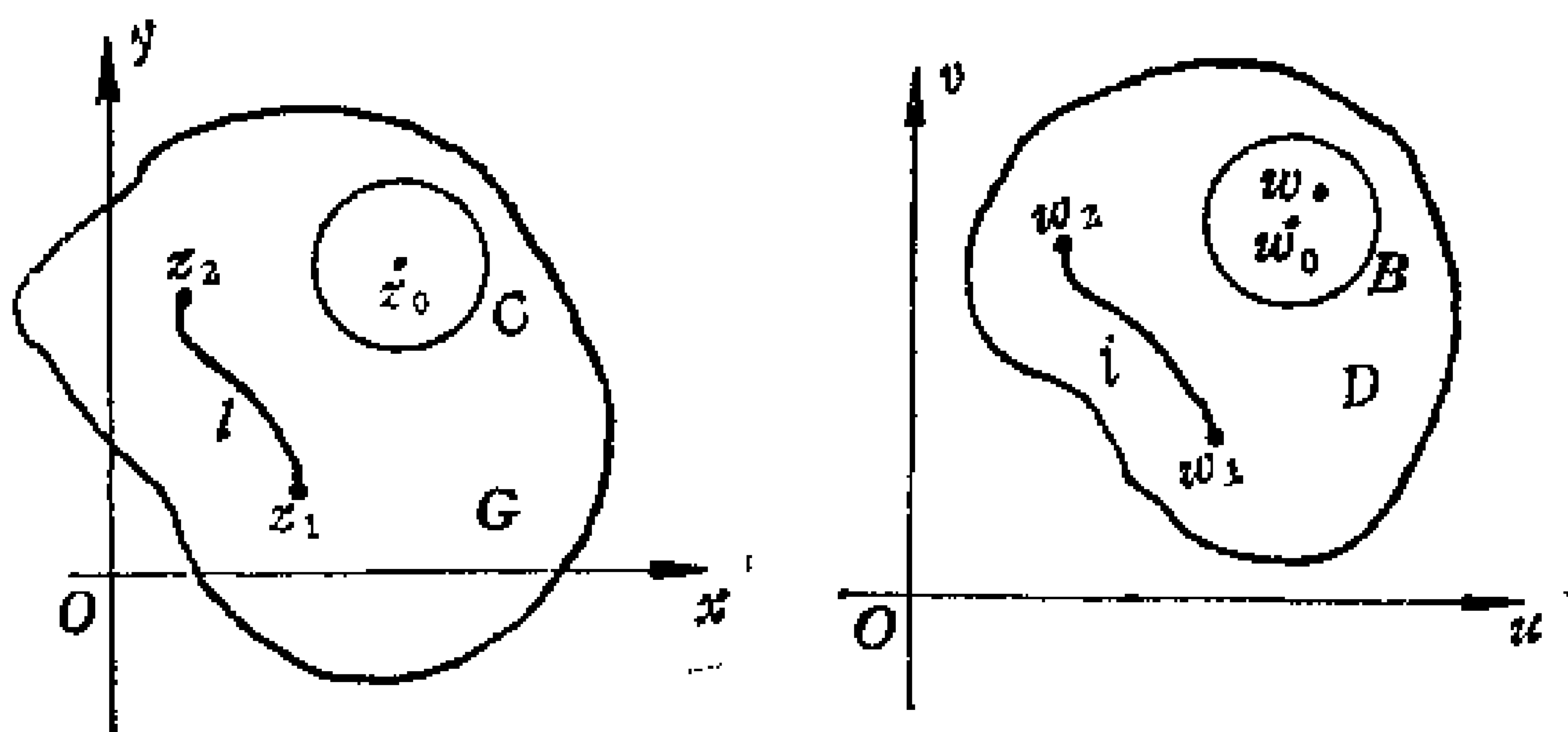


图 6·5

定理，$f(z)$ 在G内恒为常数．依零点孤立性，必有以z_0为心的圆周C: $|z-z_0|=\rho$ 存在，使C上及C内除z_0外函数$f(z)-f(z_0)$无其它零点．即当 $z\in$环域 $K=\{z: 0<|z-z_0|\leqslant\rho\}$ 时，

$$f(z)-f(z_0)\neq 0$$

设圆周C通过 $w=f(z)$，被映射成 $\Gamma(=f(C))$．Γ 与 w_0 的距离设为 $d(\Gamma,w_0)$ (>0)，即 $d=\min\limits_{z\in C}|f(z)-f(z_0)|=\min\limits_{w\in\Gamma}|w-w_0|$，或

$$|f(z)-f(z_0)|\geqslant d,\quad z\in C.$$

为证 w_0 是D的内点，有必要做 w_0 的某一邻域 $B(w_0,d)=\{w: |w-w_0|<d\}$．任取一点 $w_*\in B(w_0,d)$，则当 $z\in C$时，有

$$|w_0-w_*|<d\leqslant|f(z)-f(z_0)|$$

依 Rouché 定理，函数

$$f(z)-w_0 \text{ 与 } (f(z)-w_0)+(w_0-w_*)=f(z)-w_*$$

在 int(C) 的零点个数相同．而$f(z)-w_0$在 int(C) 至少有一个零点，故$f(z)-w_*$在 int(C) 也至少有一个零点设为z_*，即 $f(z_*)=w_*\in B$．

因为 w_0 是D内的任意点，故D的任意点 $w_0=f(z_0)$ 必是内点，所以D是开集合．

其次，证D是连通的开集合．即证属于D的任意两点 $w_1=f(z_1)$

与 $w_2=f(z_2)$ 可以用一条完全属于D的连续折线 l' 连接起来。

事实上，对应于D内两点 $w_1=f(z_1)$，$w_2=f(z_2)$ 对应地在G内有两点 z_1 与 z_2。而G为区域，所以可用一条完全属于G的连续折线 l 把z_1 与 z_2连结起来。对应地就在D内有一条连结 $f(z_1)=w_1$ 与$f(z_2)=w_2$ 的连续曲线 l' 存在，并且 $l'=f(l)$。因 l 是内点组成，所以 l' 上的点必$\in D$，即D是连通的（如图6·5）。

因此 $D=f(G)$ 是连通的开集合，即D是区域。

（证毕）

2. 单叶解析函数的共形性

上述定理1，证明了解析函数所作出的映射具有保域性。现在来讨论单叶解析函数的性质。

定理2 函数 $w=f(z)$ 在区域G内为单叶解析时，则 $f'(z)\neq 0$，$z\in G$。

【证明】 应用反证法来证明本定理。

设区域G内有一点 z_0，使 $f'(z_0)=0$。

首先，由§4·4，因 $f(z)$ 在G内解析，所以在 z_0 点可以展开成幂级数.

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots$$

或

$$f(z)-f(z_0)=\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots$$

显然，函数 $f(z)-f(z_0)$ 在 z_0 的邻域内至少以 z_0 为二阶零点。

其次，设 $f'(z_0)=0$，即 $f'(z)$ 以 z_0 为零点。依解析函数零点孤立性，必有 z_0 的一闭邻域：$\bar{B}(z_0,\rho)=\{z:\ |z-z_0|\leqslant\rho\}\subset G$ 存在，使 $f'(z)$ 于其内及其边界C上，除 z_0 外再无其他零点。但依函数 $f(z)$ 的单叶性，在 $z\in C$ 时，有 $f(z)\neq f(z_0)$，即必存在一正数 δ，使C上的一切点 z 有

$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta$.

现以 $w_0=f(z_0)$为心，δ 为半径作圆周 K：$|w-w_0|=\delta$，在 K 内任取一点 $w^*\neq w_0$，则在 $z\in C$ 时有

$$|f(z)-f(z_0)|>|w_0-w^*|.$$

依 Rouché 定理，$f(z)-f(z_0)$ 与 $(f(z)-f(z_0))+(w_0-w^*)=f(z)-w^*$在 B 内有相同的零点个数．但函数 $f(z)-f(z_0)$ 在 B 内至少有两个零点（z_0是二阶零点算作两个）．所以，$f(z)-w^*$也至少有两个零点．这两个零点不是重点（因由邻域的性质，$f'(z)$ 于其内除 z_0 外再无其他零点，即 $f'(z)\neq 0$）．即有$z_1, z_2\in \text{int}(C)$，$z_1\neq z_2$，使 $f(z_1)=f(z_2)=w^*$．这与函数 $f(z)$ 的单叶性相矛盾．于是便证明了 $f'(z)\neq 0$，$z\in G$.

（证毕）

推论 由定理 2 及§6·1的定理 2 可知单叶解析函数所作的映射必是共形的。

3．单叶解析函数的反函数及其解析性

定理 3 设函数 $w=f(z)$ 在区域G内为单叶解析，则其反函数 $F(w)=f^{-1}(w)$ 在区域 $D=f(G)$ 内存在且解析，并且

$$F'(w)=\frac{1}{f'(z)}\text{或}F'(w)\cdot f'(z)=1$$

【证明】 我们取任一点 $z_0\in G$ 及 z_0 的邻域 $B(z_0, \rho)=\{z: |z-z_0|<\rho\}\subset G$（图6·6）．显然，$f(z)$ 在 B 内解析，故在 B 内可以展开成 Taylor 级数

$$w=f(z)=f(z_0)+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \qquad (1)$$

其中 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$．由定理 2，$a_1=f'(z_0)\neq 0$.

作圆周 $\gamma=\{z: |z-z_0|=\rho_0\}\subset B$，由于函数 $w=f(z)$为单叶，当 $z\neq z_0$，$z\in\text{int}(\gamma)$时，$w=f(z)\neq w_0=f(z_0)$

设 $\Gamma=f(\gamma)$，并令 $\delta=d(w_0,\Gamma)$——w_0到 Γ 的距离．于是以

w_0 为中心的圆域 $N=\{w: |w-w_0|<\delta\}$ 内的每一点 w_1 都有

$$|f(z)-w_0|>|w_1-w_0|,\quad z\in\gamma.$$

于是，由 Rouché 定理得方程

$$f(z)-w_0=0 \text{ 与 } f(z)-w_1=f(z)-w_0+(w_0-w_1)=0$$

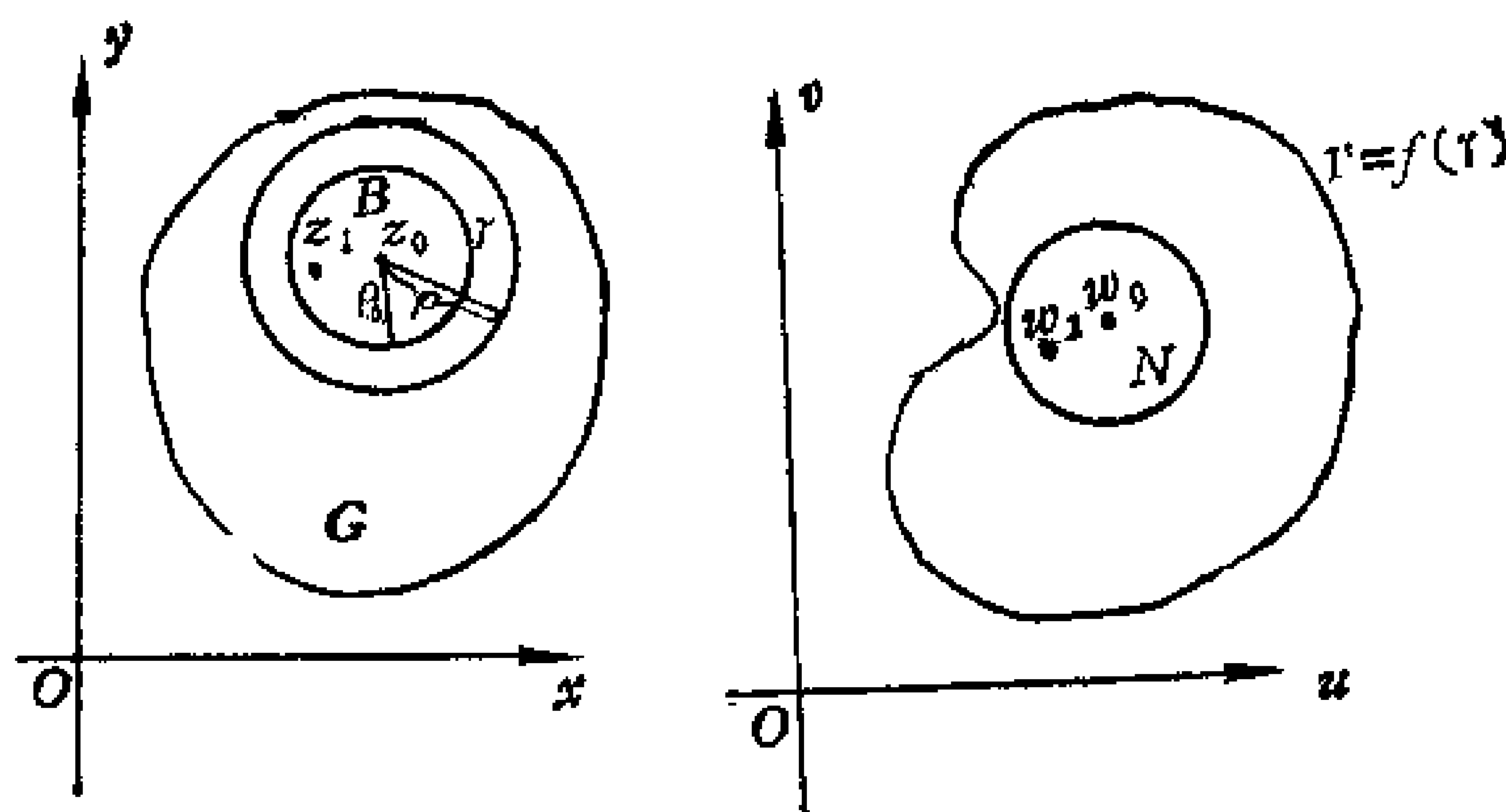


图 6·6

在 γ 内部有同样个数的根．但其中第一个方程只有一个根 z_0；因此，第二个方程也只有一个根设为 z_1，即

$$f(z_1)=w_1.$$

所以在邻域 $|w-w_0|<\delta$ 内确定了一个单值函数 $z=F(w)$，函数值属于圆域 $|z-z_0|<\rho$．这个函数就是函数 $w=f(z)$ 的反函数，即 $z=F(w)=f^{-1}(w)$ 存在．

由上述关于函数 $F(w)$ 存在性的证明可以看出函数 $z=F(w)$ 在 w_0 点是连续的．

关于反函数的解析性，我们证明如下：

因

$$\lim_{w\to w_0}\frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)}{w-w_0}=\frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{w-w_0}{z-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}$$

即

$$[f^{-1}(w_0)]'=\frac{1}{f'(z_0)}(z_0\in G,\ \ w_0=f(z_0)\in D).$$

由于 w_0 或 z_0 的任意性，即知$z=f^{-1}(w)=F(w)$在区域 D 内解析。

（证毕）

§6·3 Riemann 存在定理及边界对应定理

1．共形映射的基本问题

共形映射所讨论的问题主要是：

第一，已知区域G及映射 $w=f(z)$，求区域G在函数 $w=f(z)$ 的映射下的像域 $f(G)=D$.

第二，已知区域G及区域D，求将区域G共形地映射成区域D的解析函数.

第一类问题是基础，第二类问题是在第一类问题的基础之上更进一步地应用．讨论这两类问题的理论根据就是下面要介绍的两个定理：存在性定理与边界对应定理.

2．Riemann 存在定理

定理 1 （Riemann 定理）设 S_z 平面的单连通区域G的边界至少有两个点，则在G内必存在一个单叶解析函数 $w=f(z)$将G共形地映射成 S_w 平面上的单位圆域 $|w|<1$.如果函数$w=f(z)$满足条件：

$$f(z_0)=0,\ \ z_0\in G;\ \ \arg f'(z_0)=\varphi_0,\ 0\leqslant\varphi_0<2\pi.$$

则是唯一的。其中 φ_0 为一常数。

这个定理的证明比较复杂，这里略去证明。现对定理的唯一性条件作以下简单地说明。

$f(z_0)=0$ 的几何意义是：区域G的指定点 z_0 变成 S_w 平面单位圆域 $|w|<1$ 的圆心；$\arg f'(z_0)=\varphi_0$ 的几何意义是：在 z_0与实轴的平行线交角为 $-\varphi_0$ 的方向映射为 S_w 平面的实轴的正向。

另外由于 $f'(z_0)>0$，表示着区域G过 z_0 且平行实轴的正向，映射成 S_w 平面过原点的实轴的正向。

因此，定理 1 的上述条件亦可表示成：

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)>0$$

黎曼定理给出了区域G到区域D共形映射的存在性与唯一性。有了 Riemann 定理，就可以去寻求满足条件的映射了。

*3 边界对应定理

定理 2 （边界对应定理）

设两条简单闭曲线C及Γ的内部分别是单连通区域G及D，即$G=\text{int}(C)$，$D=\text{int}(\Gamma)$。如果函数$w=f(z)$ 在一个 $G\cup C$的区域上解析；并且将C双方单值地映射成Γ，则 $w=f(z)$ 在G内为单叶解析并将G共形地映射成D。

这个定理给出了解析函数为单叶的充分条件。称为**边界对应定理**。

【证明】 证明的关键是证明等式

$$D=f(G)$$

首先，设 w_0 为D内任意一点。我们要证明 $w_0\in f(G)$，且方程$f(z)-w_0=0$ 在C的内部只有一个根。依辐角原理

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta\Gamma\arg(w-w_0)$$

当z沿C的正向绕行一周时，而 $w=f(z)$ 为双方单值，故 w 只能沿Γ的正向或负向绕行一周。因此，起点为 w_0，终点为 Γ 上的 w

的向量 $w-w_0$ 应该旋转角度 $\pm 2\pi$。于是

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta\Gamma\arg(w-w_0)=\pm 1,$$

因为左端是零点个数 $N\geqslant 0$，所以，右端应取1．即 $w=f(z)$必须沿 Γ的正向绕行，并且方程 $f(z)-w_0=0$在区域G内只有一个根．

其次，设 w_0 位于 Γ的外部，（即 $w_0\in\text{ext}(\Gamma)$）．现证 $w_0\overline{\in}f(G)$．因为由

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta\Gamma\arg(w-w_0)=0$$

即方程 $f(z)-w_0=0$ 在G内无根．

最后，设 w_1 为 Γ 上任意点，我们来证明方程 $f(z)=w_1$ 在D内无根．现假定D内有一点z_1使 $f(z_1)=w_1$．则可得一个以 w_1 为中心的圆周 r，使对 r内部任意一点w'，方程 $f(z)=w'$在D内有根（因 $f(D)$ 为区域，w_1 为其内点）．尤其在 γ 内部取一点 w' 位于Γ 的外部，由第二种情况的证明方程 $f(z)=w'$ 在D内无根，这就产生了矛盾．

综上所述，可见函数 $w=f(z)$ 在G内单叶解析，并将G共形地映射成Γ 的内部D．

（证毕）

边界对应定理除给出函数的单叶性充分条件之外，还给出了如何寻求区域G的像域 $D=f(G)$ 的具体方法．即只须将区域G的边界曲线的像找出即可．

【例1】 试证函数 $w=z^2$ 把圆周的内部映射成心脏线的内部（如图6·7）

事实上，如果将函数 $w=z^2$ 表示成极坐标的形式，即令

$$w=\rho e^{i\varphi},\quad z=\gamma e^{i\theta},$$

则 $$w=\rho^{i\varphi}=\gamma^2 e^{i2\theta}$$

所以 $$r=\sqrt{\rho},\qquad \theta=\frac{\varphi}{2}$$

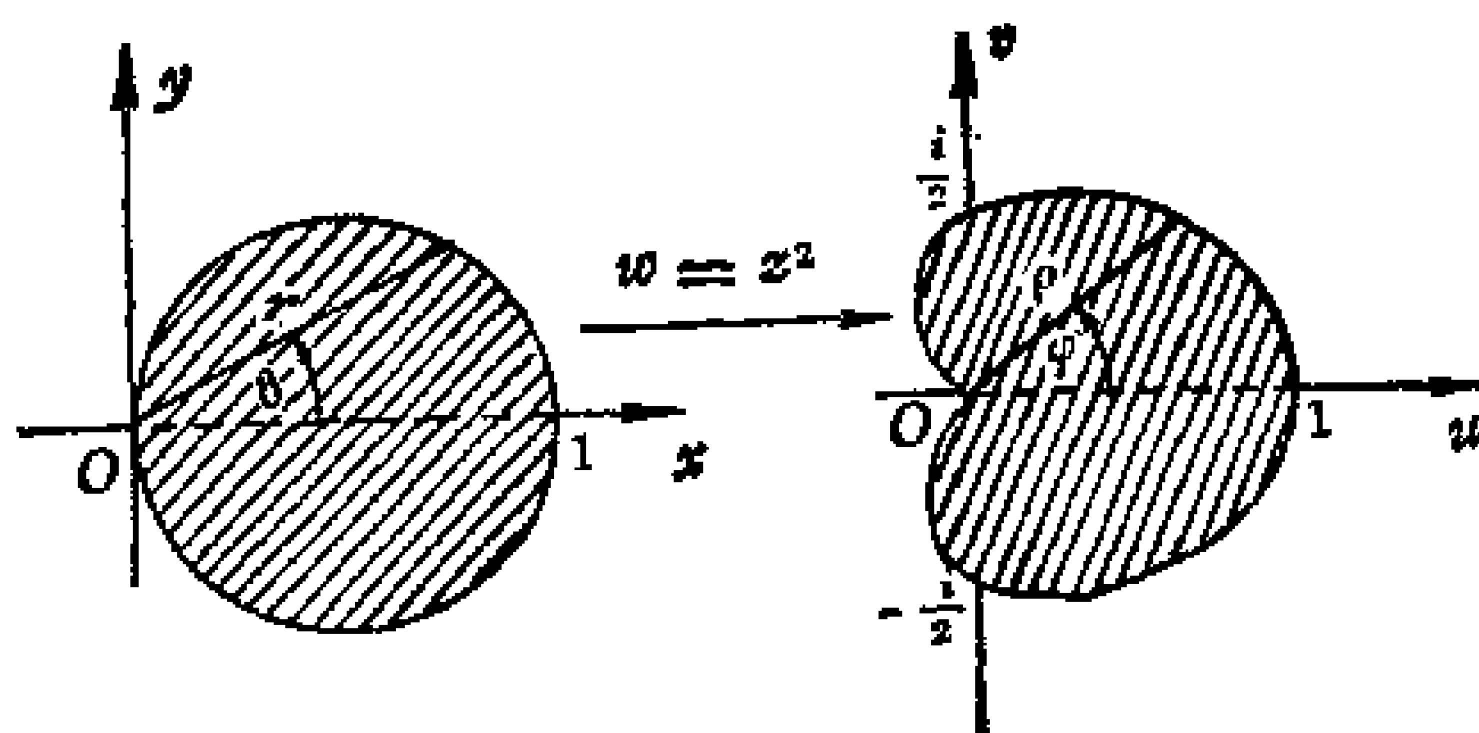


图 6·7

而 S_z 上的圆周的极坐标形式为

$$r = \cos\theta$$

于是其对应的像为

$$\sqrt{\rho} = \cos\frac{\varphi}{2}$$

即 $$\rho = \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$$

这是心脏线。

由定理2，可知 $w = z^2$ 将圆周内部共形地映射成心脏线的内部。

§6·4 分式线性映射

在运用共形映射的方法解决实际问题或研究解析函数的几何性质时，有一类函数起着非常重要的作用，这就是分式线性函数所构成的映射。

1. 分式线性映射

我们称型如

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0 \tag{1}$$

的函数所构成的映射为**分式线性映射**。其中 a, b, c, d 皆为任意复常数。

为了更好地研究分式线性映射的性质，我们先讨论如下四种最简单的映射。

① 线性映射 $w=z+b$ （2）

令 $w=u+iv$, $z=x+iy$, $b=b_1+ib_2$,

则有

$$u=x+b_1,\quad v=y+b_2$$

这刚好是解析几何里的平移.

② 相似映射 $w=rz$ $(r>0)$ （3）

令 $w=u+iv$, $z=x+iy$, 则有

$$u=x\cdot r,\quad v=y\cdot r$$

显然，（3）式所作出的映射是将w 的实数部分及虚数部分同时伸缩 r倍。因此，它是相似映射。

③ 旋转映射 $w=e^{i\theta}z$ （4）

令 $w=u+iv$, $z=x+iy$, 则有

$$u=x\cos\theta-y\sin\theta,\quad v=x\sin\theta+y\cos\theta$$

它是解析几何中的旋转变换。

④ 反演映射 $w=\frac{1}{z}$ （5）

在 §2·3—2 中曾称由函数 $w=\frac{1}{z}$所作的映射为反演映射，并论述了它的一些性质。

为研究分式线性映射在无穷远点所构成的映射，有必要引进关于**无穷远点处交角**的概念. 所谓二曲线在无穷远点的交角α,就是指这两条曲线在 $w=\frac{1}{z}$映射下的像曲线在原点的交角为 α。

因此，反演映射 $w=\frac{1}{z}$ 在 $z=0$ 及 $z=\infty$ 处是共形的，从而它在扩充平面 $\widehat{S}_z$ 是共形的。

⑤ 由上述论证可证映射

$$w=az+b,\ (a\neq0) \tag{6}$$

在扩充平面 $\widehat{S}_z$ 上是共形的。这是因为

$$\frac{dw}{dz}=a\neq0.$$

依§6·1定理2，故知映射在 $z\neq\infty$ 的各点都是共形的。

欲证 $w=az+b$ 在 $z=\infty$（其像点 $w=\infty$）共形，我们令

$$\zeta=\frac{1}{z},\ \xi=\frac{1}{w}$$

并代入 $w=az+b$ 中得

$$\frac{1}{\xi}=a\cdot\frac{1}{\zeta}+b$$

即

$$\xi=\frac{\zeta}{b\zeta+a} \tag{7}$$

而当 $z=\infty$ 时，$\zeta=0$；$w=\infty$ 时，$\xi=0$，且

$$\left.\frac{d\xi}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}=\left.\frac{b\zeta+a-b\zeta}{(b\zeta+a)^2}\right|_{\zeta=0}=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}\neq0$$

故映射（7）在 $\zeta=0$ 处是共形的。即 $z=\infty$ 处是共形的。

由 $w=\frac{1}{z}$ 在0及∞处的共形性，可知 $w=az+b$ 在 $z=\infty$ 处是共形的。因而函数 $w=az+b$ 在扩充平面 $\widehat{S}_z$ 上是共形的。

2. 分式线性映射的共形性

现在我们来讨论分式线性映射（1）的共形性。

首先证明分式线性映射（1）是在扩充平面 $\widehat{S}$ 上的单叶函数。

事实上，当

$$z \neq -\frac{d}{c}，且 z \neq \infty 时，$$

分式线性映射（1）是解析的。

当 $z = -\frac{d}{c}$时，规定 $w = \infty$；$z = \infty$时，规定：$w = \frac{a}{c}$. 因之分式线性函数（1）将扩充平面$\hat{S}_z$映射成扩充平面$\hat{S}_w$.依单叶性函数的定义，（1）还是一个单叶映射。由（1）依 z 解出，得（1）的反函数仍是分式线性函数

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a} \tag{8}$$

因此，分式线性映射（1）式在扩充平面$\hat{S}_z$上是单叶的。

其次，讨论（1）式的共形性。由于（1）式的导数

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

在扩充平面$\hat{S}_z$上除 $z=\infty$、$z = -\frac{d}{c}$外，处处存在且为异于零的有限数。所以分式线性映射（1）在扩充平面$\hat{S}_z$上，除点 $z=\infty$及 $z = -\frac{d}{c}$外是共形的。

为了说明（1）在扩充平面$\hat{S}_z$上是共形的，我们将分式线性映射分解成线性映射

$$w = az+b$$

与反演映射

$$w = \frac{1}{z}$$

之积（顺次映射之组合）. 事实上，当$c=0$时，变成型如（6）式

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

的映射．当 $c\neq0$时，（1）可以写成

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{c(az+b)}{c(cz+d)}=\frac{acz+bc+ad-ad}{c(cz+d)}$$

$$=\frac{a(cz+d)+bc-ad}{c(cz+d)}$$

$$=\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}+\frac{a}{c}$$

它就是下面三种映射

$$\xi=cz+d,$$

$$\eta=\frac{1}{\xi},$$

$$w=\frac{bc-ad}{c}\eta+\frac{a}{c}.$$

的组合．

在上一段中，我们已经说明了型如（5）与（6）在扩充平面 $\widehat{S}_z$ 上构成共形映射．因而分式线性映射（1）在扩充平面 $\widehat{S}_z$ 上也构成共形映射．

3．分式线性映射的保圆性

定理1 分式线性映射（1）将 S_z 平面上的圆周（或直线），映射成 S_w 平面上的圆周或直线．

【证明】 因实数域上任意圆周为

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad (9)$$

其中A，B，C，D皆为实常数，$B^2+C^2>AD$．当$A=0$ 时，（9）式变成直线．

由于

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

代入（9）式后便有圆周的复数形式

$$A'z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}-D'=0 \tag{10}$$

其中 A'，D' 仍为实常数， $\alpha=\frac{1}{2}(B+Ci)$

因而（10）表示圆或直线的一般方程。而且表示圆时（即$A'\neq 0$ 时），此圆的中心及半径可顺便求出。把（10）改写成下面的形状

$$\left(z+\frac{\alpha}{A'}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{\alpha}}{A'}\right)=\frac{\alpha\cdot\bar{\alpha}-A'D'}{A'^2}，\text{即}\left|z+\frac{\bar{\alpha}}{A'}\right|^2=\frac{\alpha\cdot\bar{\alpha}-A'D'}{A'^2}$$

所以中心是$-\frac{\bar{\alpha}}{A'}$，半径的平方是$(\alpha\cdot\bar{\alpha}-A'D')/A'^2$，因此（10）式 $\alpha\cdot\bar{\alpha}-A'D'>0$即 $B^2+C^2>A'D'$ 表示实圆。

由于分式线性映射可以分解成型如：

$$w=az+b \quad \text{及} \quad w=\frac{1}{z}$$

的组合。已知型如 $w=az+b$ 的映射保持圆周的不变。在 $w=\frac{1}{z}$的映射下，（10）式变为

$$A+\overline{\alpha w}+\alpha w+Dw\overline{w}=0.\ (A、D\text{为实数})$$

其像曲线表示圆周或直线（依D是否为零而定）。　　（证毕）

4．对称点的不变性

我们称位于圆心在 a点的圆的同一侧射线上的且满足关系式

$$|z_1-a|\,|z_2-a|=R^2$$

的点 z_1 与 z_2 为关于圆周 γ：$|z-a|=R$的对称点。

并且规定圆心 a与点∞的关于上述的圆周 γ 为对称的点。

关于对称点，我们有如下的定理：

定理 2　在$\widehat{S}$，上的两个点 z_1 与 z_2 关于圆周 γ 为对称的充分必要条件是：通过点 z_1 与 z_2 的任意圆周都与 γ 正交。

【证明】 当 γ 为直线的情形时，线段 $\overline{z_1z_2}$ 必然被 γ 所垂直平

分，定理显然成立。下面仅就 γ 为圆周 $|z-a|=R$ 的情形加以证明。

首先证明必要性。

由于 z_1，z_2 关于圆周 γ 对称。依对称点的定义，z_1 与 z_2 必位于从 a 出发的一条射线的同侧上（如图6·8）．作过 z_1, z_2 的任一圆周（非直线）．设为 δ．由 a 作 δ 的切线 $\overline{a\zeta}$，ζ 为切点．由平面几何关于切线与割线的关系，可知，

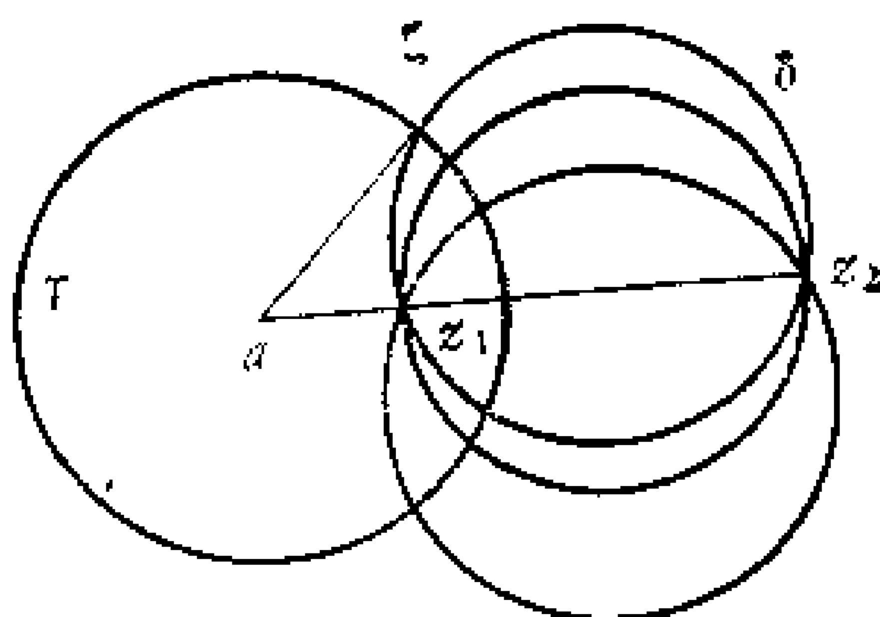


图 6·8

$$|\zeta-a|^2=|z_1-a|\ |z_2-a|,\ (\overline{a\zeta}=|\zeta-a|)$$

但由 z_1 与 z_2 关于圆周 γ 为对称点的定义，可有

$$|z_1-a|\ |z_2-a|=R^2$$

所以

$$|\zeta-a|=R.$$

这说明 $\overline{a\zeta}$ 是圆周 γ 的半径，故 δ 与 γ 正交。

其次，来证明充分性。

设过 z_1 与 z_2 的每一个圆周都与 γ 正交。过 z_1 与 z_2 作任一圆周（非直线）δ，则 δ 与 γ 正交（设交点之一为 ζ），因而 γ 的半径 $\overline{a\zeta}$ 必为 δ 的切线。

因为连接 z_1 与 z_2 的直线的延长线必过圆心 a，由于题设过 z_1 与 z_2 的每一圆周都与 γ 正交，当然过 z_1 与 z_2 的直线也与 γ 正交．于是 z_1 与 z_2 同位于由 a 出发的射线上，并且

$$R^2=|\zeta-a|^2=|z_1-a|\ |z_2-a|$$

故点 z_1 与 z_2 关于 γ 对称．

（证毕）

下面给出分式线性映射也具有对称点的不变性的定理。

定理3　设$\widehat{S}_z$上的两点z_1与z_2，关于圆周γ为对称。$w=L(z)$为一分式线性函数，则$w_1=L(z_1)$与$w_2=L(z_2)$两点关于圆周$\Gamma=L(\gamma)$必为对称。

【证明】　设△是$\widehat{S}_w$上经过点w_1与w_2的任一圆周。在分式线性映射$L(z)$的作用下，圆周$\gamma\subset S$的像为$\Gamma=L(\gamma)$。我们只须证明△与Γ正交即可。

现设过z_1与z_2的某一圆周为δ，并使$\triangle=L(\delta)$。依定理2可知δ与γ正交。由分式线性映射的共形性，δ与γ的像：$\triangle=L(\delta)$与$\Gamma=L(\gamma)$也正交。由定理2便得w_1与w_2关于$\Gamma=L(\gamma)$为对称。

（证毕）

5．交比不变性

设在$\widehat{S}_z$上，顺次有四个互异的点z_1，z_2，z_3，z_4，由它们所构成的比

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

称为它们的交比。简记为(z_1, z_2, z_3, z_4)。当有一点为∞时，将含∞的项用1代替。例如设$z_1=\infty$时，则交比为

$$(\infty, z_2, z_3, z_4)=\frac{1}{z_4-z_2}:\frac{1}{z_3-z_2}.$$

定理4　在分式线性函数映射下，四点的交比不变。

【证明】　我们只须就型如

$$w=az+b$$

及型如

$$w=\frac{1}{z}$$

的映射来证明交比的不变性即可。

当　$w=az+b$ 时，设

$$w_i=az_i+b\quad(i=1,2,3,4)$$

则

$$\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{(az_4+b)-(az_1+b)}{(az_4+b)-(az_2+b)}:\frac{(az_3+b)-(az_1+b)}{(az_3+b)-(az_2+b)}$$

$$=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

当　$w=\dfrac{1}{z}$时，设

$$w_i=\frac{1}{z_i}\,(i=1,2,3,4)$$

则

$$\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_4}-\frac{1}{z_2}}:\frac{\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_2}}$$

$$=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

所以定理成立。

（证毕）

6．分式线性函数的确定

由于分式线性映射

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\,,\quad(ad-bc\neq0)$$

含有四个参数a，b，c，d．其中至少有一个不为零，并以这个参数遍除分子分母，使分式线性映射变成含三个参数的函数．因此，在$\hat{S}_z$与$\hat{S}_w$平面上，任意指定三对对应点 z_i 与$w_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 代入后便得一方程组．由此方程组可唯一地求出三个参数．即分式线性函数由三对对应点 $z_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 与 w_i 所唯一确定．这就是下面的

定理：

定理 5 设分式线性函数将$\widehat{S}_z$平面上三个相异点 z_1, z_2, z_3分别映射成 w_1, w_2, w_3. 则此线性映射就唯一确定. 并且可以写成

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}:\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}=\frac{z-z_1}{z-z_3}:\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}.$$

【证明】设 z_i 与$w_i(i=1, 2, 3)$ 皆为有限点时，我们藉助于一个辅助平面$\widehat{S}_\zeta$，把$\widehat{S}_z$平面上的三个点： z_1, z_2, z_3映射成$\widehat{S}_\zeta$平面上的三个定点，0，1，∞. 其具体映射式为

$$\zeta=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

同样，$\widehat{S}_w$平面上的三个定点 w_1, w_2, w_3 分别映射成$\widehat{S}_\zeta$ 平面上的三个定点0，1，∞，其映射为

$$\zeta=\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}.$$

因此有

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

依w 解之，便得所求的分式线性映射.

当 z_i 或 w_i 中某一个为∞时，则含∞的那一项就用 1 代替. 例如，当 $w_3=\infty$, $z_1=\infty$ 时，则有

$$\frac{w-w_1}{1}\cdot\frac{1}{w_2-w_1}=\frac{1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{1}$$

即

$$w=w_1+(w_2-w_1)\frac{z_2-z_3}{z-z_3}$$

将$\widehat{S}_z$上三点∞, z_2, z_3 映射成$\widehat{S}_w$上三点 w_1, w_2, ∞.

这种映射是唯一的.

（证毕）

§6·5 分式线性映射的应用

由于分式线性映射具有把圆周（或直线）映射成圆周的性质，所以它在处理边界为圆周或直线的区域的映射上具有很大的作用。

设$w=L(z)$是一分式线性映射，γ 为$\widehat{S}_z$上的一圆周。

依Jordan定理，$\widehat{S}_z$平面被圆周划分为两个区域。如果γ将$\widehat{S}_z$ 平面分成区域 d_1 与 d_2。$\Gamma=L(\gamma)$将$\widehat{S}_w$ 平面分为区域D_1与 D_2。为了确定对应的区域，可用如下两种方法：

第一种方法是：在一个区域例如 d_1 中，取一点z_0，如果 $w_0=L(z_0)\in D_1$，则可以断定 $D_1=L(d_1)$，否则，$D_2=L(d_1)$。

第二种方法是：在 γ 上任取三点 z_1，z_2，z_3．当我们沿 z_1，z_2，z_3 顺次绕行时，d_1 在观察者前进方向的左侧，对应地沿 w_1，w_2，w_3 顺次绕行Γ 时，在观察者前进方向左侧的区域就是 d_1 的像。例如：过 z_1 作 γ 的法线 n，使 n 含于 d_1 内（图6·9）。于是沿 z_1，z_2，z_3 方向观察时，n 在观察者前进方向的左方。对应地 n的像 $N=L(n)$是过 w_1并与 Γ 正交的一段圆弧（或直线段）。由于分式线性映射在 z_1 点具有共形性，顺着 w_1，w_2，w_3观察时，N也应当在观察者前进方向的左方。因此，在 w_1，w_2，w_3 左方的那个区域就是 d_1 的像。

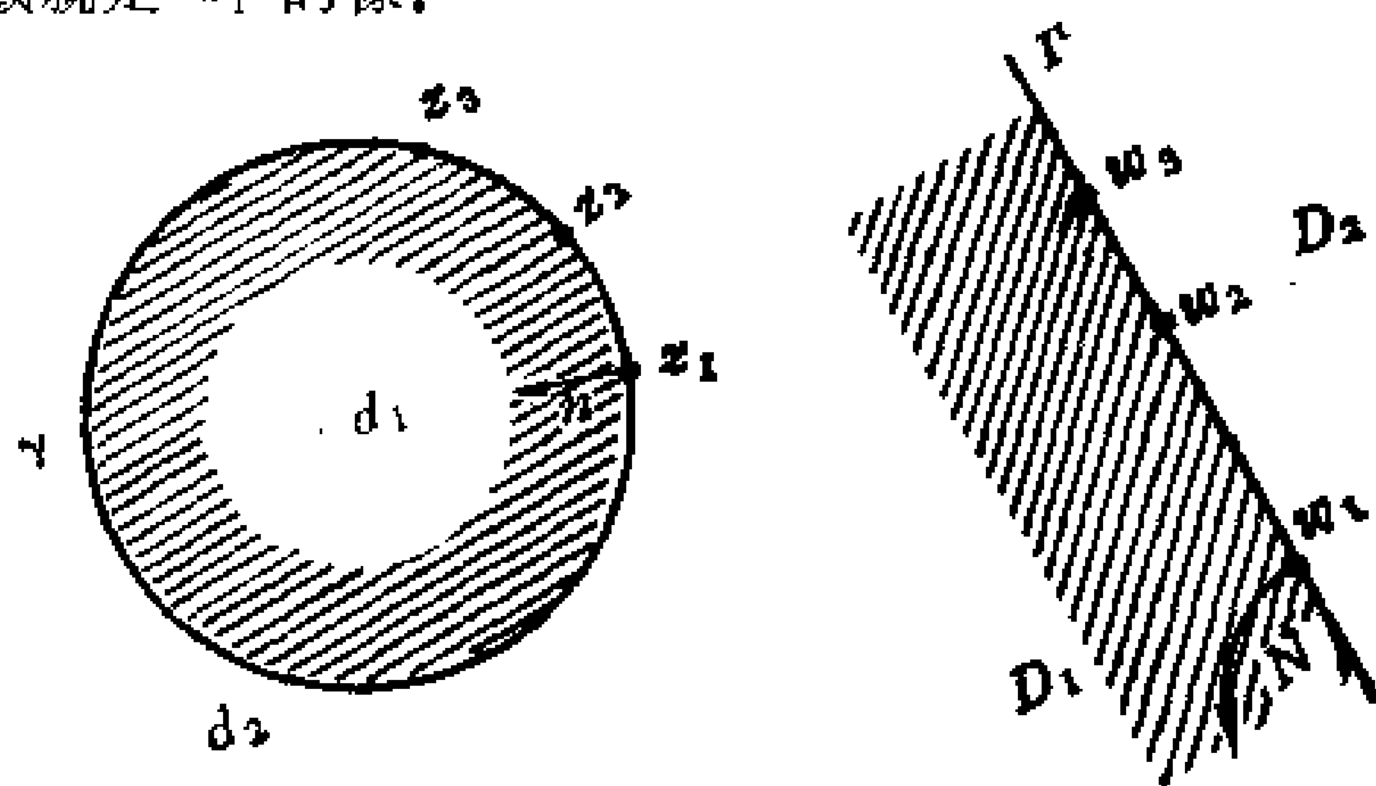


图 6·9

我们应用分式线性映射的这种性质，给出在共形映射中经常使用的三个重要例子。

【例1】试证将上半平面共形地映射成上半平面的分式线性映射为

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc>0)$$

其中 a，b，c，d 皆为实数。

【证明】事实上，上半平面的边界都是实轴．所以欲使上半平面映射成上半平面，必须将实轴映射成实轴，且保持同向，即实轴上的旋转角应是0，所以必须有

$$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}>0$$

（如图6·10所示）．

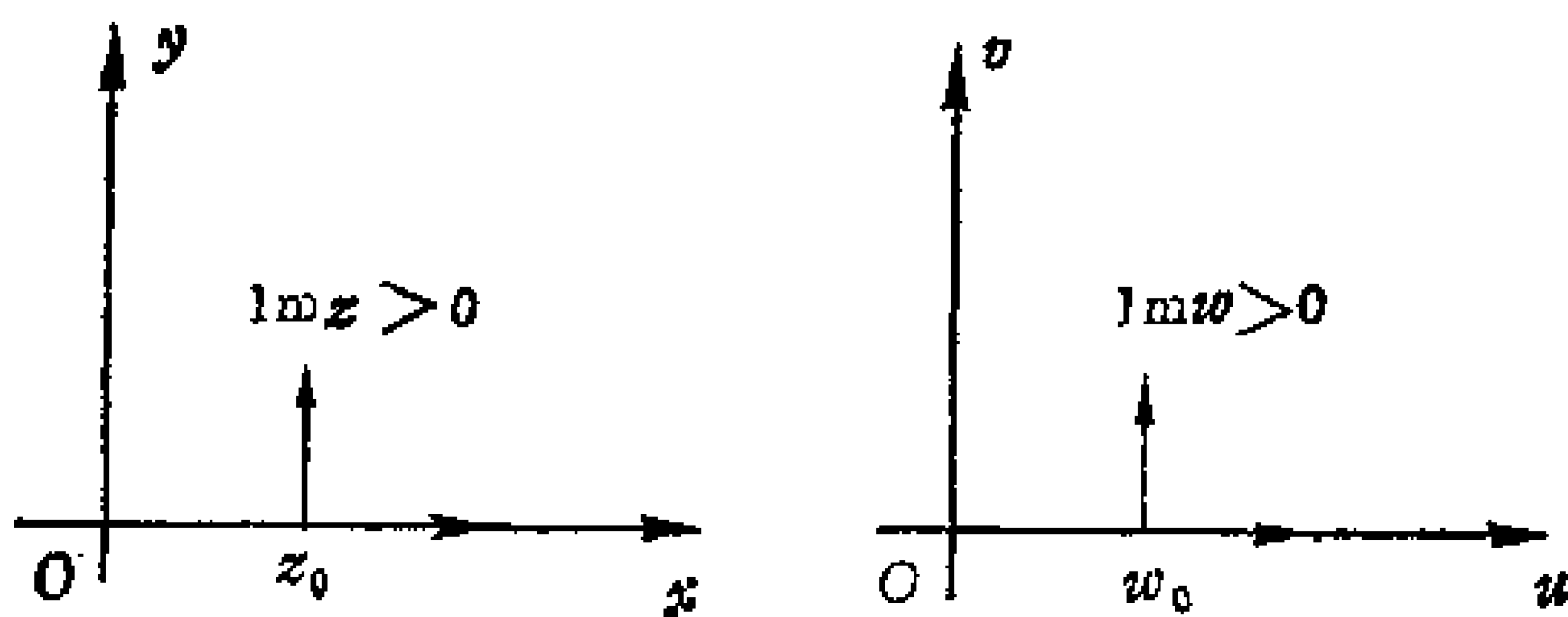


图 6·10

如果 a，b，c，d 皆为实数，且当 $ad-bc<0$时，则分式线性映射将上半平面映射成下半平面．

【例2】求将上半平面：$\mathrm{Im}z>0$共形地映射成单位圆域：$|w|<1$的分式线性映射，并使上半平面的一点 a $(\mathrm{Im}a>0)$映射为$w=0$．

【解】欲求上半平面到单位圆域的分式线性映射，须将 S_z 平

面的实轴映射成 S_w 平面的单位圆周．再由分式线性映射具有对称点的不变性，点 a关于实轴的对称点$\bar{a}$，应当映射成 $w=0$ 关于单位圆周 $|w|=1$的对称点 $w=\infty$。因此这个映射具有如下的形式

$$w=K\frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$

其中K是常数．关于K的确定，应使实轴上的一点，例如$z=0$（为计算方便起见）映射成单位圆周上的一点 w.这时有

$$w=K\frac{a}{\bar{a}}$$

因此

$$1=|K|\left|\frac{a}{\bar{a}}\right|=|K|$$

所以 $K=e^{i\theta}$（θ 为实数）．于是所求的映射为

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}. \qquad (1)$$

这里主要应用了分式线性映射的保圆性及对称点的不变性．在（1）中，如果参数 θ 与 a 都确定了，则映射便是唯一的．如果其中一个参数被给定，就要确定另外的一个参数．通常确定 θ的办法是：或者指定轴上一点与单位圆周上某一点的对应关系；或者指出映射在 $z=a$ 处的旋转角 $\arg f'(a)$．（映射（1）在 $z=a$ 处旋转角 $\arg f'(a)$与 θ 有何关系？）

【例 3】求将单位圆域：$|z|<1$共形地映射成单位圆域：$|w|<1$的分式线性映射，并使一点 a（$|a|<1$）映射成 $w=0$。

【解】由分式线性映射的保圆性，将单位圆域 $|z|<1$ 映射成单位圆域$|w|<1$的分式线性映射必将圆周 $|z|=1$ 映射成圆周 $|w|=1$.根据分式线性映射具有对称点的不变性，设点 $a(\neq0)$ 关于单位圆周 $|z|=1$的对称点为 $a^*=\frac{1}{\bar{a}}$，它们分别被映射成关于单位圆周 $|w|=1$ 的对称点 $w=0$ 与 $w=\infty$，因此，所求映射应为

$$w=K\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}$$

整理后得

$$w=K_1\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

其中 K_1 是常数。

为了确定K_1，可以取单位圆周上的一个特殊点 $z=1$，使它映射成圆周 $|w|=1$ 上的一点，于是

$$\left|K_1\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right|=1.$$

$|K_1|=1$，即 $K_1=e^{i\theta}$（θ 为实数）．所求映射为

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \qquad (2)$$

（2）式的唯一性，有待于实参数 θ及参数 a的确定。

读者可以验证，当 $|a|>1$ 时，则（2）式将 $|z|<1$ 映射成 $|w|>1$.

上述三个例子在边界为圆周的区域间的映射中起着重要作用．因此要求读者把它们当做公式记住．

【例 4】 设过点 a与 b的圆弧所围成的区域为G，试求G在分式线性函数

$$w=K\frac{z-a}{z-b},\quad K\text{为常数}$$

映射下的像域D．

【解】 函数

$$w=K\frac{z-a}{z-b}$$

是分式线性函数，它具有保圆性．它将 S_z 平面的 $z=a$ 及 $z=b$ 分别映射成 S_w 平面的 $w=0$及 $w=\infty$．把围成G的两圆弧映射成过 $w=0$，$w=\infty$的两条夹角仍为 φ 的射线．因此区域G的像域是

角域D（如图6·11）．适当地选取K，则给定的函数可以使二角形区域G共形地映射成角域D。

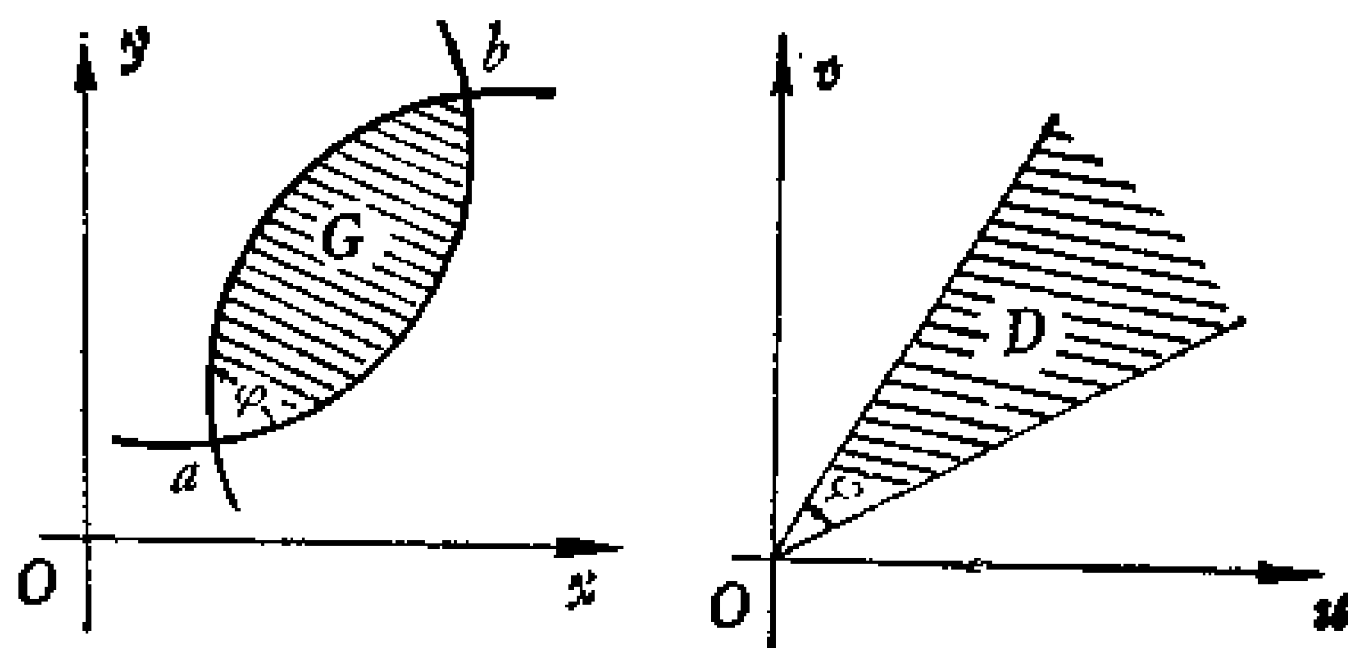


图 6·11

$$0<\arg w<\frac{\pi}{n}$$

上述的函数

$$w=K\frac{z-a}{z-b}$$

所构成的映射，称之为二角形映射．

二角形映射，有将有限的圆弧或线段变成无限的直线的特殊功用．因此圆弧间所夹的区域若要变成角域，常常使用二角形映射．

总之，将S_z上的两个有限点a、b中的一个变成$\hat{S}_w$上的无穷远点，另一个变成原点时，使用二角形映射是非常奏效的．关于这方面的例题与习题在后边还将遇到．

习　题（6·1）

1．求分式线性函数$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，$ad-bc\neq 0$使$\hat{S}_z$平面上的直线与S_w平面上的单位圆周相对应的充分必要条件．

2．求分式线性函数 $w=\frac{az+b}{cz+d}$，$ad-bc\neq0$，使 S_z 平面由三圆弧所围成的三角形与 S_w 平面上的直线三角形相对应的充分必要条件。

3．如果 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 将单位圆周变成直线，其系数应满足什么条件？

4．试求将 S_z 平面的上半平面映射成 S_w 平面的下半平面的分式线性映射的一般形式。

5．试求将 S_z 平面上的单位圆域：$|z|<1$ 映射成 S_w 平面的单位圆周外部：$|w|>1$ 的分式线性映射的一般形式。

6．分式线性函数 $w=\frac{z-i}{z+i}$ 将角域 $G=\{z:(\mathrm{Im}z>0)\cap(\mathrm{Re}z>0)\}$ 映射成什么区域？

7．将 S_z 平面的上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 共形地映射成 S_w 平面的单位圆域：$|w|<1$ 的分式线性映射

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}.$$

其在 $z=\alpha$ 处的旋转角 $\arg f'(\alpha)$ 等于什么？试证之。

8．求上半平面到单位圆域内的分式线性映射，且使 $f(i)=0$，$f'(i)<0$。

9．求上半平面到单位圆域内的分式线性映射，且使 $f(2i)=0$，$f'(2i)>0$。

10．求点 $2+i$ 关于圆周：

1）$|z|=1$；　2）$|z-i|=3$

的对称点。

11．求上半平面到上半平面的映射，且使

$f(a)=b$，$\arg f'(a)=\alpha$。$(\mathrm{Im}a>0,\ \mathrm{Im}b>0)$

12．求单位圆域：$|z|<1$ 到单位圆域：$|w|<1$ 且满足下

列条件的分式线性映射：

$$1)\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

$$2)\ f(0)=0,\ \arg f'(0)=-\frac{\pi}{2}.$$

13．设函数 $w=f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且是一将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 的分式线性映射．试证：

$$|f'(z)|=\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

14．在13题的条件下试证：

$$|f'(\alpha)|=\frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

其中 $\alpha\in|z|<1$，$f(\alpha)=0$。

§6·6　某些初等函数所构成的映射

第二章中已经对初等函数的分析性质及代数性质作了一些讨论，但没有涉及到它们的映射性质．实际上，它们的映射性质在共形映射的理论和应用上都占有特殊重要地位，同时也是解决实际问题的有力工具之一。

分式线性映射是初等函数的一部分，上面我们已经对它的映射性质作了比较详细地研究。在共形映射问题中，有必要讨论其他几个常用的初等函数的映射性质．在研究这些初等函数的映射性质时，仍然围绕着映射两类基本问题(§6·3-1)进行．

1．幂函数与根式函数的共形映射

我们曾称函数 $w=z^n$为幂函数，其中 n是大于1的自然数。它除了 $z=0$ 及 $z=\infty$ 外，在$\hat{S}_z$上处处具有不为零的导数，即

$$\frac{dw}{dz}=nz^{n-1}\neq 0.$$

因而幂函数在这些点处是共形的。

为讨论它的映射性质，令 $z=\rho e^{i\theta}$，$w=\gamma e^{i\varphi}$，于是

$$\gamma=\rho^{n},\quad \varphi=n\theta+2K\pi \tag{1}$$

显然，幂函数有如下的映射性质：

① 射线：$\arg z=\theta$ 被映射成射线：$\arg w=n\theta+2K\pi$；

② 圆周：$|z|=\rho$被映射成圆周 $|w|=\gamma=\rho^{n}$；

③ 模相同，辐角相差$\frac{2\pi}{n}$的整数倍的点z_1与 z_2 被映射成同一点 $w_1=w_2$。

由单叶函数的定义可知，S_z平面上以原点为顶点，张角是$\frac{2\pi}{n}$的角域

$$G_K:\ K\frac{2\pi}{n}<\arg z<(K+1)\frac{2\pi}{n}(K=0,1,2,\cdots,n-1)$$

中的任意一个都是幂函数 $w=z^{n}$ 的单叶性区域。因此，它在G_K内构成共形映射。

④ 单叶性区域 G_K 的每一个都映射成 S_w 平面上除去正实轴的角域

$$D:\ 0<\arg w<2\pi$$

（如图6・12）。

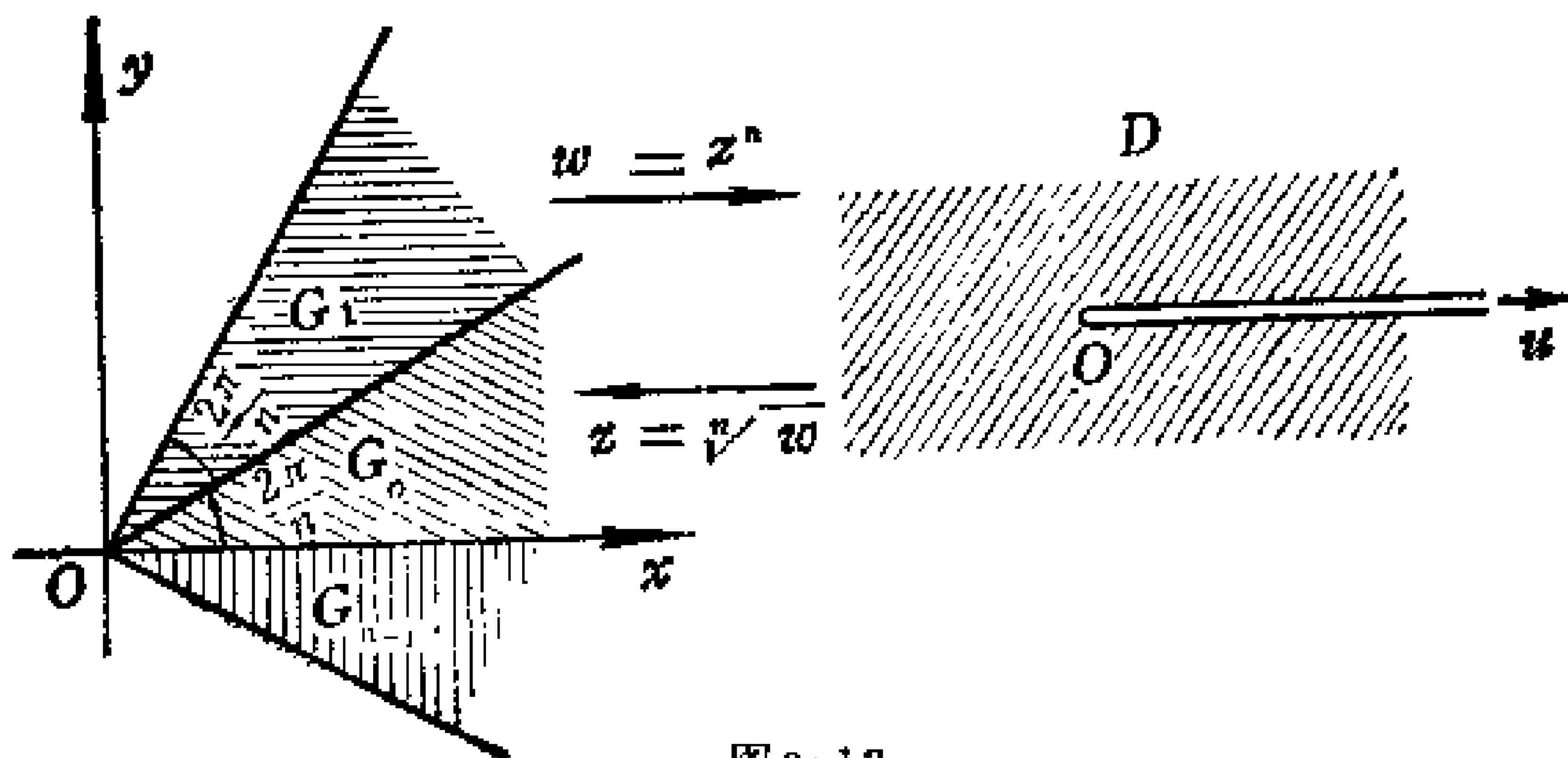


图6・12

作为 $w=z^n$ 的反函数是 $z=\sqrt[n]{w}$，其中 $w\neq0$，$n\geqslant2$，它将S_w平面上的角域

$$D:\ 0<\arg w<2\pi$$

共形地映射成 S_z 平面上的角域

$$G_K:\ K\frac{2\pi}{n}<\arg z<(K+1)\frac{2\pi}{n}$$

$$K=0,1,2,\cdots,n-1$$

（如图6·12）．由于$\sqrt[n]{w}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$的主枝（$K=0$）是$D$上的单叶解析函数，所以它将$D$共形地映射成 G_0。其他当$K=1,2,\cdots,n-1$时，诸分枝分别将D映射成 G_1、$G_2,\cdots$，G_{n-1}（如图6·12）．

2．指数函数与对数函数的共形映射

指数函数 $w=e^z$ 在任意有限点均有 $(e^z)'\neq0$，因而它在 S_z平面上是共形的。

令 $z=x+iy$，$w=re^{i\varphi}$，则有

$$r=e^x,\ \varphi=y+2K\pi \qquad (2)$$

$$K=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$$

由此可以推出指数函数 $w=e^z$ 的如下映射性质：

① 平行于实轴的直线 $y=y_0$ 被映射成由原点出发的射线 $\arg w=\varphi=y_0$，特别地，实轴 $y=0$被映射成正实轴，即 $\varphi=\arg w=0$；

② 平行于虚轴的直线段：$x=x_0,0\leqslant y\leqslant\alpha$（$0<\alpha\leqslant2\pi$）被映射成以原点为心的圆弧：$r=e^{x_0}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$。

因为 $w=e^z$ 是以 $2\pi i$ 为周期的函数，所以它在 S_z 平面上不是单叶函数．为此，我们在 S_z 平面上选取以平行于实轴的直线族

$$y=2K\pi\ \text{及}\ y=2(K+1)\pi\ \ (K=0,\ \pm1,\pm2,\cdots)$$

为边，宽度为2π的带形区域

$G_K=\{z:-\infty<x<+\infty,\ 2K\pi<y<(K+1)\pi\}$，$K$为整数．显

然，G_K 是指数函数 e^z 的单叶性区域。且 $w=e^z$。

③ 单叶性区域 G_K 映射成 S_w 平面上除去正实轴的区域 D（如图6·13）. 特别地，将 S_z 平面上平行于实轴，宽度为 π 的带形区域：$0<y<\pi$ 映射成 S_w 平面的上半平面；

④ 平行于实轴，宽度为 $h(0<h<2\pi)$ 的带形区域，被映射成角域：$0<\arg w<h$.

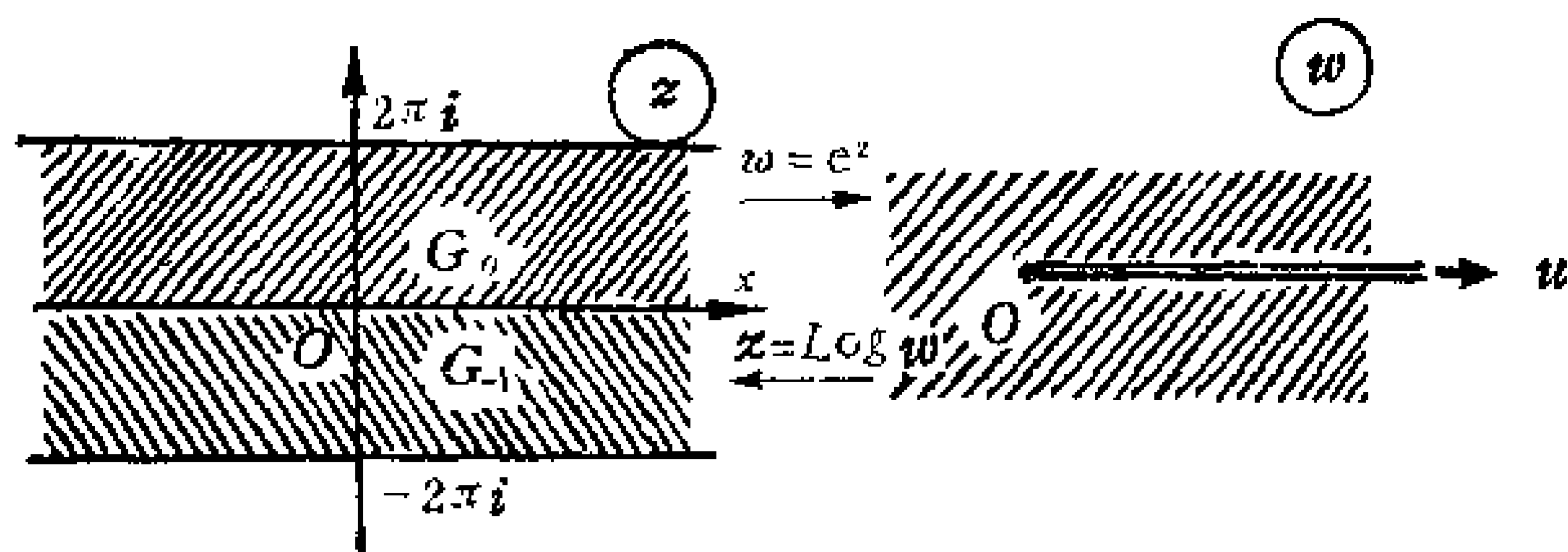


图6·13

作为指数函数 $w=e^z$ 的反函数的对数函数，$z=\text{Log}w$ 的各个分枝，都在 D 上单叶解析，并分别将 D 共形地映射成 S_z 平面的 G_K，即当 $K=0$ 时的那一枝（主枝），将 D 映射成 G_0；$K=-1$ 时的那一枝，将 D 共形地映射成 G_{-1}，……，等等. 显然，对数函数所作的映射都是指它的单值解析分枝而言.

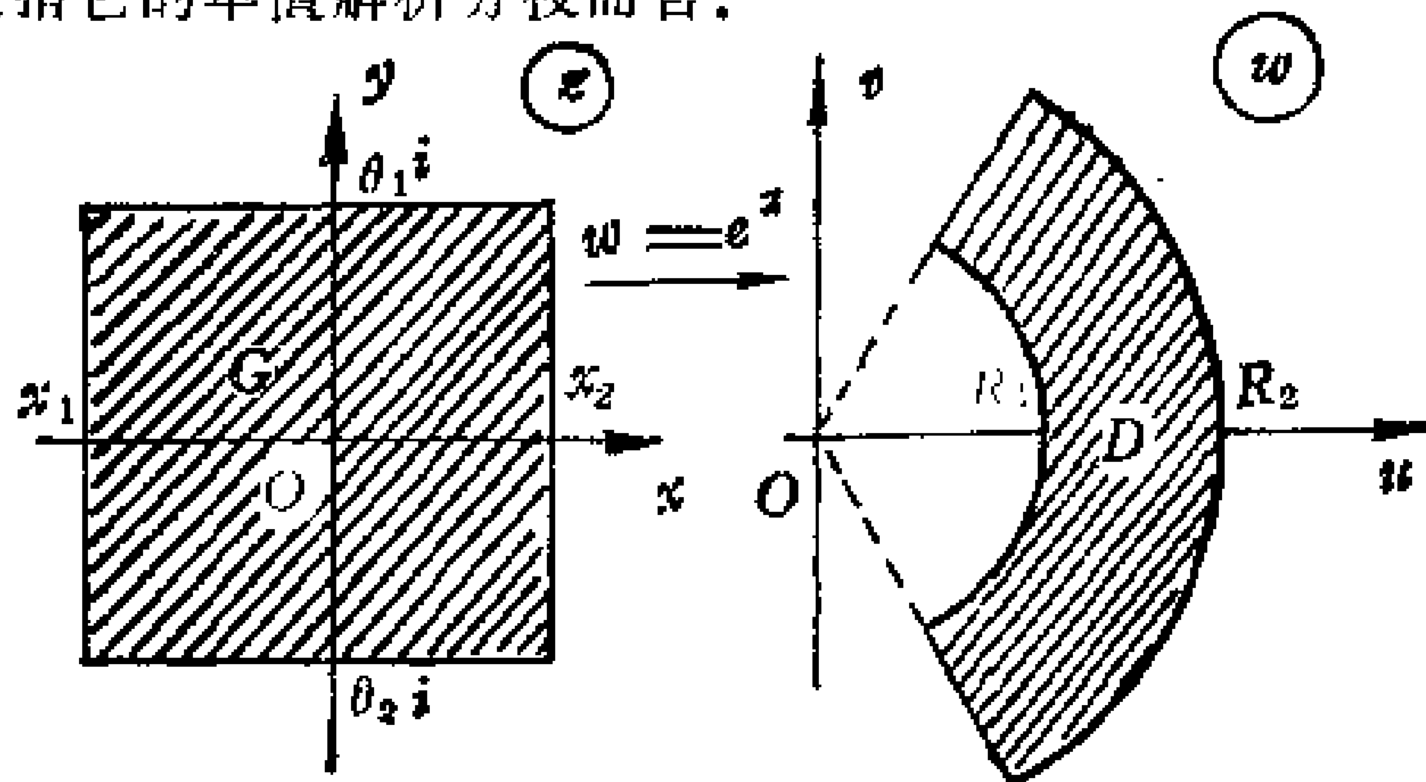


图6·14

总之，指数函数$w=e^z$将平行于实轴的带形区域映射成角域；对数函数的单值枝可将角域映射成平行实轴的带形区域。

例如，指数函数 $w=e^z$ 把矩形区域 $G=\{z: x_1<x<x_2,\ \theta_2<y<\theta_1\}$映射成扇形区域$D=\{w: e^{x_1}<r<e^{x_2}, \theta_2<\varphi<\theta_1\}$，（如 图6·14）。

3．Жуковский（儒茍夫斯基）函数的映射

我们称型如

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

的函数为 Жуковский函数．当 $z\neq0, z\neq\infty$时是$\hat{S}_z$平面的一个有理函数．其反函数$z=w+\sqrt{w^2-1}$是二值函数．于是它在 S_z 平面上不是单叶函数（双叶的）．

为了研究它的共形映射问题，我们必须首先来讨论它的单叶性区域。为此引进如下定理：

定理 Жуковский函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$为单叶的充分必要条件是 $z_1\cdot z_2\neq1$（其中 $z_1\neq z_2$）。

【证明】充分性．

设当 $z_1\neq z_2$，$z_1\cdot z_2\neq1$时，往证 $w_1\neq w_2$。我们用反证法．假设$w_1=w_2$，即设

$$\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)=\frac{1}{2}\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right),$$

$$(z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1\cdot z_2}\right)=0.$$

因而，或者 $z_1=z_2$，或者 $z_1\cdot z_2=1$，这与题设相矛盾．故当 $z_1\neq z_2$，$z_1\cdot z_2\neq1$ 时有 $w_1\neq w_2$．即函数$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$是单叶的．

必要性．假设 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$是单叶的，往证 $z_1\cdot z_2\neq1$.

事实上，依单叶性的定义，当 $z_1 \neq z_2$ 时，应有

$$\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right) \neq \frac{1}{2}\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right)$$

或 $$(z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1 z_2}\right) \neq 0.$$

因为不可能有 $z_1 = z_2$，也不可能有 $z_1 \cdot z_2 = 1$，而只能有

$$z_1 \cdot z_2 \neq 1.$$

（证毕）

那么 S_z 平面上到底什么样的区域是函数的单叶性区域呢？根据这个定理，只要区域 $G \subset S_z$ 内的任意两点 z_1 与 z_2 不满足关系式：

$$z_1 \neq z_2\ ,\quad z_1 \cdot z_2 = 1.$$

则 G 就是 Жуковский 函数的单叶性区域，而且在这种区域上有

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right),\ z \neq 0,\ z \neq \infty$$

故在区域 G 上函数为单叶解析。

由§6·4—4，可知（设单位圆周 $C = \{z: |z| = 1\}$），int(C) 与 ext(C)，即 $|z| < 1$ 与 $|z| > 1$ 都是单叶性区域，因为在这种区域内的任意两点都不满足上述关系。

现在来讨论在 Жуковский 函数的映射下，C，int (C) 及 ext(C) 都被映射成 S_w 平面的什么样的曲线和区域？

为此，令 $z = \rho e^{i\theta}$，$w = u + iv$

则由（3）式有

$$u + iv = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}\right)$$

于是得到

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\theta, \qquad (5)$$

$$v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta$$

由（5）式消去 θ 可得

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}=1 \qquad (6)$$

因此，函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 有如下性质：

① 由（6）式可知，它把 S_z 平面的圆周 $|z|=\rho(\neq1)$ 映射成 S_w 平面的椭圆（如图6·15）

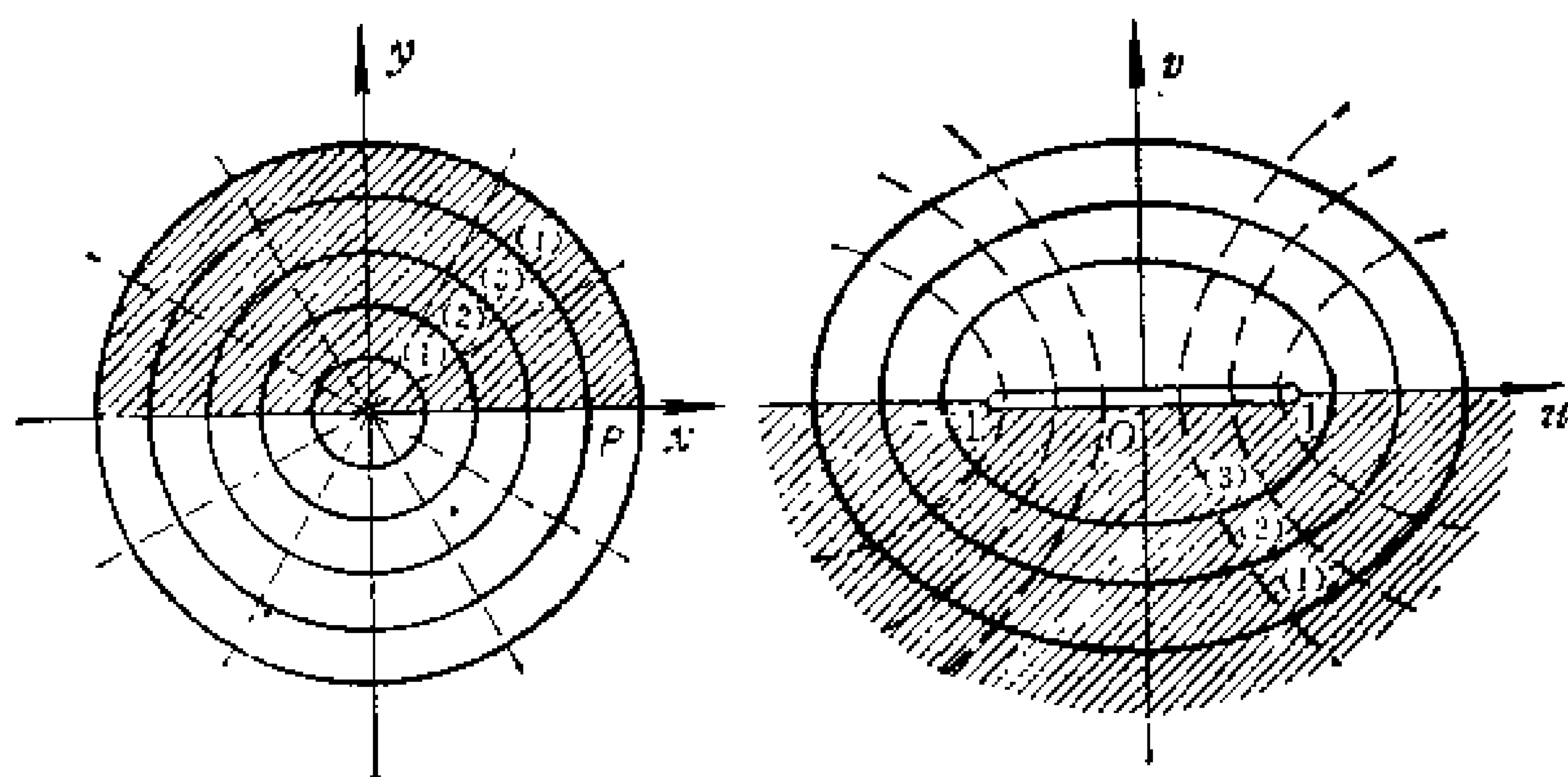


图6·15

② 单位圆周 C: $|z|=1$ 被映射成 S_w 平面的实轴上的线段 $[-1, 1]$.

事实上，当 $|z|=1$时，即 $\rho=1$ 时，由（5）式可得

$$u=\cos\theta,\quad v=0\quad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$$

所以

$$-1\leqslant u\leqslant1,\quad v=0.$$

这就是说C: $|z|=1$被映射成 $[-1, 1]$，往返一次.

依边界对应定理，$\text{int}(C)$ 被映射成 S_w 平面上去掉线段后的区域 $D=\{S_w\sim[-1,1]\}\subset S_w$平面.

③ 当 z 沿单位圆周内的任一圆周 $|z|=\rho(<1)$，逆时针绕行一周（即角从 $0\to\frac{\pi}{2}\to\pi\to\frac{3\pi}{2}\to2\pi$）时，对应地 u,v 的符号可由关系式（5）求得．于是可确定出w 的符号如下：

θ	$0\to\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\to\pi$	$\pi\to\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi\to2\pi$
u	+	−	−	+
v	−	−	+	+
$w=u+iv$ 所在的象限	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ

即w 沿椭圆周的顺时针方向绕行一周。

同理，当 $\rho>1$时，当 z沿单位圆周外部的任一圆周 $|z|=\rho$ (>1)顺时针绕行一周（即 θ从 $2\pi\to\frac{3}{2}\pi\to\pi\to\frac{\pi}{2}\to0$）时，对应的 w 也是沿椭圆的顺时针方向绕行一周。

这就是说，S_z 平面单位圆周的外部 ext(C)也被映射成 S_w 平面上去掉线段〔-1，1〕后的区域$D=\{S_w\sim[-1,1]\}$，它与单位圆周内部int(C)的像域虽然一样，但是对应点的运行方向刚好相反。所以

④ 由②与③可知，上半个单位圆域 $G=\{z: |z|<1\cap(\mathrm{Im}z>0\}$ 被映射成下半个平面：$\mathrm{Im}w<0$；上半平面单位圆域的外部 $G=\{z: (|z|>1)\cap(\mathrm{Im}z>0)\}$被映射成上半平面 $\mathrm{Im}w>0$。

⑤由（5）式消去 ρ 可得射线$\arg z=\theta$（及射线$\arg z=\theta+\pi$），被映射成以点（1，0）与（-1，0）为焦点的双曲线：

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta}-\frac{v^2}{\sin^2\theta}=1.$$

最后，我们讨论 Жуковский 函数的反函数。

由（3）式得

$$z=w+\sqrt{w^2-1}. \tag{7}$$

显然，这是一个二值函数．对于每一点w有两个点 z_1 与 z_2 与之对应．这两个点间有关系式

$$z_1 \cdot z_2 = 1.$$

这个二值性的产生，是由于在公式（7）中有根式存在．如果令 $z_1 = w + \sqrt{w^2-1}$，那么 z的另一个对应于 w 的值就是 $z_2 = w - \sqrt{w^2-1}$．由此可直接看出有关系式 $z_1 \cdot z_2 = 1$．

由§6·4—4 可知，当w 的值取定后，z_1 与 z_2 的值分别位于 $\mathrm{ext}(C)$ 与 $\mathrm{int}(C)$．即如上所论，当$w \in D = \{S_w \sim [-1, 1]\} \subset S_w$平面时，对应的 z有两个分枝 $z_1 \in \mathrm{ext}(C)$，$z_2 \in \mathrm{int}(C)$ （或$z_1 \in \{|z| > 1\}$，$z_2 \in \{|z| < 1\}$）反之，$z \in \mathrm{ext}(C)$，对应于 $w \in D$．

总之，Жуковский函数在 S_z 平面上的单叶性区域是 $\mathrm{ext}(C)$ 与 $\mathrm{int}(C)$，（即 $|z| > 1$与 $|z| < 1$）．函数把这两种区域分别映射成D（S_w 平面去掉线段 $[-1, 1]$）．Жуковский 函数的反函数$z = w + \sqrt{w^2-1}$的两枝 z_1 与 z_2 分别把D映射成 $|z| > 1$与 $|z| < 1$．

在具体应用的实践中，如遇到求将圆域：$|z| < 1$ 或 $|z| > 1$映射成D的映射，则可以用 Жуковский函数；反之，则用其函数的反函数的单值枝．如果遇到将上半个单位圆域 $|z| < 1$与 $|z| > 1$分别映射成下半平面或上半平面的映射，亦使用 Жуковский函数．

4．机翼剖面的外部到圆外部的共形映射

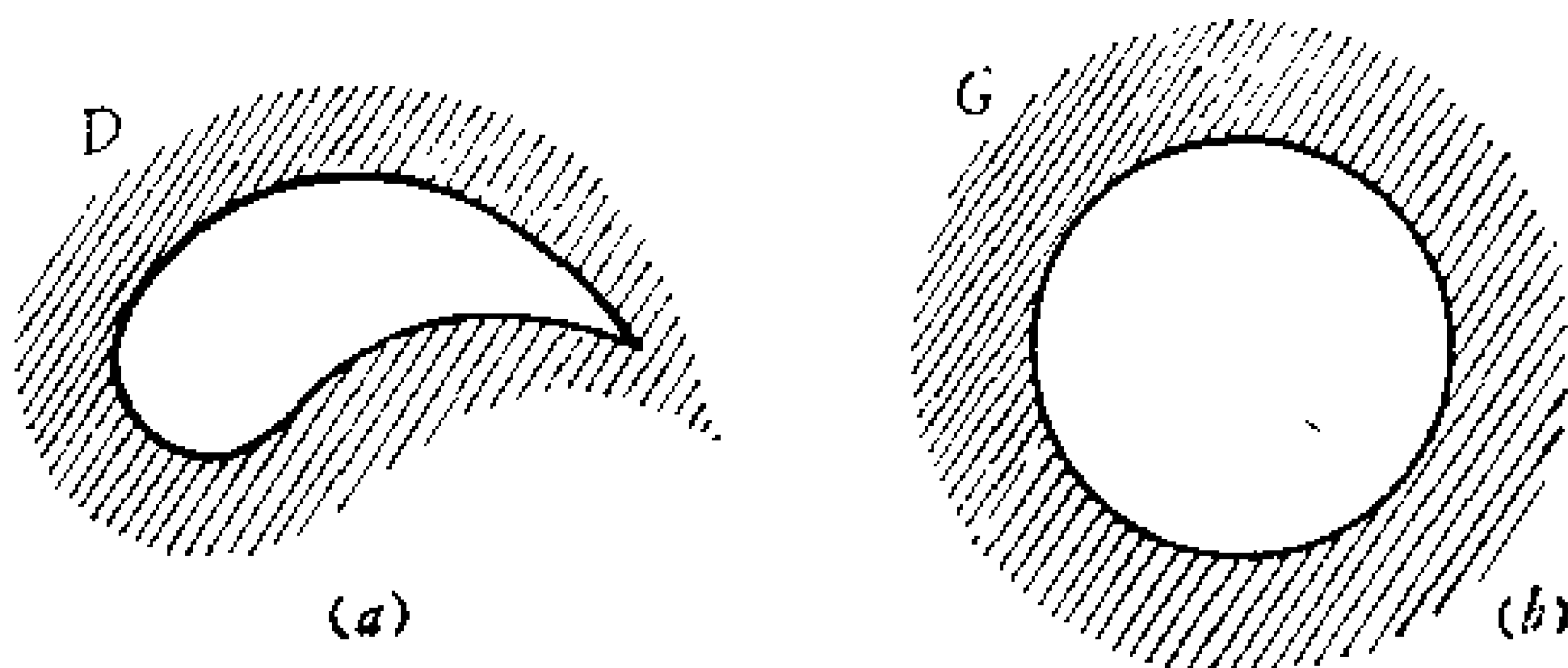


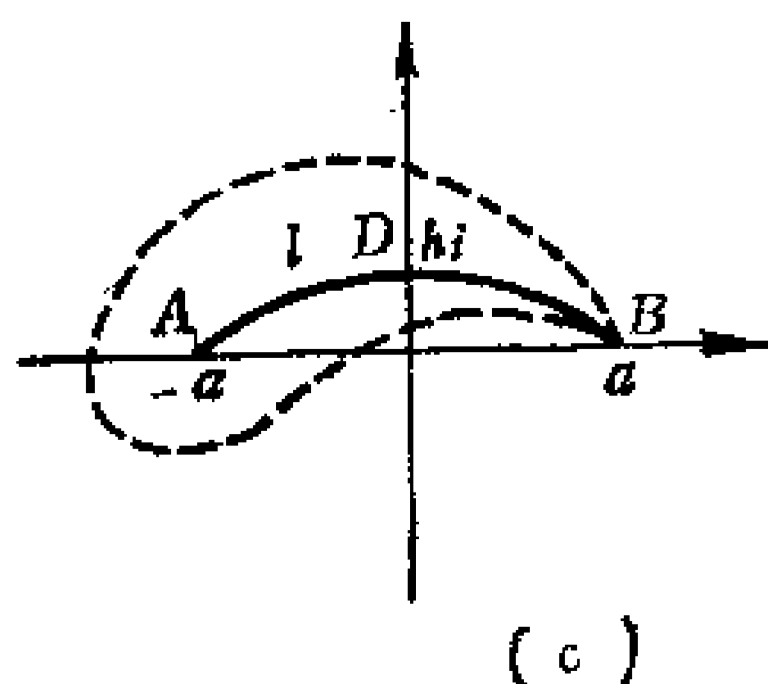
图6·16（一）

图 6·16(a)是机翼剖面外部区域，图 6·16(b)是圆周的外部区域。

在流体力学上研究绕流问题，首先要处理圆柱的绕流问题，然后再讨论其他物体的绕流问题。这个问题归结为数学问题，就是要将处理机翼剖面的外部区域映射成圆的外部区域的问题。那么将图6·16(a)映射成6·16(b)的函数是什么呢？这就是我们要解决的主要问题。

我们这里只限于对特殊情况的机翼剖面进行讨论。

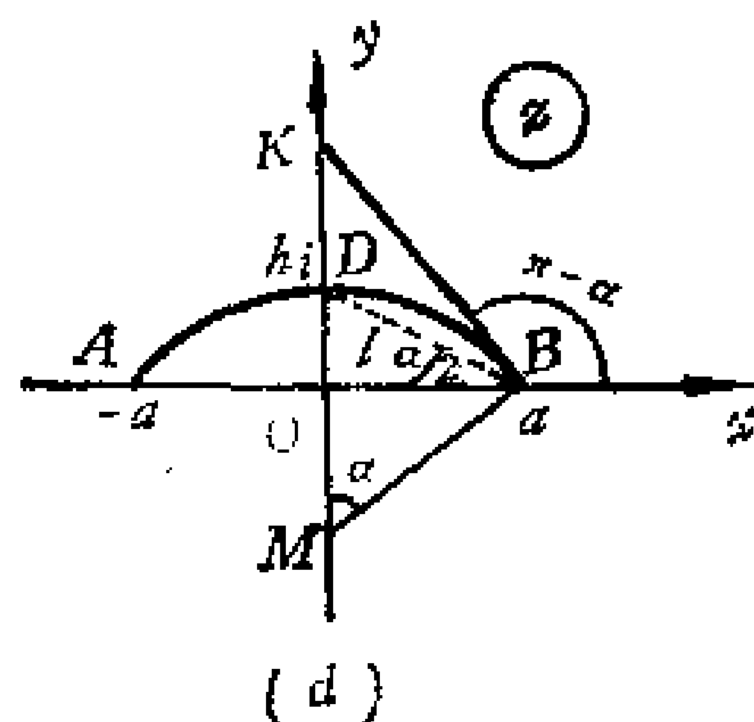
为寻找将图6·16(a) 映射成图 6·16(b)的函数，我们先看机翼剖面的边界线退化成圆弧的情形（如图6·16(c)）。换句话说，只须讨论圆弧的外部区域到圆的外部区域的映射即可。



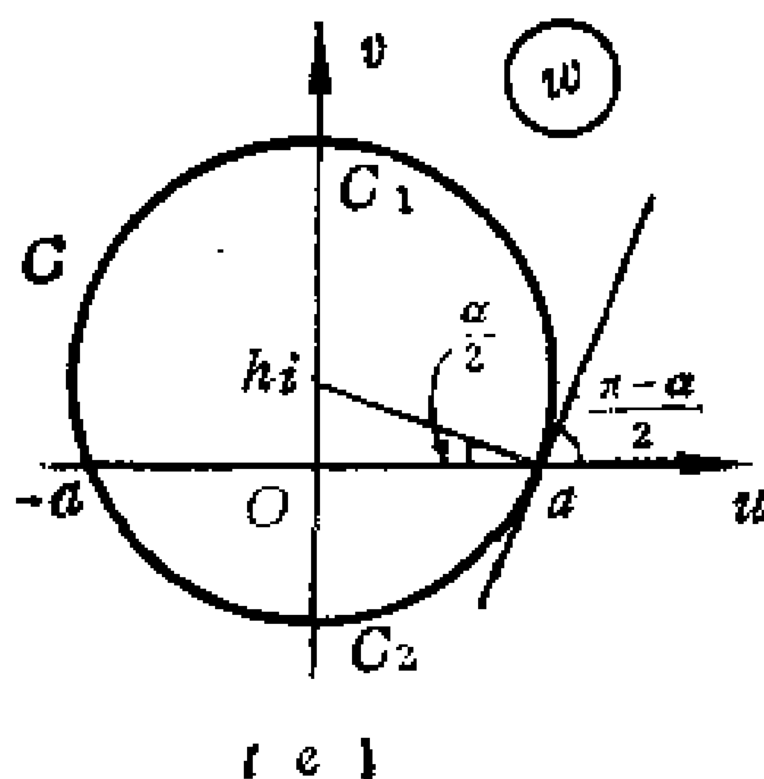
(c)

设有圆周与实轴交于点 $-a$与 a，且与虚轴交于点 hi，得圆弧 l。现将沿圆弧l有截口的 S_z 平面，如何能映射成S_w平面上以 hi 为中心且通点 $-a$与a的圆周C的外部呢？(图(6·16(d)，(e))。

以下来求这个映射。



(d)



(e)

图6·16（二）

现设在点 a 处，弧 l 的切线 BK 与实轴的负方向所成的角为 α。则由点 a 到 hi 所引的射线与实轴的负方向所成的角为 $\frac{\alpha}{2}$。事实上，若设 M 是圆弧 l 的圆心。A、D、B 各是数 $-a$、hi、a 的对应点。则 $\angle BMD=\alpha$，于是 $\angle MDB=\angle DBM=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$。但因 $\angle KBM=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle KBD=\frac{\alpha}{2}$，因而 $\angle DBO=\frac{\alpha}{2}$。由此可知，在 S_w 平面上由点 hi 到点 a 的半径与实轴的负向所成的角也是 $\frac{\alpha}{2}$。而在点 a 处圆周的切线与实轴的正方向所成的角等于 $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$。要想求出能符合要求的函数，我们先将沿圆弧 l 有截口的 S_z 平面和 S_w 平面上的 $\mathrm{ext}(C)$ 都共形地映射成 S_ζ 的同一个区域。

而分式线性函数

$$\zeta=\frac{z-a}{z+a} \tag{1}$$

只要 $z\neq -a$ 便是共形映射。

这个函数把 S_z 平面的圆弧 l（端点为 $B(a)$ 与 $A(-a)$）在端点 $B(a)$ 处共形映射成 S_ζ 平面的由原点出发的射线 $\overline{OR}$。因为 l 在 B 点与正 x 轴交角为 $\pi-\alpha$，所以 $\overline{OR}$ 与正实轴的交角也为 $\pi-\alpha$（图6·16(f)）。

依边界对应定理，这个函数显然把 S_z 平面上有截口 l 的 z 平面映射成有截口 $\overline{OR}$ 的 S_ζ 平面。

又分式线性函数

$$\xi=\frac{w-a}{w+a} \tag{2}$$

将 S_w 上的已给圆周 C 映射成 S_ξ 上通过原点的直线 R_2R_1（图6·16(g)）。这时，w 平面的 C_1 被映射成 S_ξ 的半射线 $\overline{OR_1}$；C_2 被映射成半射线 $\overline{OR_2}$。$\overline{OR_1}$ 和正实轴的交角为 $\frac{\pi-\alpha}{2}$。在共形映射下，周围 C

被变成射线$\overline{R_2R_1}$，它们与正实轴的交角都是$\frac{\pi-\alpha}{2}$．依边界对应定理，去掉圆周C的S_w被映射成去掉射线$\overline{R_1R_2}$的S_ξ．而$\mathrm{ext}(c)$变成S_ξ的以$\overline{R_1R_2}$分开的右半平面D．

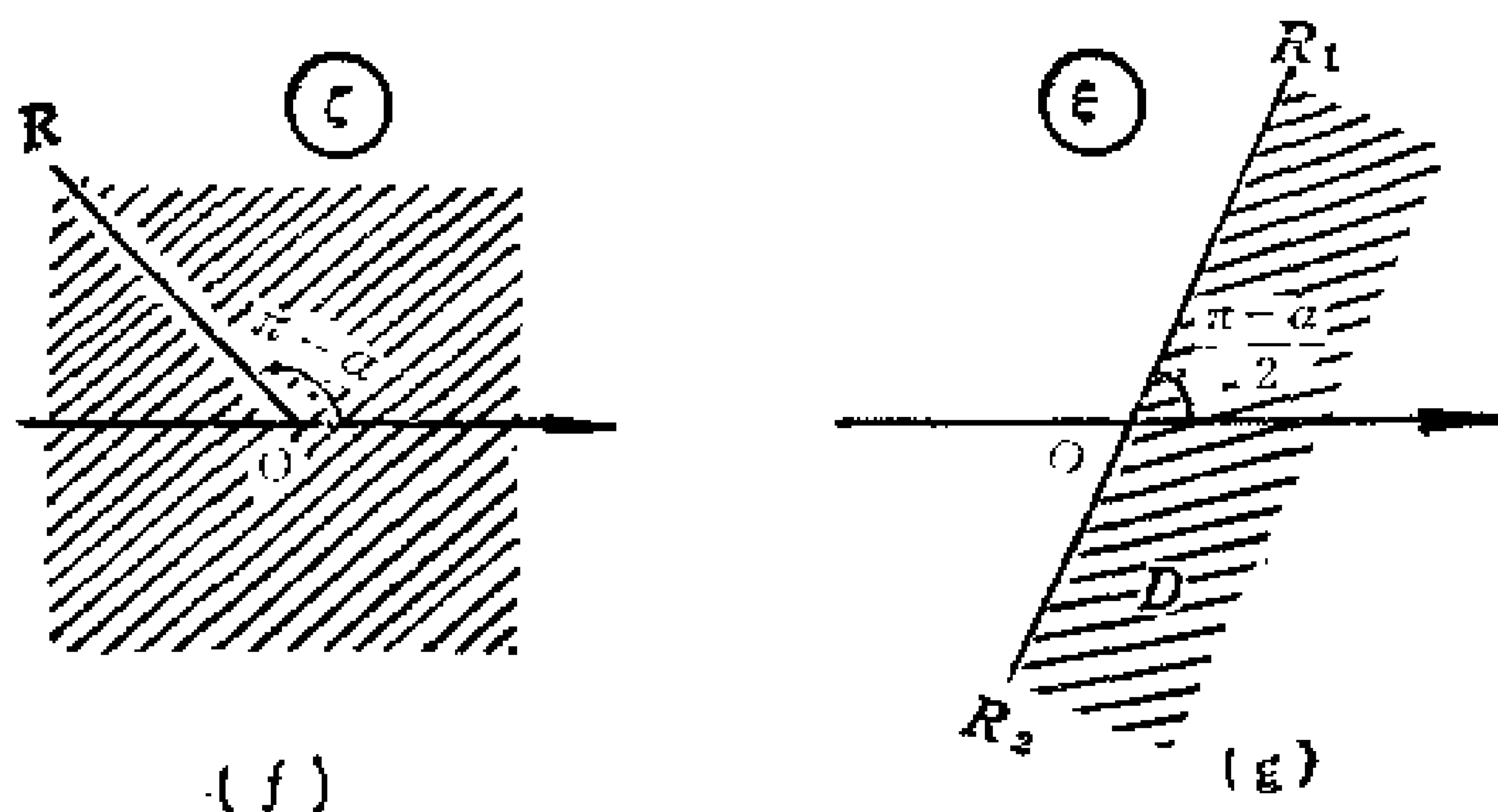


图6·16（三）

为使右半平面D变成去掉$\overline{OR}$的S_ζ平面，只需用函数

$$\zeta=\xi^2 \tag{3}$$

即可．它把角$\frac{\pi-\alpha}{2}$变成$\pi-\alpha$，把$R_2(\infty)$与$R_1(\infty)\in S_\xi$变成一点$R(\infty)\in S_\zeta$．即把$\overline{R_1R_2}$变成$\overline{OR}$；把D变成去掉$\overline{OR}$的S_ζ．这个平面与用$\zeta=z-a/z+a$把去掉弧l的S_z平面所变成的去掉$\overline{OR}$的平面一样．因此，把（1）式与（2）式都代入（3）式，则函数

$$\left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2=\frac{z-a}{z+a}$$

或

$$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{a^2}{w}\right),\ w=z+\sqrt{z^2-a^2} \tag{4}$$

即为所求的映射．它把具有截口l的S_z平面映射成$\mathrm{ext}(C)\subset S_w$平面．

最后，在 S_w 平面上作圆周 C'，使与 C 在 a 点相切．使 $C\subset\text{int}(C')$．因（4）式便把 ext(C) 映射成去掉弧 $\widehat{l}$ 的 S_z 平面．自然也把圆周 C' 变成过 B 点的闭曲线．这个曲线就是机翼断面曲线（或轮廓线），它可以由（4）以描点法绘出．它在 $B(a)$ 处有尖点，在尖点处的切线与 l 在 $B(a)$ 处的切线重合．（如图 6.17）．这种闭曲线亦称 **Жуковский** 截线，它依赖于 a 与 h，也依赖于距离 $d(h_i, m)$，m 为 C' 的中心．

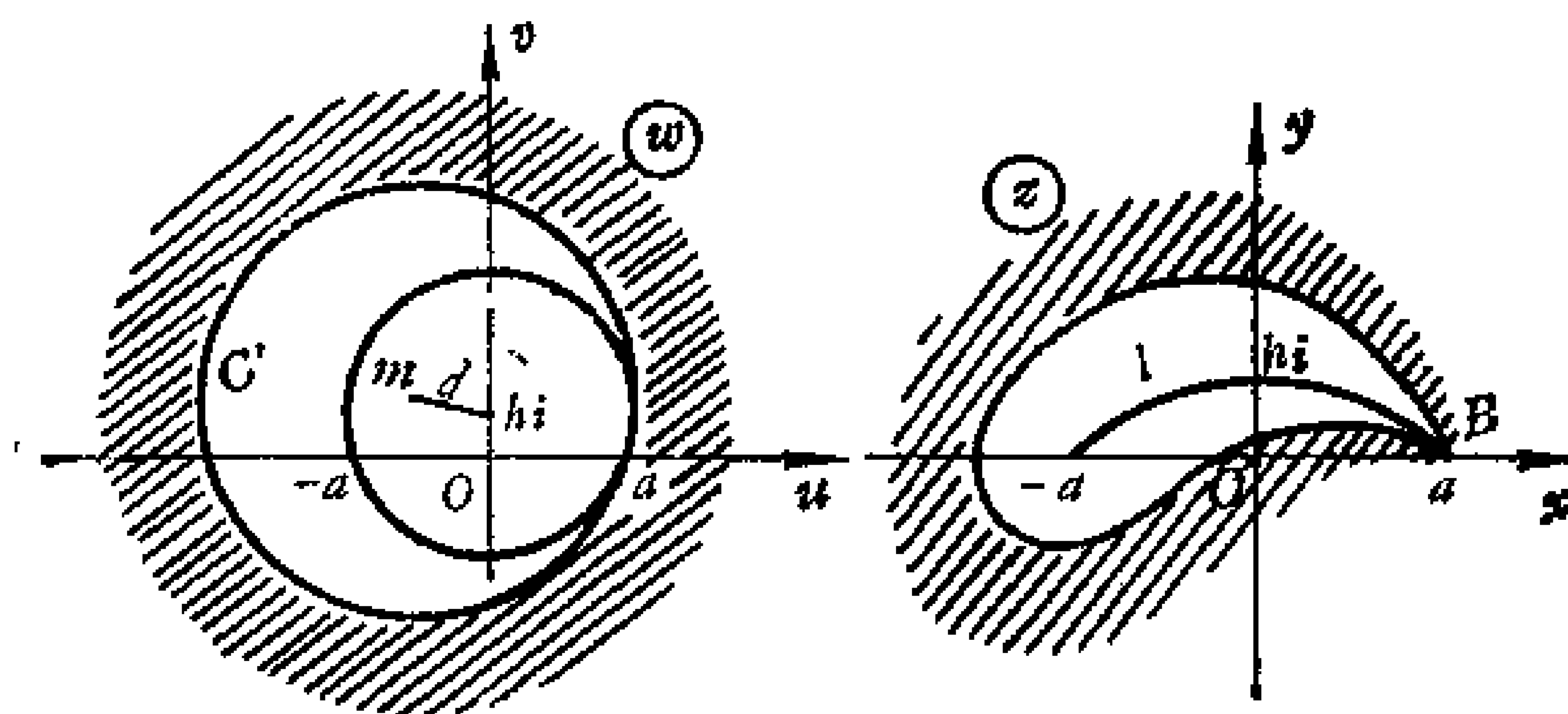


图6·17

习　题（6·2）

1．幂函数 $w=z^n$（$z\neq0$），具有将角度扩大 n 倍的性质，为什么它对于以 $z=0$ 为顶点，张角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的角域构成共形映射？

2．问函数 $w=z^4$ 将扇形区域 $G=\{z:(|z|<2)\cap(0<\arg z<\frac{\pi}{4})\}$ 映射成怎样的区域？是否构成共形映射？

3．函数 $w=z^6$ 能否将扇形区域 $G=\{z:(|z|<1)\cap(0<\arg z<\frac{\pi}{3})\}$ 映射成单位圆域：$|w|<1$？为什么？

4．根式函数 $w=\sqrt{z}$ 的一个单值枝，能否将单位圆域 G：$|z|<1$ 映射成半个单位圆域 $D=\{w:(|w|<1)\cap(\mathrm{Im}w>0)\}$（或区域 $D=\{w:(|w|<1)\cap(\mathrm{Im}w<0)\}$）？为什么？

5．下列函数：① z^n；② e^z；③ $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 把下面曲线族：

1）半射线族：$\arg z=\theta$。

2）圆周族：$|z|=r$。

映射成怎样的曲线族？

6．通过函数 $w=e^z$ 说明：

1）直角网：$\mathrm{Re}z=C_1$，$\mathrm{Im}z=C_2$；

2）直线：$y=Kx+b$；

3）带形区域 $G=\{z:\alpha<\mathrm{Im}z<\beta,0\leqslant\alpha<\beta\leqslant2\pi\}$；

4）半带形区域 $G=\{z:(\mathrm{Re}z>0)\cap(0<\mathrm{Im}z<\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant2\pi)\}$，

映射成什么？

7．函数 $w=\log z$ 将下列集合

1）圆周：$|z|=R_0$；

2）射线：$\arg z=\theta_0$；

3）角域：$G=\{z:0<\arg z<\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant2\pi\}$；

4）扇形区域：$G=\{z:(|z|<1)\cap(0<\arg z<\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant2\pi)\}$。

映射成什么？

8．函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将上半平面映射成什么样的区域？

9．函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将

1）圆域 $G=\{z:|z|<R<1\}$；

2）圆周的外部区域 $G=\{z:|z|>R>1\}$；

3）下半单位圆域内部：$G=\{z:(|z|<1)\cap(\mathrm{Im}z<0)\}$。

映射成什么？

10．试求函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将圆域 $|z|<1$ 按线段 $[a,1]$（$-1<a<1$）剪开的区域 $G=\{z:(|z|<1\sim[a,1],\ -1<a<1\}$ 映射成什么样的区域？并讨论其特殊情况： $a>0$ 及 $a<0$。

§6·7 共形映射问题举例

当我们已经分别研究了分式线性映射及其他初等函数所作的映射之后，现在来运用这些函数的映射性质去讨论共形映射的两类基本问题（见§6·3—1）．在共形映射的第二类问题中，常常是这样：把所给区域 $G\subset S_z$ 与 $D\subset S_w$ 通过某个简单的函数一步就可以完成映射工作的这种情况较少．往往是这样：把所给的区域 G 与 D 分别映射成某个典型区域（比如，上半平面或单位圆域内等）上去．因此，在通常情况下，所求得的函数多数情形都是复合函数．

在共形映射的两类基本问题中，比较困难的是第二类问题．即：已知区域 G 与 D，求共形地实现由 G 到 D 的映射 $w=f(z)$．这是因为第二类问题要求对基本的初等函数的映射性质有熟练地掌握与运用能力．故第二类问题也依赖于第一类问题．显然第一类问题必须首先熟练地掌握才能得心应手地去解决第二类问题．为弄清这些问题，通过下面的具体例子去逐步领会共形映射的基本手法．

【例 1】问函数 $w=\cos z$ 将区域 G：$0<\mathrm{Re}z<\pi$，$\mathrm{Im}z>0$ 共形地映射成什么样的区域？

【解】我们将 $\cos z$ 分解成基本的初等函数或前边已学过的函数的组合．

由于

$$w=\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+\frac{1}{e^{iz}}\right)$$

令 $z_1=iz$；$\zeta=e^{z_1}$；则 $w=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$．

上述三个映射，依次地将区域G映射成区域：

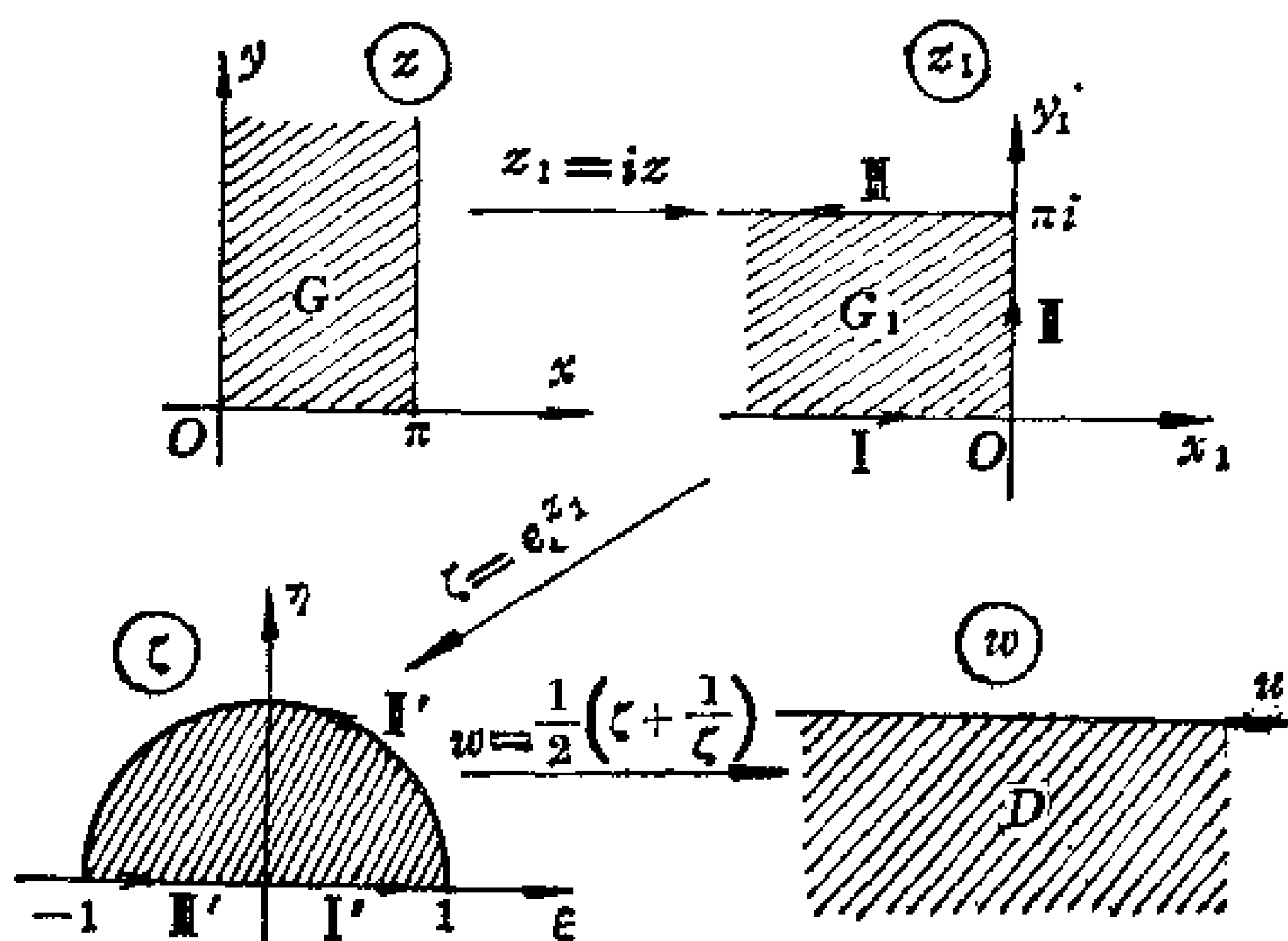


图6·18

事实上，函数 $z_1=iz$ 是对 S_z 平面区域G的旋转（逆时针方向转90°）．因而经 $z_1=iz$ 的映射后，G被映射成 S_{z_1} 平面上平行于实轴，宽度为π的左半带域 G_1；而 $\zeta=e^{z_1}$ 依指数函数的映射性质分别将 G_1 的边界：Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 映射成 S_ζ 平面的Ⅰ'、Ⅱ'、Ⅲ'（如图6·18所示）．因而由边界对应定理（关于无界区域的边界对应定理也成立．读者可参看马库雪维奇著《解析函数论》第五章有关内容）可知，G_1 被映射成 Ω；再由函数 $w=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$的映射性质可知，区域$\Omega$被映射成区域$D$．

为什么映射是共形的？因为上述映射的每一步都是在各自的

单叶性区域上进行的.

事实上，$z_1=iz$ 在 S_z 平面上单叶解析，$\zeta=e^{z_1}$的单叶性区域是平行于实轴，宽为 2π 的带域. 当然，带域 G_1 是其单叶性区域；由 $w=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$的映射性质可知，单位圆域 $|\zeta|<1$是它的单叶性区域，因而，区域 Ω 是其单叶性区域. 综上所述，$w=\cos z$被分解成的函数 $z_1=iz$，$\zeta=e^{z_1}$，$w=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$分别在区域$G$，$G_1$，$\Omega$ 内单叶解析，所以函数 $w=\cos z$ 在区域G内为单叶解析. 从而它将G共形地映射成D.

【例 2】 试求上半单位圆周内到上半平面的映射.

【解】 从上半单位圆周内到上半平面的映射方法很多. 比如，从上半单位圆周内部用函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$及旋转变换之组合即可. 但我们这里使用另一种方法.

首先函数

$$z_1=\frac{1+z}{1-z}$$

将上半单位圆周内部映射成第一象限. 由于线段$[-1,1]$ 被映射成$[0,+\infty)$；上半单位圆周被映射成上半虚轴，边界对应的方向如(图6·19) 所示. 由第一象限到上半平面只须使用幂函数即可完成. 各步映射图示如下（图6·19）：

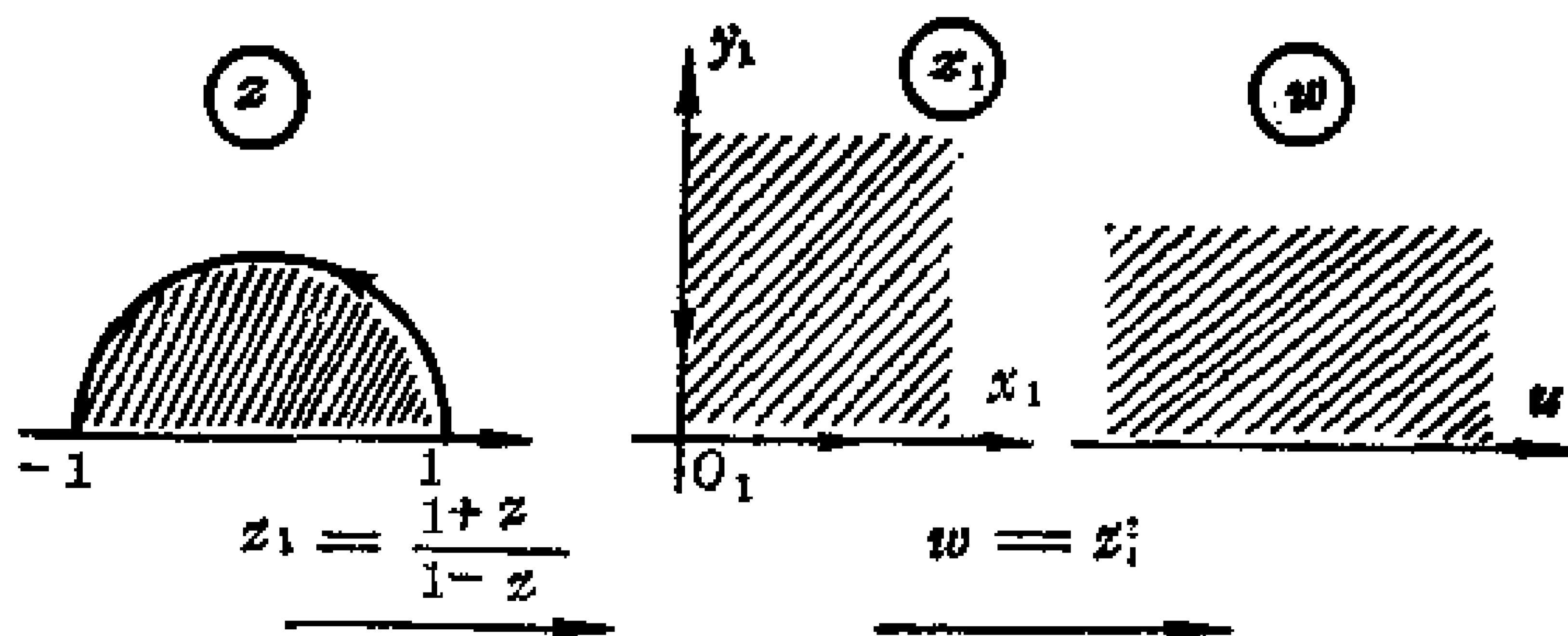


图6·19

将上述两步组合起来用 z 表示 w 时，便有

$$w = z_1^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2.$$

【例 3】 试求把区域 $G=\{z:(|z|<1,)\cap\left(\left|z-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}\right)\}$ 映射成单位圆周内部的函数。

【解】 由例 2 可以看出分式线性函数 $w=\frac{z+1}{z-1}$ 能够把通过点 1 及 -1 的圆弧或线段映射成为无限直线，如果我们能将所给区域 G 的边界（两个相内切的圆周）变成无限直线（由映射的共形性，这两条直线必然平行）．因此，所给区域 G 被映射成带形区域．如果使用指数函数，便可使带形区域映射成上半平面．然后通过分式线性映射可将上半平面映射成单位圆周内部．各步映射图示如下（图 6·20）

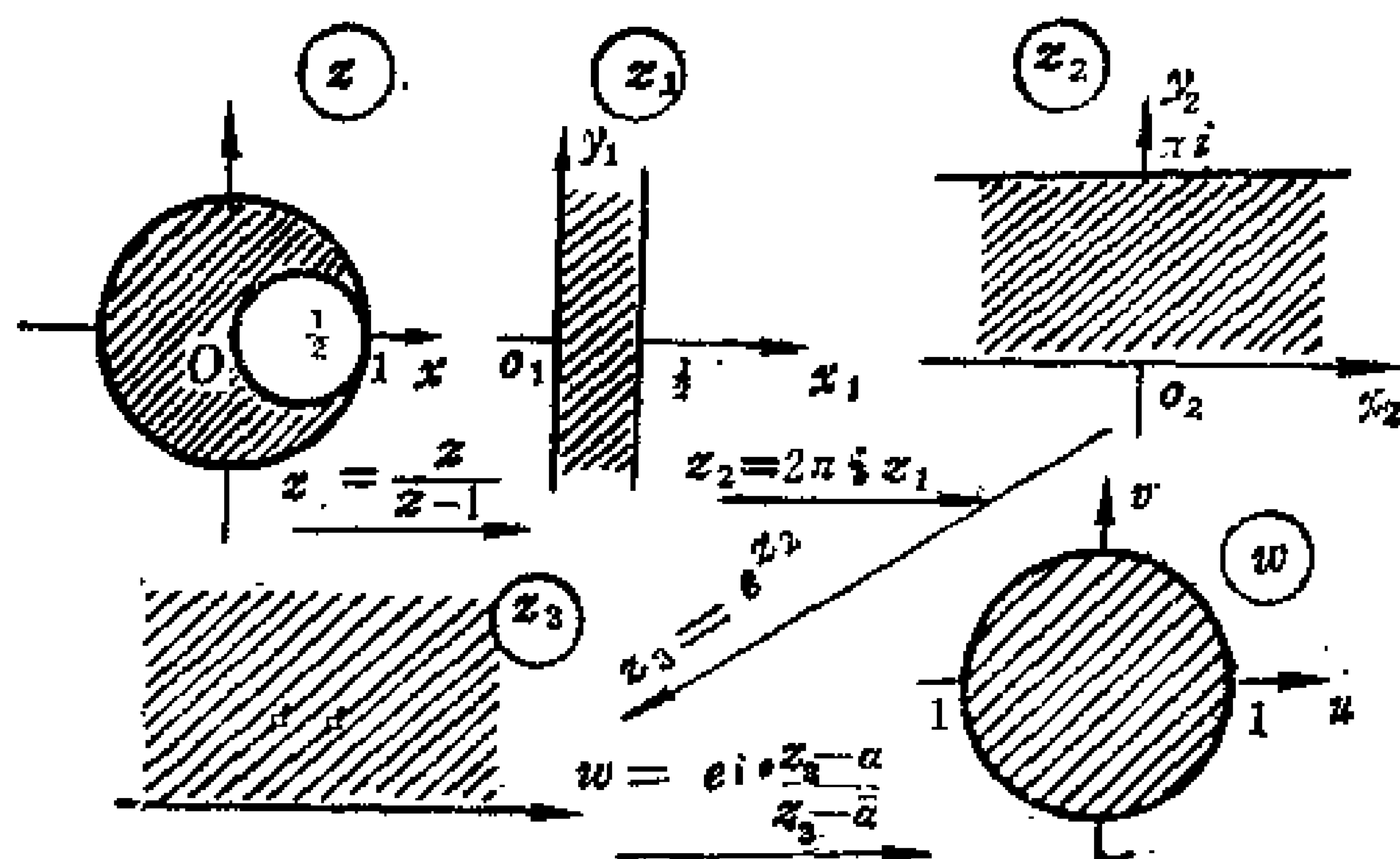


图6·20

上述各步映射组合起来用 z 表示 w 时，则有

$$w=\frac{e^{\frac{2\pi i z}{z-1}}-i}{e^{\frac{2\pi i z}{z-1}}+i}\text{（其中取 }\theta=0°,\ \alpha=i\text{）.}$$

【例 4】 试求上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 到圆域 $|w-w_0|<R$ 内的线性映射 $w=f(z)$，且使 $f(i)=w_0$，$f'(i)>0$.

【解】 这只须将上半平面映射成 S_ζ 平面的单位圆周的内部，然后再将圆域：$|w-w_0|<R$ 映射成 S_ζ 平面单位圆周内部，最后将 S_z 平面的上半部分与 S_w 平面圆域 $|w-w_0|<R$ 的映射间联系起来即可。现将各步映射图示如下（图6·21）：

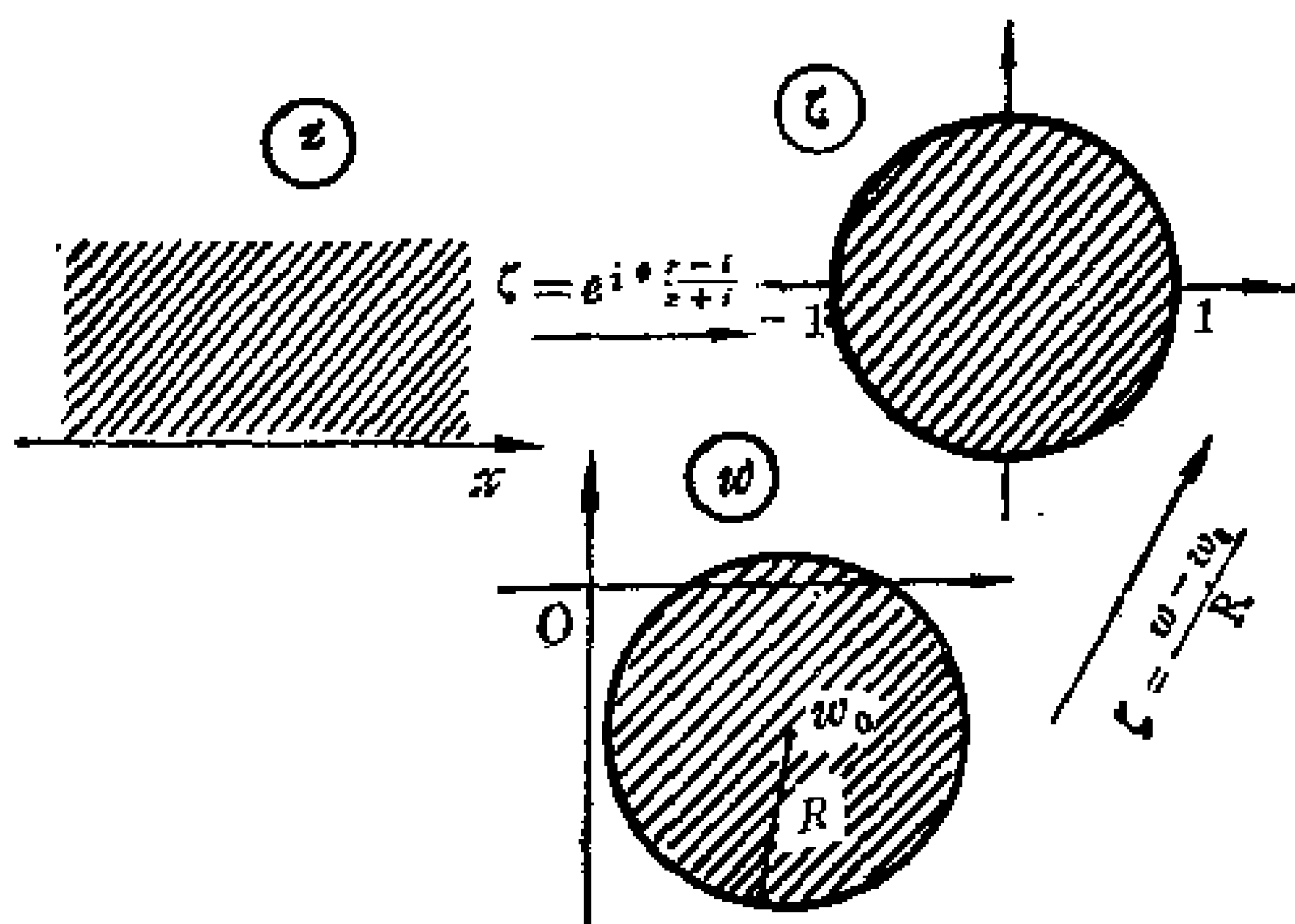


图6·21

上述各步映射组合起来并用 z 表示时便得

$$\frac{w-w_0}{R}=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}.$$

它将上半平面共形地映射成圆域：$|w-w_0|<R$，点 i 映射成 w_0.
现在由条件 $f'(i)>0$（即 $w'(i)>0$）来确定实数 θ. 因为

$$w'(i)=e^{i\theta}\frac{1}{2i}=\frac{1}{2i}(\cos\theta+i\sin\theta).$$

要想使 $w'(i)>0$，即 $w'(i)$为正实数，只有

$$\cos\theta=0$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$， $\sin\theta=1$；

于是

$$e^{i\theta}=i$$

因而所求映射为

$$w=Ri\frac{z-i}{z+i}+w_0.$$

习 题 (6·3)

1．试求将上半单位圆域 $G=\{z:(|z|<1)\cap(\mathrm{Im}z>0)\}$ 映射成右半平面的函数。

2．试求从 S_z 上面去掉线段$[-i, i]$的区域到 S_w 的上半平面的映射。

3．试求 S_z 的右半平面：$\mathrm{Re}z>0$ 映射成 S_w 的单位圆周外部的分式线性映射的一般形式。

4．设G是以单位圆周C及与此相切于点 $z=i$ 的直线 l 为边界的区域。试求将G映射成上半平面的函数。

5．试求将半带域 $G=\{z:(\mathrm{Im}z>0)\cap(-1<\mathrm{Re}z<0)\}$ 映射成区域 $D:\mathrm{Im}w>0$的函数。

6．试求函数 $w=z(1-z)^{-2}$将单位圆域 $|z|<1$映射成什么样的区域？

7．求将不相交的两偏心圆周 $K_1: |z-z_1|=r_1$，$K_2: |z-z_2|=r_2$ 共形地映射成两个以 $w=0$ 为同心的圆 K_1' 与 K_2' 的分式线性映射。这个映射是否唯一？ z平面的哪一点对应于 $w=0$？

8．试求将带域$\{G: -\frac{\pi}{4}<\mathrm{Re}z<\frac{\pi}{4}\}$，共形地映射成单位圆域 $|w|<1$ 的映射，并使三对边界点互相对应：$f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\pm1, f(i\infty)$

$=i$。

9．求出圆域：$|z|<2$ 到半平面 $\operatorname{Re}w>0$ 的共形映射 $w=f(z)$，使合于条件

$$f(0)=1,\ \arg f'(0)=\frac{\pi}{2}.$$

10．设G为上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 除去半闭圆域 $|z|\leqslant 1$ 及射线 $y\geqslant 2$，$x=0$ 的区域．求G到上半平面的共形映射．

11．设 $w=f(z)$在 $|z|<1$内解析，且 $|f(z)|\leqslant 1$，$w_0=f(z_0)$，则当 $|z|<1$ 时，有

$$\left|\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|$$

等号成立仅限于

$$\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

的情形．

12．试证：将单位圆域 $|z|<1$ 映射到单位圆域 $|w|<1$ 的分式线性映射中有

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2}=\frac{|dw|}{1-|w|^2}\quad\text{(poincare 微分不变式)}$$

13．试证明：若用分式线性映射将 S_z 平面上由两个圆周 $|z|=R$，$|z-a|=r$（a 在正实轴上，且$a<R$及$a<R-r$）所围成的区域G，共形地映射成 S_w 平面上由两个圆周 $|w|=\rho_1$，$|w|=\rho_2$（$\rho_1>\rho_2$）所围成的区域D时，则

$$\frac{R}{r}\geqslant\frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

等号什么时候成立？

14．试求把去掉一段半径的单位圆域内部（如指导图6·29）映射到单位圆域内部的函数．

15．试求将椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的外部映射成单位圆周外部的函

数.

学 习 指 导

共形映射是复变函数几何理论的重要组成部分．它是用几何的方法去研究解析函数的性质．正如前面几章分别用微分、积分与级数的方法研究了解析函数的性质一样，这一章是用共形映射的理论去进一步揭示解析函数的几何性质．

以前说过，复变函数可以看作是两个复平面间的对应或映射．而解析函数构成的映射，在导数不为零处是共形的．共形映射所研究的问题（从实际应用的角度来看）主要是处理如下两类问题：

第一类：已知区域G及解析函数$f(z)$，求区域G在$f(z)$映射下的像域$f(G)=D$是什么？

第二类：已知区域G及区域D，求实现由区域G到区域D的共形映射$f(z)$．

共形映射已经成为复变函数论的一个重要分支．在理论上或实际上都有着重要的应用．本章除了讨论某些基本理论问题外，着重讨论了分式线性函数和某些基本初等函数所作的共形映射．

一、内容与要求

要想掌握共形映射的基本内容，对我们来说，重要的是领会用共形映射理论研究问题的思想方法和思考问题的途径．

本章的主要内容是着重讨论共形映射的理论和它在实际应用中的某些问题．

§6·1～§6·3　主要讨论了共形映射中的一些基本理论问题．

其中，§6·1着重谈了一个概念——共形映射．即具有伸缩率不变性及保持交角不变性的连续映射称为共形映射．§6·2指出了解析

函数具有保域性并且在导数不为零处构成共形映射．§6·2中定理2给出了单叶解析函数的导数不为零，因此我们以后只在解析函数的单叶性区域上讨论映射．§6·3则讨论了共形映射的存在及寻求区域G的像域$f(G)$的理论根据．

§6·4—§6·5介绍了在共形映射中起着重要作用的分式线性映射及其应用．

§6·6给出了作为映射的最起码的工具的六个基本初等函数：幂函数与根式函数；指数函数与对数函数；Жуковский 函数及其反函数等所构成的共形映射．

§6·7则是运用前六节的知识去解决共形映射某些具体问题．

上边概略地介绍了各节内容及其相互间的关系．下面再进一步地从共形映射的研究对象这个角度讨论一下各部分内容间的关系，以及应当掌握的知识．

共形映射的研究对象如前所述，主要是围绕两类问题进行讨论．

首先，第一类问题：已知区域G，求区域G的像域．

为了能找到$f(G)$，§6·3给出了边界对应定理：

设两条简单闭曲线C及Γ的内部分别是单连通区域G及D．如果函数$w=f(z)$在一个$G\cup C$的区域上解析；并将C双方单值地映射成Γ，则$w=f(z)$在G内为单叶解析函数，且该函数$w=f(z)$将G共形地映射成D．

边界对应定理除了给出判断函数$w=f(z)$为单叶的充分条件外，还给出了寻求区域G的像域$f(G)=D$的原则．这就使得我们在研究第一类问题时有路可循、方向明确．

第二类问题：已知S_z平面的区域G，及S_w平面的区域D，我们的任务是寻找一个将G共形地映射成D的解析函数$f(z)$．

简单地说，已知G和D，求$f(z)$．

这类问题是共形映射的主要问题，也是比第一类问题稍难些的问题．

显然，第二类问题首先遇到的是：如果给定了两个区域，是否存在这样一个解析函数 $f(z)$，使区域 G 共形地映射成区域 $D=f(G)$？区域 G 与 D 需不需要有什么条件的限制？如果存在这样一个解析函数 $w=f(z)$，它是否唯一？这些问题均由§6·3的定理1（Riemann存在定理）给出了回答。

设 S_z 平面上单连通区域 G（不含无穷远点）的边界至少有两个点，则在 G 内存在唯一的单叶解析函数 $w=f(z)$，将 G 共形地映射成 S_w 上的一单位圆域 $|w|<1$ 内，只要函数 $w=f(z)$ 满足条件：

$f(z_0)=0$，$z_0\in G$；$\arg f'(z_0)=\varphi_0$，$0\leqslant\varphi<2\pi$。

其中 φ_0 为一常数。

这个定理告诉我们：如果所给区域 G 及 D 是单连通的，其边界不止一点，则一定存在一个共形映射 $w=f(z)$，使 $D=f(G)$，但不一定是唯一的。如果再加上条件：

$$f(z_0)=0,\ \arg z f'(z_0)=\varphi,$$

时，$f(z)$ 的存在便是唯一的了。

这些定理从理论上解决了共形映射的两类基本问题。具体问题的处理还要依赖于对初等函数的映射性质的了解与运用，其中分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\cdot(ad-bc\neq 0)$$

在映射过程中起着重要作用。这是因为它有一般函数所不具备的独特的两个性质：

① **保圆性** 如果将直线视为通过无穷远点的圆周，则经分式线性函数 $w=az+b/cz+d$ 映射后，圆周（广义的）仍变成圆周。

② **对称点的不变性** 如果 S_z 上有一个以 z_0 为心，R 为半径的圆周 C，且当点 z_1 与 z_2 位于 z_0 出发的同一条射线的同一侧，且满足

$$|z_1-z_0|\ |z_2-z_0|=R^2$$

时，称 z_1 与 z_2 关于圆周 C 是对称的，或 z_1 与 z_2 是圆周 C 的对

称点．这样的点 z_1, z_2 及圆周 C 经分式线性函数映射后，其像如果设为 w_1, w_2 及 Γ，则 w_1、w_2 关于圆周 Γ 也是对称的。

我们正是根据分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

有这样的性质，才推导出几个重要映射的例子．它们是：

① **上半平面到单位圆域 $|w|<1$ 的映射**

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}\quad a\in \mathrm{Im}z>0$$

② **单位圆域 $|z|<1$ 到单位圆域 $|w|<1$ 的映射**

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\ (|a|<1)$$

③ **上半平面到上半平面的映射**

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

其中要求 a, b, c, d 都是实数，且 $ad-bc>0$。

上述三个重要例子都是以圆周为其边界的．因此，在圆域的映射中，经常使用这三个例子．

读者在学习本章时，除去首先明确共形映射的两类问题及单叶解析函数构成共形映射等理论问题外，一定要对分式线性函数上述性质有比较深透地了解．与此同时，还要求对几个基本的初等函数：

① 幂函数：$w=z^n$（n为正整数）；

② 根式函数：$w=\sqrt[n]{z}$，($z\neq 0$，单值枝）；

③ 指数函数：$w=e^z$；

④ 对数函数：$w=\log z$（单值枝）；

⑤ Жуковский 函数：$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$；

掌握：

i）特殊曲线：例如实轴、虚轴以及平行于它们的直线等曲线经过上述函数映射后，其像曲线是什么？

ii）特殊区域：例如上述函数的单叶性区域的像域是什么？

幂函数的单叶性区域G：$K\frac{2\pi}{n}<\arg z<\frac{2\pi}{n}(K+1)$ 经 $w=z^n$ 映射后，像域是全平面除去正实轴的角域 D：$0<\arg w<2\pi$ $(K=0,1,2,\cdots,n-1)$

指数函数 $w=e^z$ 的单叶性区域是 G：

$-\infty<\mathrm{Re}z<\infty$，$2K\pi<\mathrm{Im}z<2\pi(K+1)$，

即平行于实轴、宽度为2π的带形区域。在 e^z 的映射下，它们的像域是 S_w 上但除去正实轴的角域

D：$0<\arg w<2\pi$

Жуковский 函数：$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$的单叶性区域是 G_1：$|z|<1$；G_2：$|z|>1$；G_3：$\mathrm{Im}z>0$等，它们的像域是

D_1：S_w 上的除去线段$[-1,1]$的区域；

D_2：同上；

D_3：S_w 上的除去直线：$(-\infty,-1]$，$[1,\infty)$ 的区域。

有了对上述分式线性函数和基本的初等函数映射性质的了解，我们就可以讨论一些比较简单的映射问题了。这好比有了米、菜、便可以烧制出丰盛的佳餐一样。当然，这需要有比较熟练的技术才可以。而这一点则需要我们通过一定数量的练习才能达到。

二、例　　题

共形映射中最常见的典型区域是上半平面。（但不是绝对不变的，有时是单位圆域$|z|<1$ 或某些区域）。许多共形映射都是通过上半平面这块“跳板”映射到所求区域上去的。为此，在解答例题之前，先把本章一些与单位圆域及上半平面有关的映射写在下面：

① 角域到上半平面的映射用 $w=z^{\lambda}$；

② 带域（宽为 π 且平行于实轴）到上半平面的映射用 $w=e^z$；

③ 半单位圆内部或外部到上半平面的映射用 $w=\mp\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

④ 上半平面到上半平面的映射为 $w=\frac{az+b}{cz+d}$，（a，b，c，d 皆为实数且 $ad-bc>0$）；

⑤ 单位圆域 $|z|<1$ 到上半平面的映射为 $w=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ 的反函数；

⑥ 二角形区域（两圆弧所夹区域）到上半平面的映射为 $w=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}$，（$a,b$ 为二圆弧的交点）。

我们仍按共形映射的两类问题选解一些例题。

首先，看第一类问题。

显然，第一类问题的目的是求出区域 D 的形状、依边界对应定理，只须将 S_z 的区域 G 的边界 C 的像 Γ 求出即可；然后再由绕行方向确定闭曲线 Γ 所围成的区域的哪一部分是区域 G 的像 D。由此可知，第一类问题的关键是求曲线 C 在函数 $w=f(z)$ 的映射下的像 Γ。综上所述，可以把第一类问题归结为下面的三句话：

给了区域找边界，

根据函数求其像，

边界绕行定区域。

我们通过如下几个例子来逐步领会第一类问题的基本思想和方法。

【例1】 已知 S_z 平面区域 $G_1=\{z:(0<\mathrm{Im}z<\pi)\cap(\mathrm{Re}z<0)\}$，在函数 $w=e^z$ 映射下的像域 D_1 是什么？

【解】 首先写出 $w=e^z$ 的映射关系式

设 $w=\rho e^{i\varphi}$，$z=x+iy$，由 $w=e^z$ 有

$$\rho e^{i\varphi} = e^{x+iy}$$

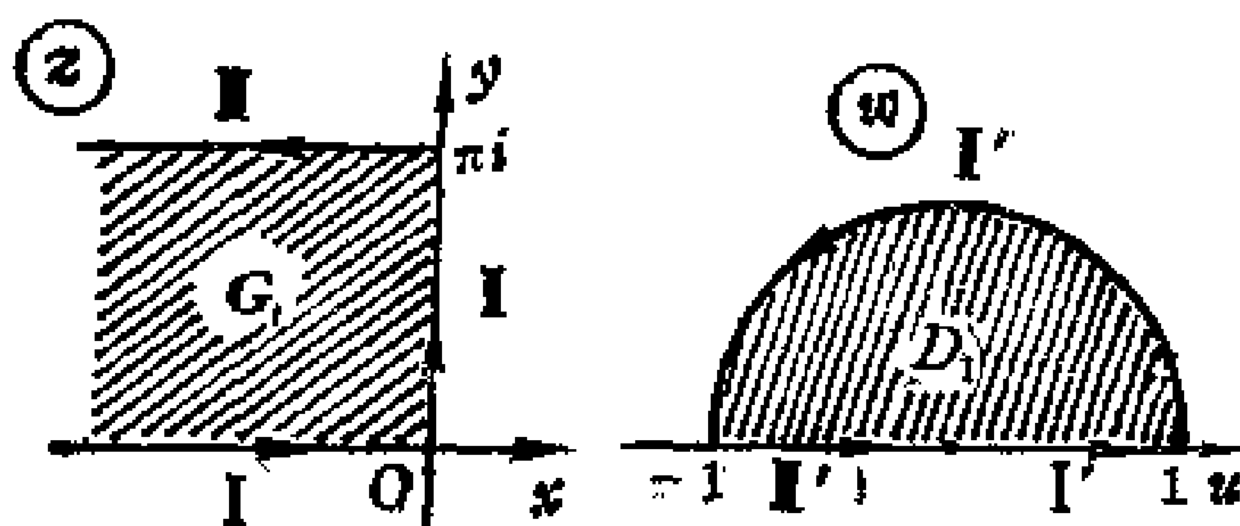
所以有

$$\rho = e^x,\ \varphi = y + 2k\pi \tag{1}$$

$$k = 0,\ \pm 1, 2, \cdots$$

先看区域 G_1:

用 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ表示区域 G_1 的边界，其像分别用 Ⅰ′、Ⅱ′、Ⅲ′表示（如**指导图6·1**），像曲线的求法如次：



指导图6·1

$Ⅰ = \{z: (-\infty < x \leqslant 0) \cap (y = 0)\}$，由关系式（1）其像

$$Ⅰ' = \{w: (0 < \rho \leqslant 1) \cap (\varphi = 0)\};$$

$Ⅱ = \{z: (x = 0) \cap (0 \leqslant y \leqslant \pi)\}$，由关系式（1）其像

$$Ⅱ' = \{w: (\rho = 1) \cap (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)\};$$

$Ⅲ = \{z: (-\infty < x \leqslant 0) \cap (y = \pi)\}$ 由关系式（1）其像

$$Ⅲ' = \{w: (0 < \rho \leqslant 1) \cap (\varphi = \pi)\}.$$

最后来确定区域D_1。由于 G_1 是在沿边界 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 绕行方向的左侧，所以对应地在 S_w 上的沿 Ⅰ′、Ⅱ′、Ⅲ′ 绕行方向的左侧部分便是区域G_1的像域 D_1（如指导图6·1）

【例 2】 求函数 $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$将区域：

$$G_1 = \{z: (\mathrm{Im}z > 0) \cap (|z| < 1)\}$$

映射成怎样的区域？

【解】 为了求得区域 G_1 的边界的像，写出它的映射关系式。

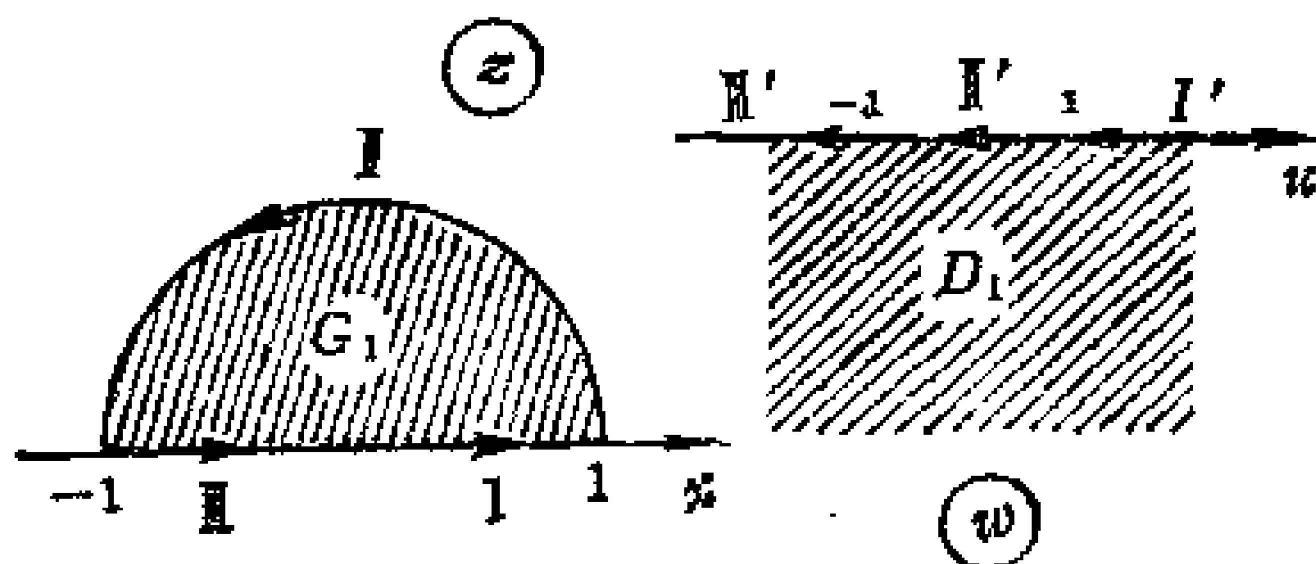
设 $w=u+iv$，$z=re^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$。于是由 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 可得如下关系式

$$u=\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)\cos\theta,$$

$$v=\frac{1}{2}\left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right)\sin\theta, \qquad (2)$$

首先画出 G_1（如指导图6·2）。

边界曲线的映射如下：



指导图6·2

$Ⅰ=\{z:(0\leqslant r\leqslant1)\cap(\theta=0)\}$。由关系式（2），其像

$Ⅰ'=\{w:(v=0)\cap(1\leqslant u<\infty)\}$；

$Ⅱ=\{z:(r=1)\cap(0\leqslant\theta\leqslant\pi)\}$。由关系式（2），其像

$Ⅱ'=\{w:(v=0)\cap(-1\leqslant u\leqslant1)\}$；

$Ⅲ=\{z:(0\leqslant r\leqslant1)\cap(\theta=\pi)\}$。由关系式（2），其像

$Ⅲ'=\{w:(v=0)\cap(-\infty<u\leqslant-1)\}$。

现在来确定区域 D_1。当 S_z 上的点 z 沿区域 G_1 的边界Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ绕行时，G_1 在左侧。对应地，w点沿Ⅰ'、Ⅱ'、Ⅲ'绕行方向的左侧就是所求的 D_1，即下半平面（见指导图6·2）。

通过前二例可以看出，共形映射第一类问题是最基本的问题。它主要是利用基本初等函数的映射性质去寻求区域D。这就需要我们对初等函数的映射性质有比较清楚地理解。同时还要熟悉用映射

的关系式，去表示边界曲线的方程．只要具备了这两条，再依据我们在开始所归纳的三句口诀："**给了区域找边界，根据函数求其像，边界绕行定区域**"．第一类问题就会得心应手了．

只有第一类问题作到娴熟准确了，我们才能着手去做第二类问题．因为第一类问题是依所给区域的性状，再根据所给函数$w=f(z)$的映射性质，去寻求区域的像．第二类问题则恰好相反，是依据两个平面（S_z与S_w）上的区域的形状及关系，找出反映这两个区域关系的函数．因此，第二类问题要比第一类问题困难些．牢记已经作过的具有代表性的第一类问题，无疑对解第二类问题是大有好处的．

下面，看第二类问题．

通常情况下，第二类问题中所给的两个区域G与D，不能通过某个简单函数一步就能完成，而往往是将两端的区域向中间映射（通过相应的函数），最后都能映射成某个典型区域（通常是上半平面，有时也是单位圆域$|w|<1$）．我们就以这种典型区域为"**跳板**"（或"**中间**"），将两端（左右）的复平面联系起来．这样便可以找到从区域G到区域D的映射道路，进而求出映射关系$f(z)$．可以把这个思想概括成如下的两句话：

看两端，想中间；

联系起来求函数．

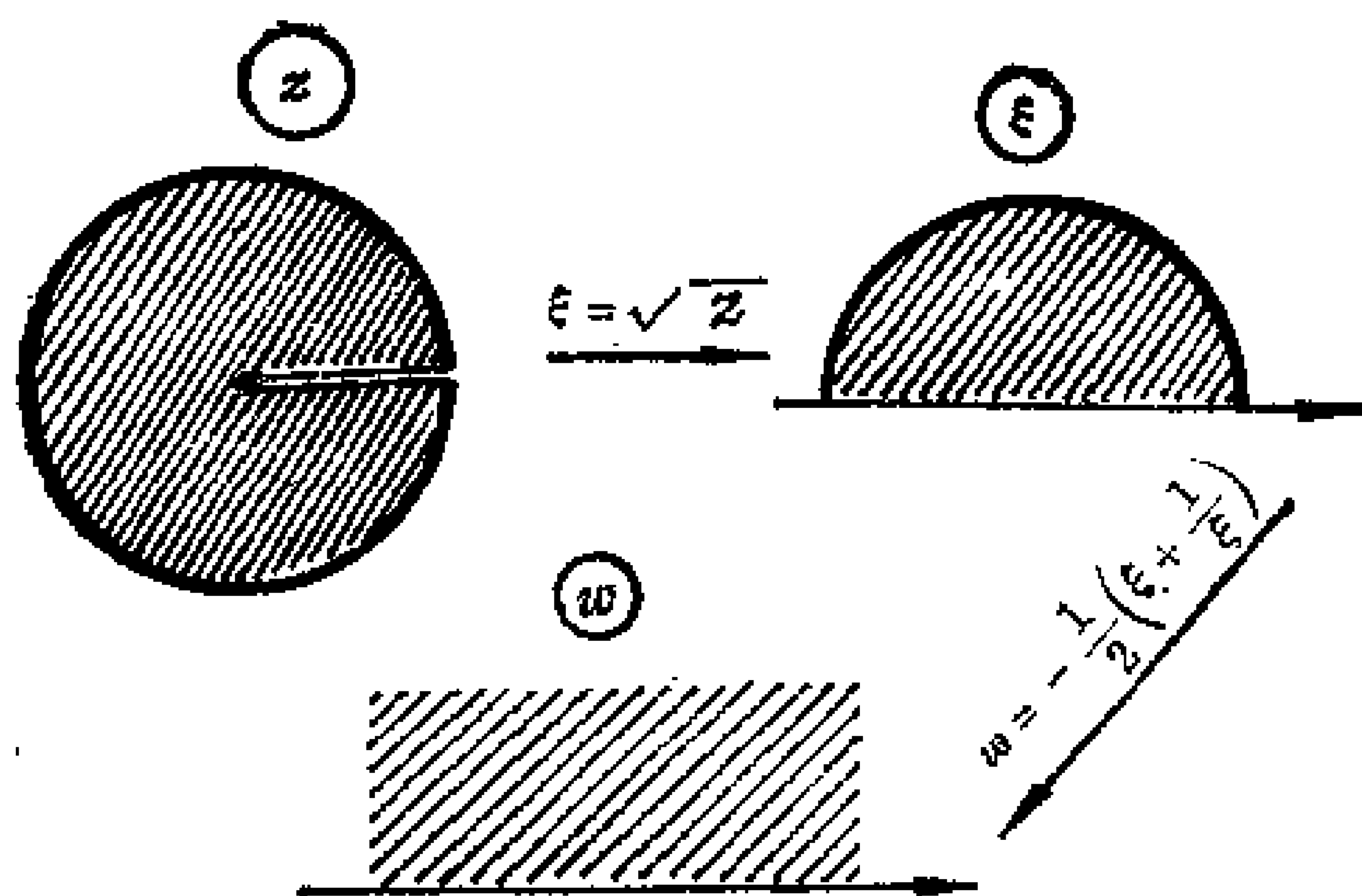
这个"中间"就是前面说的"跳板"，或者说典型区域．

我们通过下面的例子来逐步地领会第二类问题的基本思想和作题的方法．

【例3】试求把从单位圆心起沿正实轴的半径剪开的区域：$\{z: |z|<1\sim[0,1]\}$共形地映射成上半平面的函数．

【解】由于区域G沿正实轴的半径上有截口，可用根式函数$\sqrt{z}$（的主枝）将其"剪开"成上半单位圆域内，然后再使用Жуковский函数．各步映射图示如下：

将各步组合，以z表示w时，



指导图6·3

有 $w=-\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$

其中$\sqrt{z}$取主枝.

注意 ①如果每一步映射是共形的，则各步组合后的函数也一定共形；

② 读者可自行用其他方法作出此题.

在区域的边界是圆周（或直线）的映射问题中，下面两个函数：

上半平面到单位圆域内 $|w|<1$ 的分式线性映射

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}},\ \alpha\in\operatorname{Im}z>0,\ \theta\text{为实数；}$$

单位圆域: $|z|<1$ 到单位圆域: $|w|<1$ 的映射

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},\ \alpha\in|z|<1,\ \theta\text{ 为实数.}$$

起着重要作用. 为了使读者对上述二公式的各量有较深透的理解，仅以 $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$为例说明之。

【例 4】说明单位圆域：$|z|<1$到单位圆域：$|w|<1$的映射

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

的实数 θ 的几何意义。

【解】我们来证明θ 就是函数 $w=f(z)$在点 $z=\alpha$ 处的旋转角 $\arg w'(\alpha)$。

事实上，因为

$$w'=e^{i\theta}\frac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$$

所以， $w'(\alpha)=e^{i\theta}\dfrac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\alpha\bar{\alpha})^2}=\dfrac{e^{i\theta}}{1-\alpha\bar{\alpha}}=\dfrac{e^{i\theta}}{1-|\alpha|^2}$， $|\alpha|<1$。

则

$$\arg w'(\alpha)=\arg e^{i\theta}-\arg(1-|\alpha|^2)=\theta-\arg(1-|\alpha|^2)=\theta.$$

由旋转角定义，θ 即为映射 $w=f(z)$ 在 $z=\alpha$处的旋转角。

同理可以证明上半平面到单位圆域内的分式线性映射 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$中的$\theta$的几何意义（请读者自行证明）。

【例 5】求上半面：$\mathrm{Im}z>0$ 到圆域：$|w|<R$，且使 $f(i)=0$，$f'(i)=1$ 的分式线性映射 $f(z)$，试确定R之值。

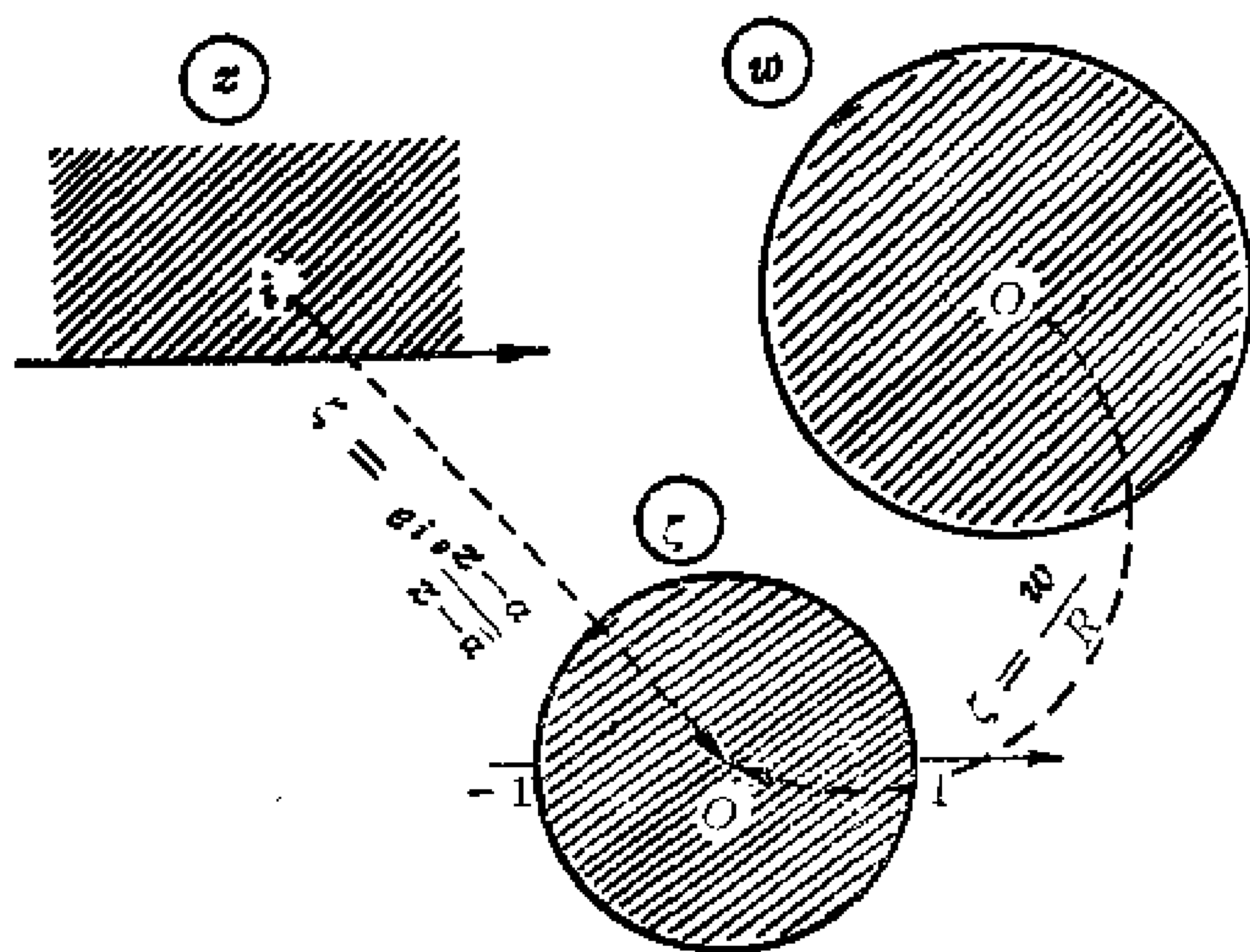
【解】我们已经知道上半平面到单位圆域内部所作的分式线性映射。如果再将 S_w 上的圆域：$|w|<R$ 伸缩成 $|\zeta|<1$，便可找到"中间"，具体过程图示如下

将各步映射组合起来得到

$$w=Re^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}.$$

由条件 $f(i)=0$ 可得 $\alpha=i$ 变成 S_w 上的圆心。由条件 $f'(i)=1$可得

$$w'=Re^{i\theta}\frac{(z-\bar{\alpha})-(z-\alpha)}{(z-\bar{\alpha})^2}$$



指导图6·4

$$= Re^{i\theta}\frac{a-\bar{a}}{(z-\bar{a})^2}$$

于是 $\quad w'(i)=Re^{i\theta}\dfrac{a-\bar{a}}{(i-\bar{a})^2}=1$

即

$$Re^{i\theta}\frac{i+i}{(i+i)^2}=1$$

所以 $\quad Re^{i\theta}=2i.$

$$R=2,\quad \theta=\frac{\pi}{2}.$$

于是所求映射为

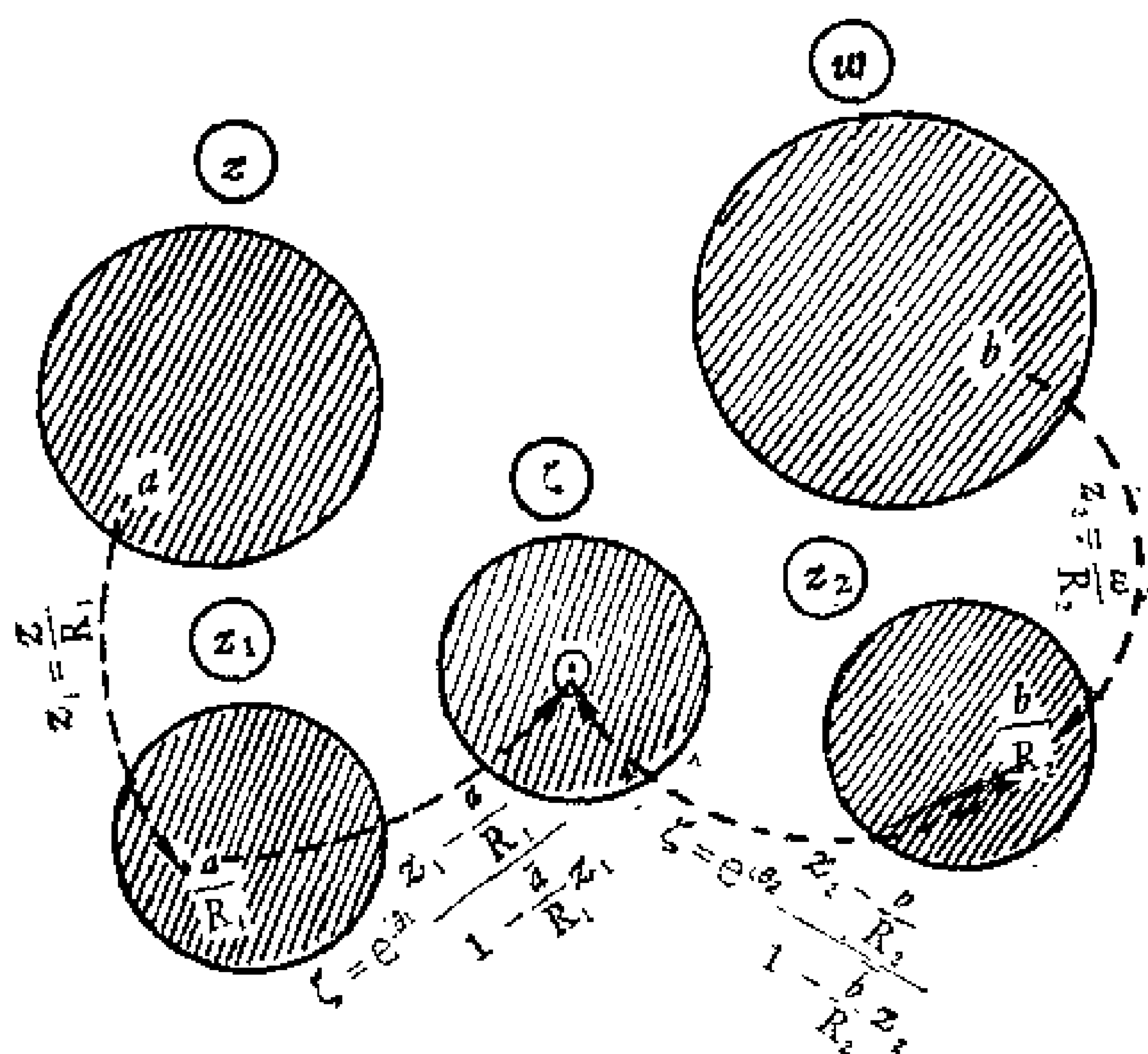
$$w=2i\frac{z-i}{z+i}.$$

上述例子说明了第二类映射问题的"看两端，想中间，联系起来求函数"的基本思想。在大多数情况下这个"中间"是上半平

面。有时也以单位圆域内部作为"中间"。下例则是这种情况。

【例 6】求圆域：$|z|<R_1$到圆域：$|w|<R_2$的分式线性映射，且使 $w(a)=b$，$\arg w'(a)=\theta$，（$|a|<R_1$，$|b|<R_2$）。

【解】因为要求的是分式线性映射，所以可以利用单位圆域内到单位圆域内的分式线性映射。但所给两端都不是单位圆域。因此我们可将两端区域变成单位圆域内部，显然这时就应以单位圆域内部作为"中间"。各步映射图示如下：



指导图6·5

由 S_z 到 S_{z_1}，需用相似变换即 $z_1=\dfrac{z}{R_1}$。这时 S_z 上的点 a 变成 S_{z_1} 上的点$\dfrac{a}{R_1}$。S_{z_1} 上的圆域是单位圆域内部。但为使点 a 变成 b 点，我们可将 S_{z_1} 上的点$\dfrac{a}{R_1}$变成 S_ζ 上的原点 $\zeta=0$，映射是 $\zeta=$

$e^{i\theta_1}\dfrac{z_1-a/R_1}{1-\bar{a}z_1/R_1}$；同理，使 S_w 上的点 b变到 S_{z_2} 上的点 b/R_2，映射为

$z_2=w/R_2$。再将 $z_2=\dfrac{b}{R_2}$点变成 S_ζ 上的原点 $\zeta=0$，函数为

$\zeta=e^{i\theta_2}\left(z_2-\dfrac{b}{R_2}\right)\Big/(1-\bar{b}z_2/R_2)$。显然在 S_ζ 平面上可以使 $\zeta=\zeta$，于是 S_z 与S_w 便建立起如下关系

$$R_1e^{i\theta_1}\ \frac{z-a}{R_1^2-\bar{a}z}=R_2e^{i\theta_2}\frac{w-b}{R_2^2-\bar{b}w}$$

即
$$\frac{w-b}{R_2^2-\bar{b}w}=\frac{R_1}{R_2}e^{i\theta}\frac{z-a}{R_1^2-\bar{a}z}.$$

我们上面选解了6个例题，但因篇幅所限不能面面俱到，只是为了说明概念、理解定理和运用公式以及掌握两类问题的基本作法才选解了上述例题．而有些问题的解法可能是多种多样的，不能用一种解法包办代替．因此，读者只能从所选解的例题中去领会方法，掌握本质，进一步地形成熟练技巧．

我们在选解例题之前，已经将与上半平面有关的区域及所使用的函数列表给出，这件事是很重要的．只要我们尽可能地把一些基本区域与所学的基本初等函数的单叶性区域建立起联系，然后再把这些单叶性区域与上半平面建立起联系，共形映射比较简单的问题的解决也就好办一些了。上半平面这个区域，对于共形映射来说，好比是一块“跳板”或“基地”．只要我们把所给的区域与“跳板”（或“基地”）联系起来，问题就算基本解决．最后再将用“跳板”联系起来的函数表示成 $w=f(z)$的形式，它就是我们在第二类问题中所要求的映射．

三、习题解答

习　题（6·1）

1．【证明】

必要性

因直线通过 $z=\infty$ 点，且直线对应于单位圆周即 $|w|=1$。

将 $z=\infty$代入分式线性函数中有

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}=\frac{a}{c}$$

因 $|w|=\left|\frac{a}{c}\right|=1$，所以

$$|a|=|c|$$

这就是必要条件。

充分性

设 $|a|=|c|$，则分式线性函数

$$w=\frac{a}{c}$$

因而有 $$|w|=1.$$

即在 $|a|=|c|$ 得到满足时，分式线性函数一定将 S_z 的某条直线映射成 S_w 上的单位圆周。

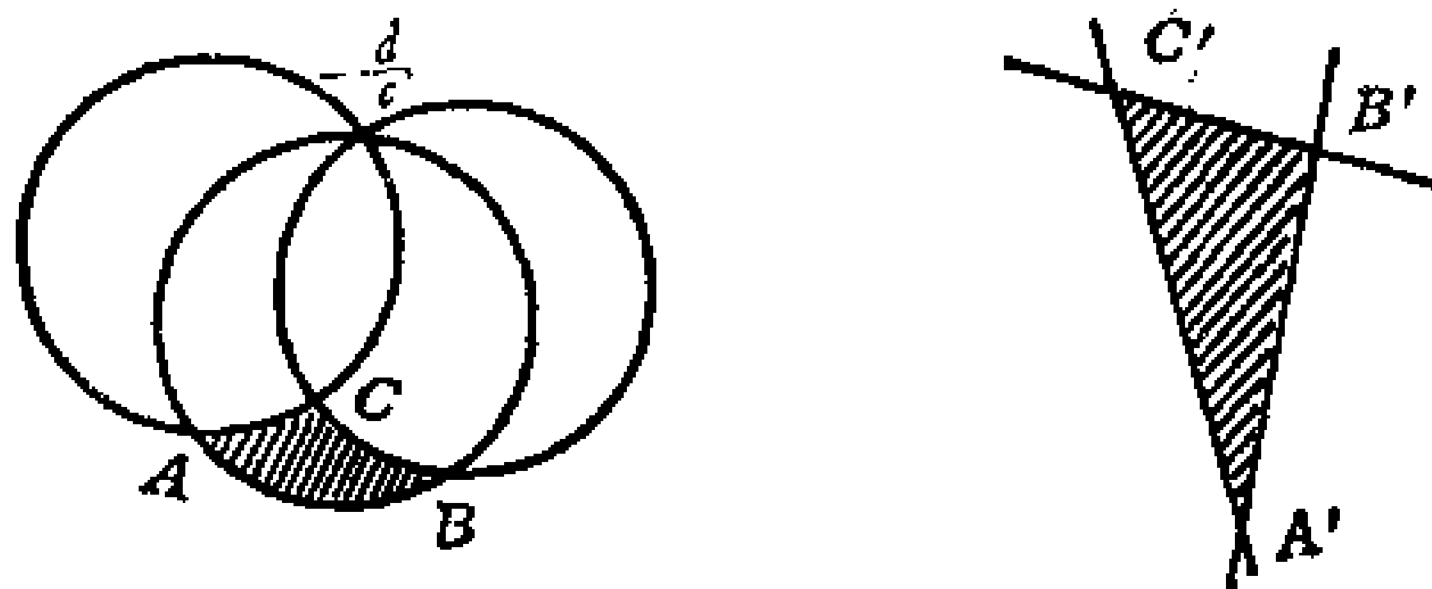
2. 【证明】

必要性

若分式线性映射 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 使 S_z 上的由三圆弧所围成的三角形 ABC 与 S_w 上的直线三角形 $A'B'C'$ 相对应时，必有S_w上的三直线通过 $w=\infty$ 点，即三直线交于 $w=\infty$ 点。因而对应的 S_z 上的三圆弧必交于一点 $z=-\frac{d}{c}$（如指导图6·6所示），这就是必要条件。

充分性

如果当 S_z 上的某三圆弧交于一点 $z=-\frac{d}{c}$时，则三圆周在分式线性函数 $w=\frac{az+b}{cz+d}$映射下，其像必是过 $w=\infty$点的三直线。



指导图6·6

因而曲线三角形 ABC 被映射成直线三角形 $A'B'C'$. 即 S_z 上的某三圆周交于一点 $z=-\frac{d}{c}$ 也是三角形ABC映射成三角形$A'B'C'$ 的充分条件.

3. 【证明】

为使分式线性函数 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 不为常数，应有 $ad-bc\neq0$.

其次，若使 S_z 上的圆周 $|z|=1$变成 S_w 上的直线，必使 S_w 上的圆周通过无穷远点∞. 即直线过无穷远点. 因而在 S_z 上对应点 z 必过点 $-\frac{d}{c}$，且 $|z|=\left|-\frac{d}{c}\right|=1$. 所以

$$ad-bc\neq0,\quad |c|=|d|$$

是系数应满足的条件.

4. 【证明】

显然，要使 $\mathrm{Im}z>0$ 共形地映射成 $\mathrm{Im}w<0$，必然把实轴$\mathrm{Im}z=0$映射成实轴 $\mathrm{Im}w=0$（边界对应关系）. 所以分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

中的四个系数 a, b, c, d 必须皆为实数(这可由 S_z 的实轴上的四个点与 S_w 的实轴上相应的四点所组成的联立方程组求得系数 a, b, c, d). 由分式线性映射的共形性（保持定向），即在实轴$\mathrm{Im}z=$

0 上产生了 π 角度的旋转，所以

$$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}<0$$

因此必须有

$$ad-bc<0.$$

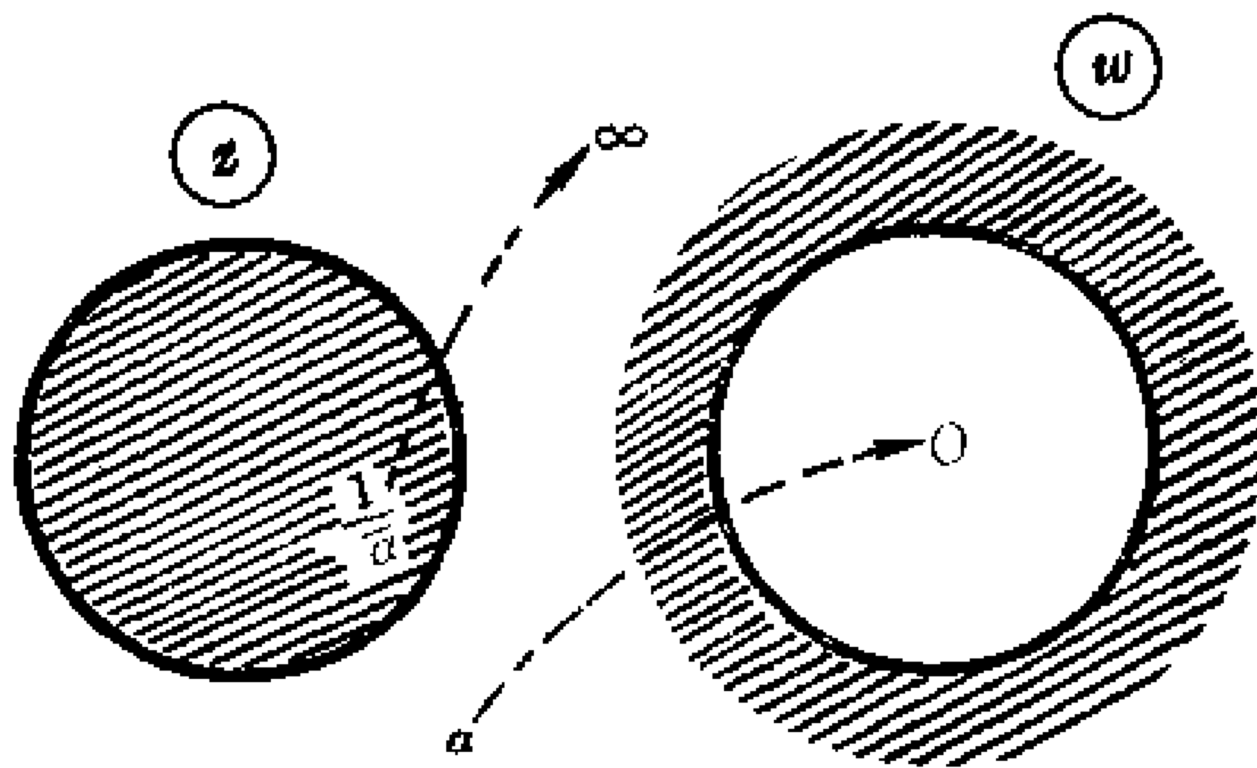
所以，S_z 上的上半平面到 S_w 上的下半平面的分式线性映射的一般形式应是函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}.$$

其中系数a，b，c，d 皆为实数且有 $ad-bc<0$。

5. 【解】

若使单位圆域：$|z|<1$ 通过分式线性函数映射成单位圆周 $|w|=1$的外部 $|w|>1$，必须使单位圆周 $|z|=1$映射成单位圆周 $|w|=1$；且当 S_z 上的单位圆周外的点 α 映射成 S_w 的圆心时，则 α关于 $|z|=1$ 的对称点$\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$必被映射成 S_w 上的无穷远点∞。



指导图6·7

因此分式线性函数应为

$$w=K\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}}=K_1\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$$

取 $z=1$，则有

$$|w| = \left|K_1\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right| = \left|K_1\frac{1-a}{\bar{a}-1}\right| = |K_1| = 1$$

所以

$$K_1 = e^{i\theta}$$

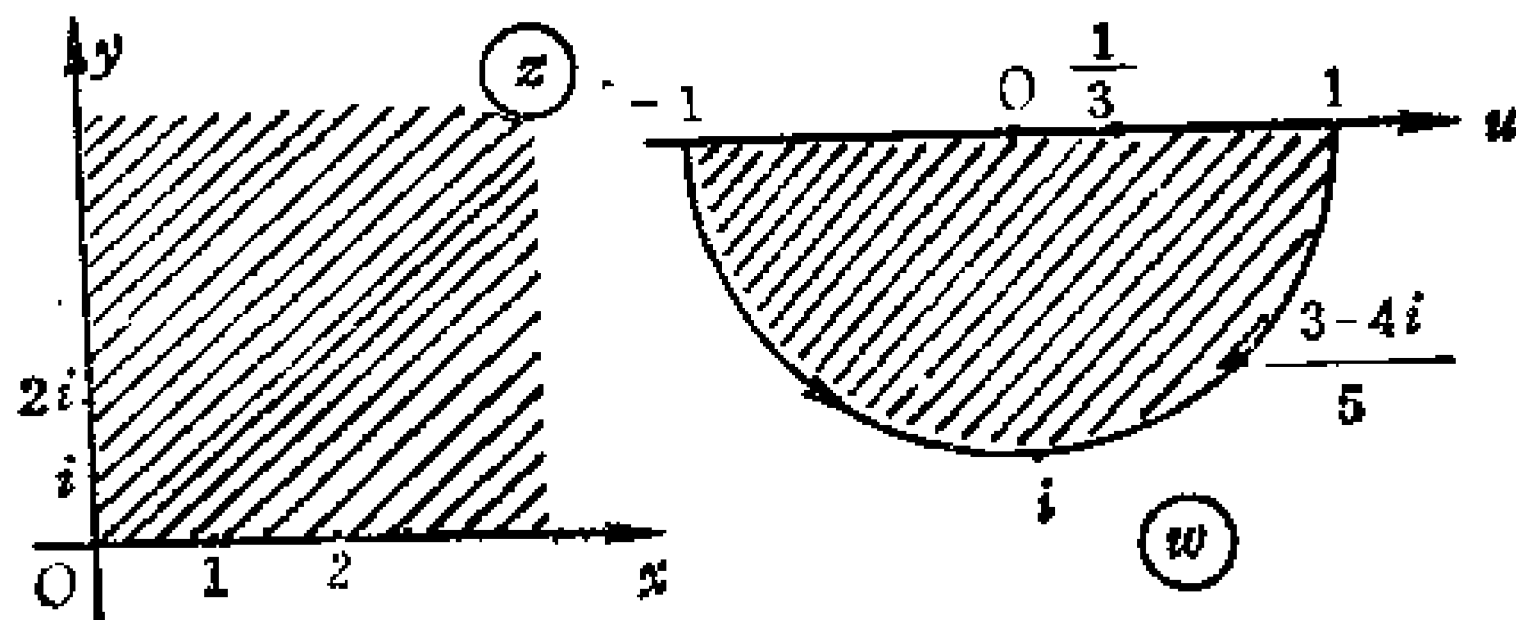
即

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1} \text{或} \ w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

当 $|a|>1$ 时，它便将 $|z|<1$映射成 $|w|>1$.

6. 【解】

区域G实际上是第一象限．这是第一类问题．因此，可将S_z上的第一象限的边界的像求出．



指导图6·8

首先，看虚轴上三点：0，i，$2i$ 分别被映射成-1，0，$\frac{1}{3}$；当 $z=\infty$，取$w=1$，因而上半虚轴被映射成实轴上线段$[-1,1]$．

其次，再看 S_z 上的实轴上三点：0，1，2 分别被映射成S_w上的-1，$-i$，$\frac{3-4i}{5}$；当 $x=\infty$时，$w=1$．显然点：-1，$-i$，$\frac{3-4i}{5}$ 的模长皆为 1．

第一象限的边界（即正实轴与正虚轴）在 $z=0$ 点相直交，依分式线性函数的共形性及保圆性，可知它们的像必在 $w=-1$ 处相直交。

综上所述，可断定第一象限的像为 S_w 的下半个单位圆域内部（如指导图6-8）。

7. 【证明】

为求 $z=\alpha$ 处的旋转角，将上式对 z 求导得

$$\frac{dw}{dz}=e^{i\theta}\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{(z-\bar{\alpha})^2}$$

在 $z=\alpha$ 处之值是

$$f'(\alpha)=e^{i\theta}\frac{1}{\alpha-\bar{\alpha}}$$

对上式两端取辐角，并依 $\alpha\in\mathrm{Im}z$（即 $\mathrm{Im}\alpha>0$）有

$$\arg f'(\alpha)=\arg e^{i\theta}-\arg(\alpha-\bar{\alpha})=\theta-\arg(2i\mathrm{Im}\alpha)=\theta-\frac{\pi}{2}$$

因而，上半平面到单位圆域内的分式线性映射在 $z=\alpha$处的旋转角等于 $\theta-\frac{\pi}{2}$。

由此可知

$$\theta=\arg f'(\alpha)+\frac{\pi}{2}.$$

上题结果可当公式记住，以后经常用到。

8. 【解】

因为上半平面到单位圆域内的分式线性函数为

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$$

由条件 $f(i)=0$，可知 $\alpha=i$；由条件 $f'(i)<0$ 可知 $\arg f'(i)=\pi$。依上题

$$\theta=\arg f'(i)+\frac{\pi}{2}=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi,$$

因而所求映射为

$$w=e^{i\frac{3}{2}\pi}\frac{z-i}{z+i}$$

或

$$w=-i\frac{z-i}{z+i}.$$

9. 【解】

因为上半平面到单位圆域的分式线性映射为

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}},\qquad \alpha\in \operatorname{Im}z>0.$$

由条件 $f(2i)=0$ 可知 $\alpha=2i$；由条件 $f'(2i)>0$ 可得旋转角 $\arg f'(2i)=0$，依 7 题可得

$$\theta=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

于是所求映射为

$$w=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z-2i}{z+2i}.$$

或

$$w=i\frac{z-2i}{z+2i}.$$

10. 【解】

1）由关于单位圆周 $|z|=1$ 对称点定义可知，如果其中一点为 α，则另一点必为 $\frac{1}{\bar{\alpha}}$.

设 α^* 是 α 关于单位圆周的对称点，则

$$\alpha^*=\frac{1}{\bar{\alpha}}=\frac{1}{2-i}=\frac{2+i}{5}.$$

2）如果设点$\alpha=2+i$，并设 α 关于圆周：

$|z-i|=3$

的对称点为 α^*，则由对称点定义可得

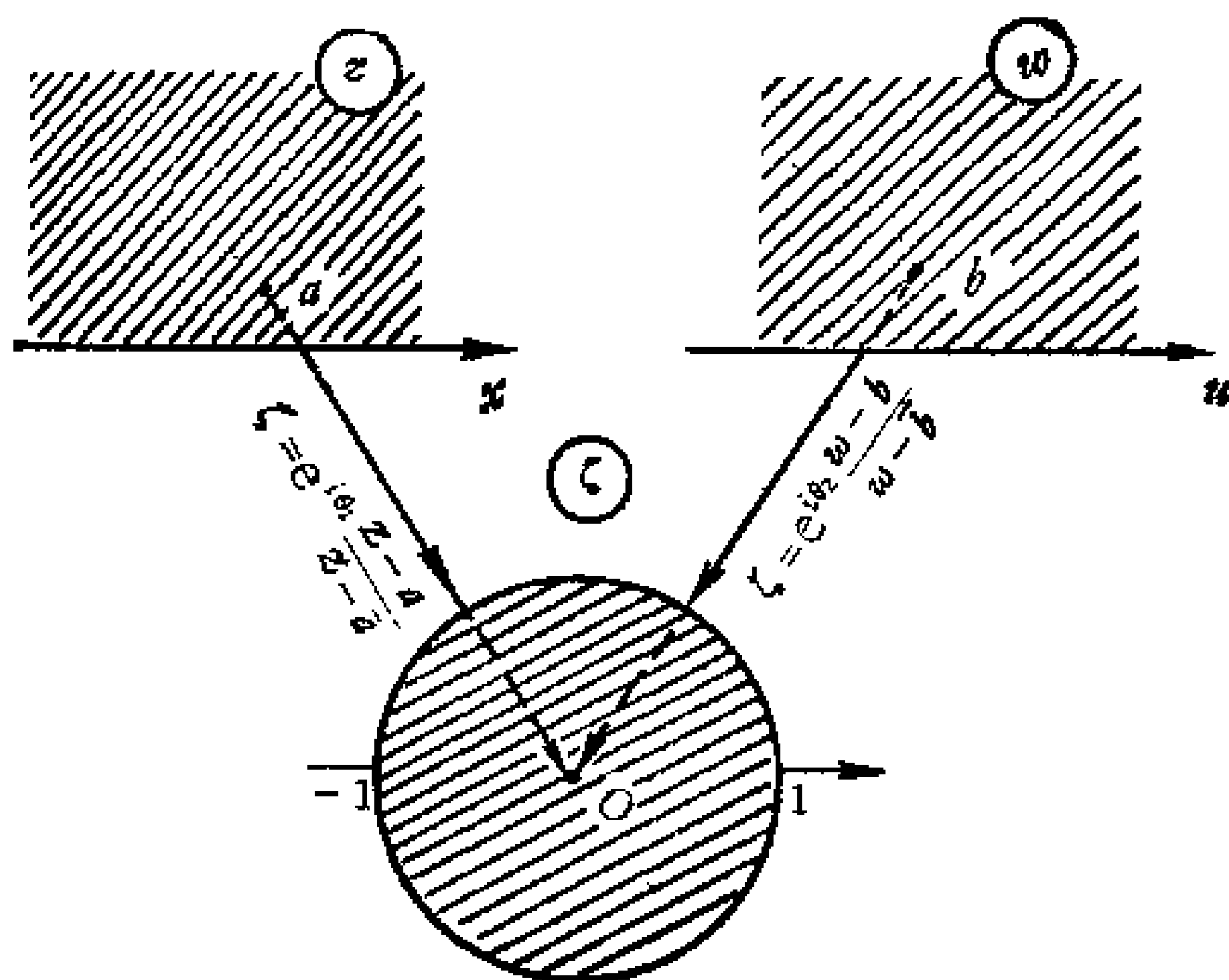
$$\alpha^* - i = \frac{3^2}{\alpha - i} = \frac{9}{2}.$$

因此所求的对称点为

$$\alpha^* = \frac{9}{2} + i.$$

11．【解】

显然，这是共形映射第二类问题．由于限定了条件，我们可将左右两端的平面分别映射到相应的 S_ζ 上去，并使其相应的条件得到满足．然后再通过"中间"——S_ζ 去寻求映射关系．为此，将 S_z 的上半平面映射成 S_ζ 上的单位圆域内 $|\zeta|<1$，并使 $\zeta(a)=0$，$\arg\zeta'(a)=\alpha$；再将 S_w 的上半平面也映射到 S_ζ 上的单位圆域：$|\zeta|<1$ 内，且使 $\zeta(b)=0$，$\arg\zeta'(b)=0$．于是 S_z 与 S_w 两平面通过 S_ζ 建立了关系，映射关系图示如下．



指导图6·9

通过 S_ζ，S_z 与 S_w 两者的关系是

$$e^{i\theta_1}\frac{z-a}{z-\bar{a}}=e^{i\theta_2}\frac{w-b}{w-\bar{b}} \qquad (1)$$

由条件 $\arg\zeta'(a)=\alpha$，依 7 题结论可知

$$\theta_1=\alpha+\frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

再由假设从 S_z 到 S_w 的映射应满足 $\arg\zeta'(b)=0$，所以

$$\theta_2=\frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

（1）式可写成

$$\frac{w-b}{w-\bar{b}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}\frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$

将（2）（3）之值代入上式，便得所求之映射为

$$\frac{w-b}{w-\bar{b}}=e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$

12. 【解】

1）单位圆域：$|z|<1$到单位圆域：$|w|<1$的分式线性映射一般公式为

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ (a\in\mathrm{Im}z,\ \theta\ \text{为实数}).$$

由条件：$w\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 可知 $a=\frac{1}{2}$；由条件，$\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 可知（参看指导部分例 4）

$$\theta=0$$

于是

$$w=\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=\frac{2z-1}{2-z}.$$

2）由条件 $w(0)=0$，可知 $a=0$，由条件：$\arg w'(0)=-\frac{\pi}{2}$可知

$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

于是所求映射为

$$w = \frac{z}{1} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -iz.$$

13．【证明】

由题设，应有

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

欲证

$$|f'(z)| = \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2} \qquad (1)$$

只须证

$$1-|f(z)|^2 = |f'(z)|\cdot(1-|z|^2) \qquad (2)$$

即可。

而 $f'(z) = e^{i\theta}\frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$，所以

$$|f'(z)| = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \qquad (3)$$

又

$$|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)} = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot e^{-i\theta}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}}$$

$$= \frac{z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}+|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \qquad (4)$$

将（4）式代入（2）式，并依（3）可得

$$1-|f(z)|^2 = 1-\frac{z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}+|a|^2}{|1-a\bar{z}|^2}$$

$$= \frac{1-|a|^2}{|1-a\bar{z}|^2}\cdot(1-|z|^2)$$

$$= |f'(z)|\,(1-|z|^2).$$

因而（1）式得证。

14．【证明】

只须将13题中 z 换成 α，并由

$$f(\alpha)=0$$

便可证得

$$|f'(\alpha)|=\frac{1}{1-|\alpha|^2}.$$

习　题（6•2）

1．【答】

由于幂函数 $w=z^n$ 确有扩大角度 n倍的性质，但这只在 $z=0$ 点。因为当 $z=0$时，

$$w'(0)=nz^{n-1}=0,$$

所以在$z=0$点不共形。而除 $z=0$ 外任何一点皆有 $w'\neq0$。因此在角域

$$G:\ \frac{2k\pi}{n}<\arg z<\frac{2(k+1)}{n}\pi$$

内单叶解析，所以构成共形映射。

2．【答】

由于函数 $w=z^4$ 将扇形区域

$$G=\{z:(|z|<2)\cap(0<\arg z<\frac{\pi}{4})\}$$

映射成区域

$$D=\{w:(|w|<16)\cap(0<\arg w<\pi)\}$$

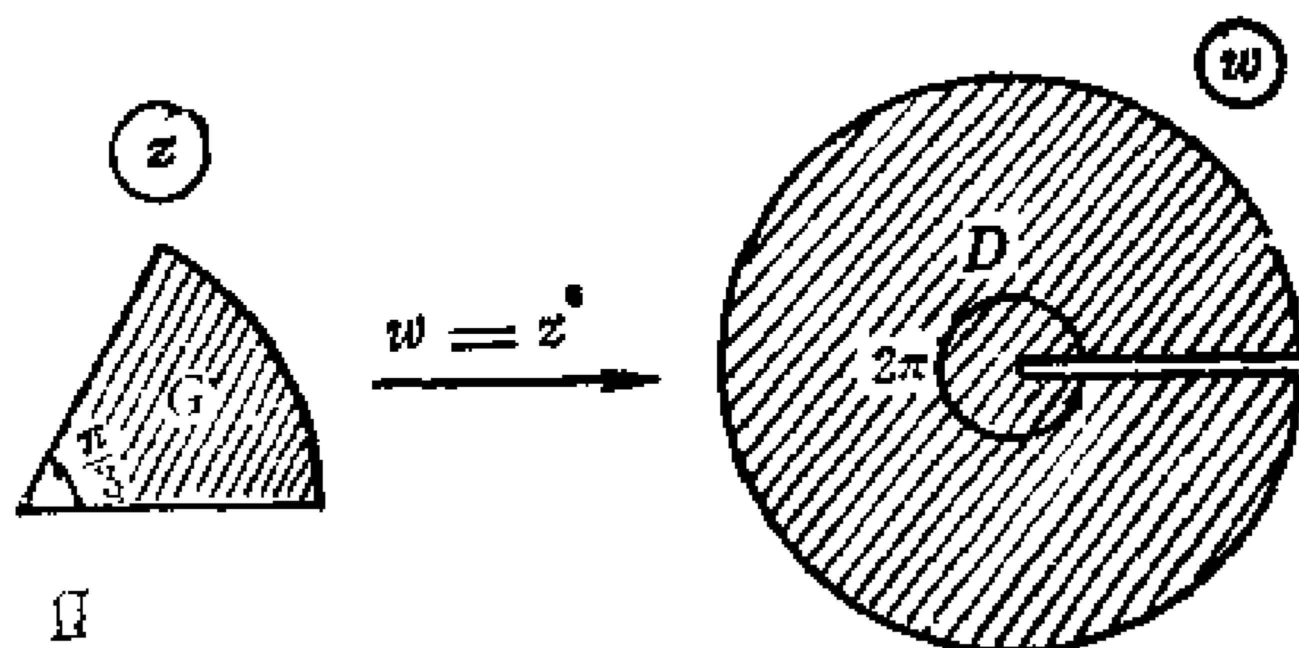
$w=z^4$ 在区域G内单叶解析，所以构成共形映射。

3．【答】

因为 $w=z^6$ 将区域G映射成区域

$$D=\{w:(|w|<1)\cap(0<\arg w<2\pi)\}$$

（见指导图6•10）



指导图6·10

因此，$w=z^6$ 不能将区域G映射成 $|w|<1$。

如果使用其他的映射函数，能否将区域G映射成单位圆域 $|w|<1$ 呢？回答是肯定的。这只需将G用函数 $z_1=z^3$，变成 z_1 平面上半单位圆域内部；然后再对 z_1 平面的区域使用 $z_2=\frac{-1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)$，便可映射到 z_2 的上半面；最后使用上半平面到单位圆域的分式线性映射便可。

4. 〔答〕

根式函数有将角域缩小的作用。但是单位圆域内，$|z|<1$ 不是角域，所以函数 $w=\sqrt{z}$ 无法将 $|z|<1$ 剪开成半圆域。我们可以形象地将根式函数的作用比做剪子。要想把平面（或角域）剪开，必须有下剪子的缝隙才可以将其剪开，否则是不能剪开的。

如果是这样的区域 $G=\{z:(0<\arg z<2\pi)\cap(|z|<1)\}$，则通过函数 $w=\sqrt{z}$ 的主枝，可以将G剪成 S_w 上的一上半个单位圆域内部 $D=\{w:(0<\arg w(\pi)\cap(|w|<1)\}$。因为这时，在$G$上的截口即线段〔0,1〕处可以下剪子。

总之，根式函数只能对角域（对扇形）有缩小（对角度而言）的作用。没有裂缝的区域不能使用根式函数（注意，裂缝必须是通向无穷远点）。

5. 〔答〕

① z^n 将

1）半射线族 $\arg z=\theta$ 映射成半射线族：$\arg w=n\theta+2k\pi$

2）圆族 $|z|=r$映射成圆族：

$$|w|=r^n.$$

② e^z 对

1°半射线族 $\arg z=\theta$ 的映射如下：

设 $z=re^{i\theta}$，$w=\rho e^{i\varphi}$，则由$w=e^z$可得

$$\rho e^{i\varphi}=e^{re^{i\theta}}=e^{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=e^{r\cos\theta}e^{ir\sin\theta}$$

于是有

$$\rho=e^{r\cos\theta},\quad \varphi=r\sin\theta,$$

所以 $\sin\theta=\dfrac{\varphi}{r}$,

则 $\rho=e^{r\cos\theta}=e^{r\operatorname{ctg}\theta\cdot\sin\theta}=e^{r\cdot\frac{\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta}=e^{\varphi\cdot\operatorname{ctg}\theta}$

它表示对数螺线。

2°圆族 $|z|=r$ 的映射如下：

由前所述有

$$\rho=e^{r\cos\theta},\quad \varphi=r\sin\theta,$$

所以 $\log\rho=r\cos\theta$ 即$\dfrac{\log\rho}{r}=\cos\theta$ （1）

及 $\dfrac{\varphi}{r}=\sin\theta$ （2）

（1）^{2} +（2）^{2} 得

$$\left(\frac{\log\rho}{r}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{r}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

所以

$$(\log\rho)^2=r^2-\varphi^2.$$

③ 函数$\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$将

1°半射线族映射成双曲线族：

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta}-\frac{v}{\sin^2\theta}=1.$$

2°圆族映射成椭圆族：

$$\frac{u^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=\frac{1}{4}.$$

6. 【解】

设 $w=\rho e^{i\varphi}$，$z=x+iy$，则由 $w=e^z$可得关系式

$$\rho=e^x,\ \varphi=y+2K\pi. \tag{1}$$

于是将

1）直角网：$\mathrm{Re}z=c_1$，$\mathrm{Im}z=c_2$映射成极网

$\rho=e^{c_1}$，$\varphi=c_2$；

2）直线 $y=Kx+b$ 的映射如下：

由公式（1）可有

$$\varphi=K\log\rho+b$$

所以

$$\rho=e^{\frac{\varphi-b}{K}}$$

这是螺线。当 $K=0$ 时，螺线变成射线

$$\varphi=b$$

即平行于实轴的直线经指数函数 $w=e^z$ 映射成射线 $\arg w=b$.

3）带形区域 $\alpha<\mathrm{Im}z<\beta$的像域是张角为 $\beta-\alpha$ 的角域

$\alpha<\arg w<\beta$.

当 $\alpha=0$，$\beta=2\pi$时，上述角域变成沿正实轴剪开的平面 S_w.

4）半带形区域 $G=\{z:(\mathrm{Re}z>0)\cap(0<\mathrm{Im}z<\alpha)\}$ 被映射成区域

$$D=\{w:(|w|>1)\cap(0<\arg w<\alpha),\ 0\leqslant\alpha\leqslant2\pi\}.$$

当 $\alpha=2\pi$ 时，是去掉射线 $v=0$，$1\leqslant u<\infty$ 的单位圆周外部.

7. 【解】

我们由对数映射关系式

$$u=\log\rho,\quad v=\varphi$$

可知

1）圆周 $|z|=R_0$ 被映射成平行于虚轴的直线 $u=\log R_0$。

2）射线：$\arg z=\theta_0$ 被映射成平行于实轴的直线 $v=\theta_0$。

特别地，当 $\theta_0=0$ 时，直线 $v=\theta_0$ 变成正实轴。

3）角域 $G=\{z:0<\arg z<\alpha,\ 0\leqslant\alpha\leqslant2\pi\}$ 被映射成宽度为 α 且平行于实轴的带形区域

$$D=\{w:\ 0<\mathrm{Im}w<\alpha\}。$$

特别地，当 $\alpha=2\pi$ 时，上述带域 G 变成宽度为 2π 且平行于实轴的带域

$$D=\{w:0<\mathrm{Im}w<2\pi\}$$

4）扇形区域 $G=\{z:\ (|z|<1)\cap(0<\arg z<\alpha),\ 0\leqslant\alpha\leqslant2\pi\}$ 被映射成半带域：

$$D=\{w:\ (\mathrm{Re}w<0)\cap(0<\mathrm{Im}w<\alpha)\}$$

它是平行于实轴，宽度为α的左半带域。

当$\alpha=2\pi$时，则变成平行于实轴，宽度为2π的左半带域。

8．【解】

很显然，这是共形映射第一类问题．它的映射关系式是

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta,\quad v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta$$

首先将上半平面的边界 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ及其像 Ⅰ′、Ⅱ′、Ⅲ′、Ⅳ′求出：

Ⅰ：$\theta=\pi,\ -1\leqslant\rho<+\infty$（即$\{z:(\arg z=\pi)\cap(1\leqslant|z|<\infty)\}$），

其像

Ⅰ′：$v=0,\ -\infty<u\leqslant-1$，（即$\{w:(\mathrm{Im}w=0)\cap(-\infty<\mathrm{Re}w\leqslant-1)\}$）

Ⅱ：$\theta=\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant1$，（即 $\{z:\ (\arg z=\pi)\ \cap(0\leqslant|z|\leqslant1)\}$），

其像

Ⅰ′：$v=0$，$-\infty<u\leqslant-1$（即$\{w:(\mathrm{Im}w=0)\cap(-\infty<\mathrm{Re}w\leqslant-1)\}$）。

Ⅱ：$\theta=0$，$0\leqslant\rho\leqslant1$，（即$\{z:(\arg z=0)\cap(0\leqslant|z|\leqslant1)\}$）。其像

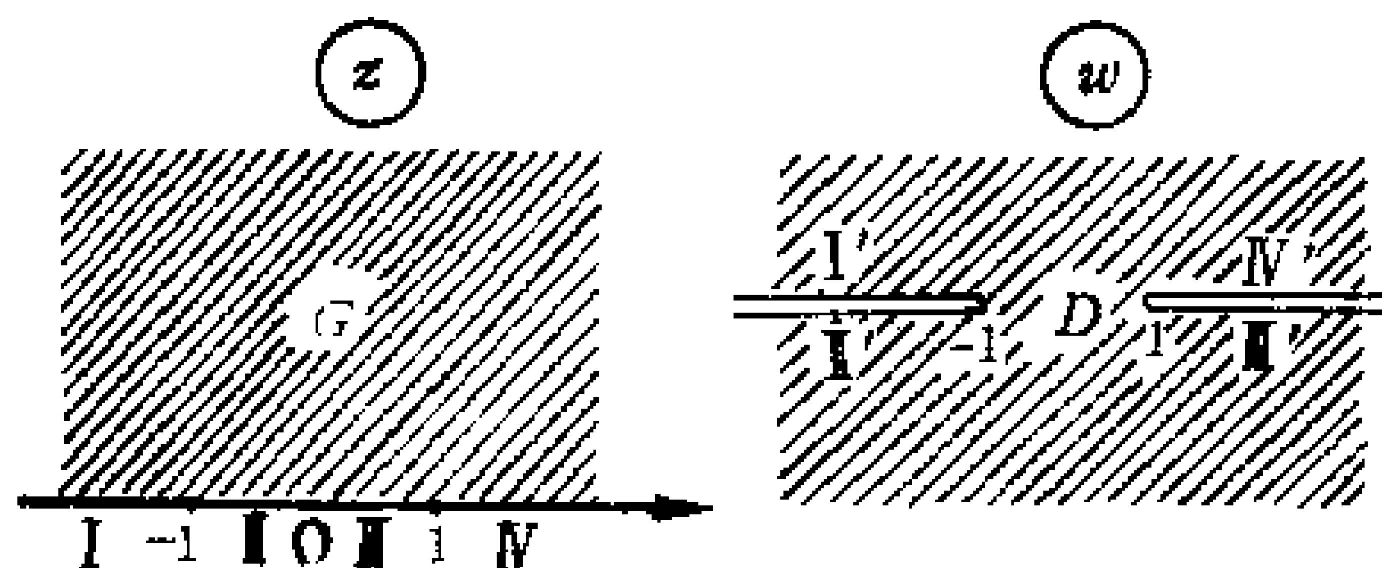
Ⅲ′：$v=0$，$1\leqslant u<\infty$，（即$\{w:(\mathrm{Im}w=0)\cap(1\leqslant\mathrm{Re}w<\infty)\}$）。

Ⅳ：$\theta=0$，$1\leqslant\rho<\infty$（即$\{z:(\arg z=0)\cap(1\leqslant|z|<\infty)\}$）。

其像

Ⅳ′：$v=0$，$1\leqslant u<\infty$（即$\{w:(\mathrm{Im}w=0)\cap(1\leqslant\mathrm{Re}w<\infty)\}$）。

最后、依边界绕行来确定区域．显然上半平面的像是 S_w 上的以$(-\infty,1]$，$[1,\infty)$为边界的区域（如指导图6·11）



指导图6·11

9．【解】

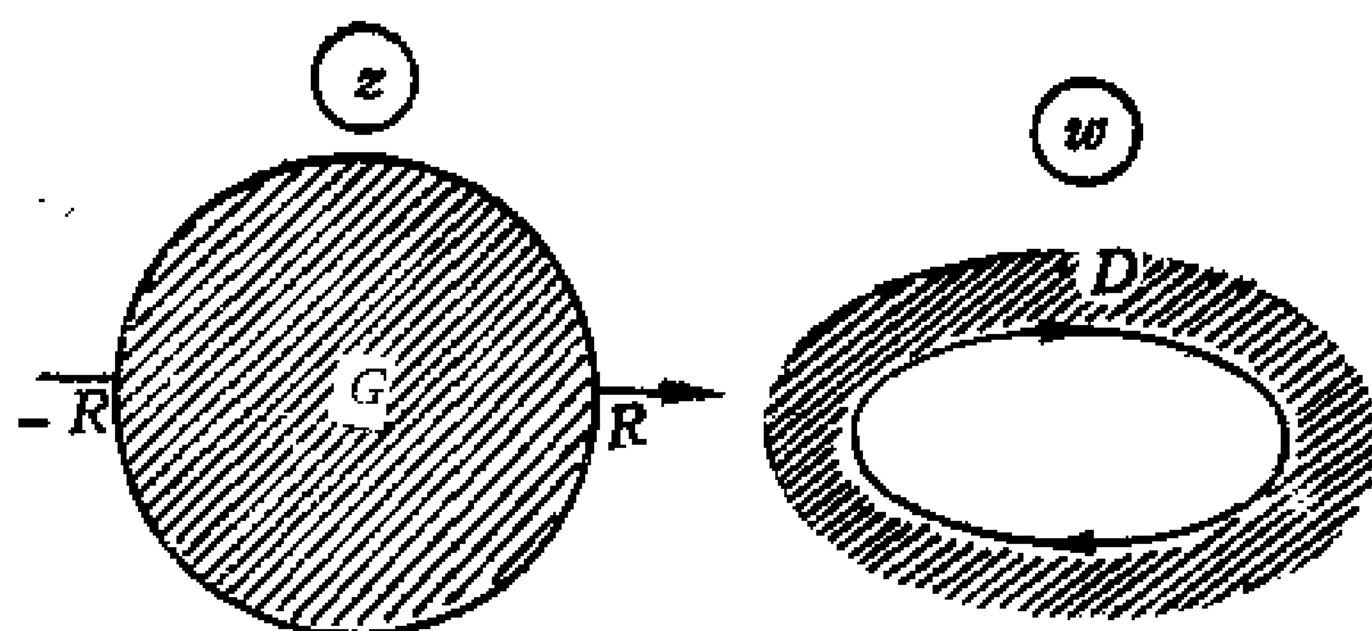
因为Жуковский函数关系式为

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta,\ v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta.$$

1） 圆域G：$|z|<R<1$的边界$|z|=R$被映射成椭圆周

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1.$$

且当z沿圆周$|z|=R$正向旋转一周时，对应地w在椭圆周上负向地绕行一周．因此，由边界对应定理可以确定圆域$|z|<R(<1)$被映射成椭圆周的外部区域（见指导图6·12）．



指导图6·12

2）圆域：$|z|>R>1$ 的边界曲线为 $|z|=R$. 在函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$的映射下其像曲线是椭圆周.

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1.$$

并且当z沿圆周 $|z|=R$ (>1)正向旋转一周时，对应地w在椭圆周上也正向地旋转一周. 因此，由边界对应定理可知圆域 $|z|>R$ 被映射成椭圆周的外部区域（与指导图6·12右端区域相同）.

3）设G的边界为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，其像为Ⅰ′、Ⅱ′、Ⅲ′. 我们来讨论映射情况.

Ⅰ：$\theta=0$, $0\leqslant\rho\leqslant1$（即 $\{z:(\arg z=0)\cap(0\leqslant|z|\leqslant1)\}$）.

其像

Ⅰ′：$v=0$, $1\leqslant u<\infty$（即$\{w:(\operatorname{Im}w=0)\cap(1\leqslant\operatorname{Re}w<\infty)\}$）.

Ⅱ：$\theta=\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant1$（即 $\{z:(\arg z=\pi)\cap(0\leqslant|z|\leqslant1)\}$）.

其像

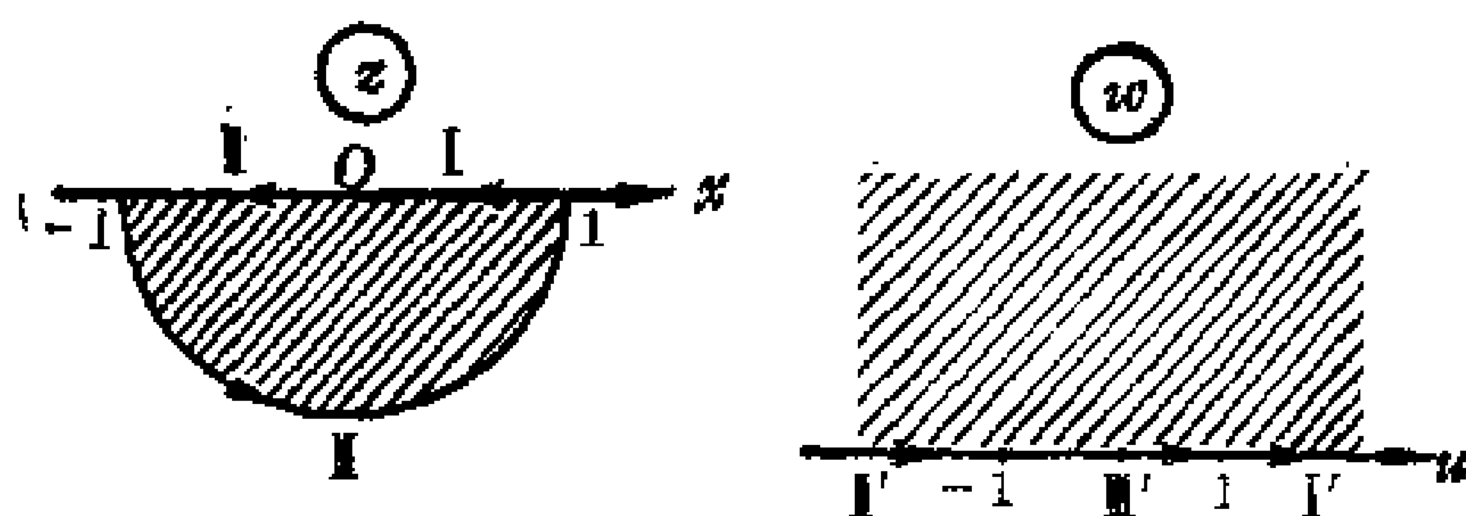
Ⅱ′：$u=0$, $-\infty<u\leqslant-1$（即$\{w:(\operatorname{Im}w=0)\cap(-\infty<\operatorname{Re}w\leqslant-1)\}$）.

Ⅲ：$\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$, $\rho=1$（即$\{z:(\pi\leqslant\arg z\leqslant2\pi)\cap(|z|=1)\}$）.

其像

Ⅲ′：$v=0$, $-1\leqslant u\leqslant1$（即 $\{w:(\operatorname{Im}w=0)\cap(-1\leqslant\operatorname{Re}w\leqslant1)\}$.

由边界对应定理可知下半单位圆域内 $|z|<1$, $\mathrm{Im}z<0$的像成是上半平面（如指导图6·13）



指导图6·13

10. 【解】

若$a>0$，则在函数 $w=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$的映射下区域$G$的边界Ⅰ、Ⅱ及其像Ⅰ'、Ⅱ'的对应关系如下：

Ⅰ： 线段〔a, 1〕被映射成

Ⅰ'： 线段$\left[1, \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$；

Ⅱ： 单位圆周 $|z|=1$被映射成

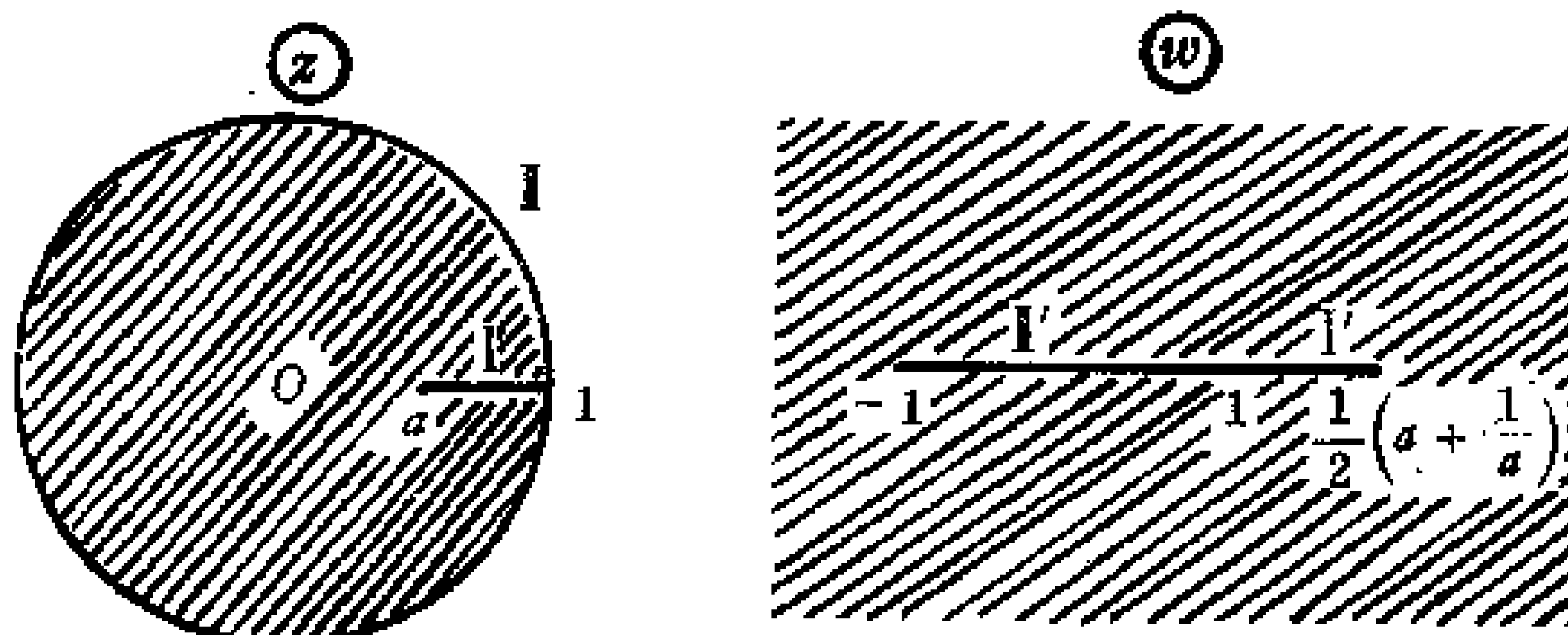
Ⅱ'： 线段〔-1, 1〕

因此，区域G的像域是在S_w上面去掉线段：$\left[-1, \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$的区域（如指导图6·14）。

若$a<0$，则在函数$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$映射下边界及其像的映射为：

Ⅰ： 线段〔a, 0〕被映射成

Ⅰ'： 射线$\left[-\infty, \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$，



指导图6·14

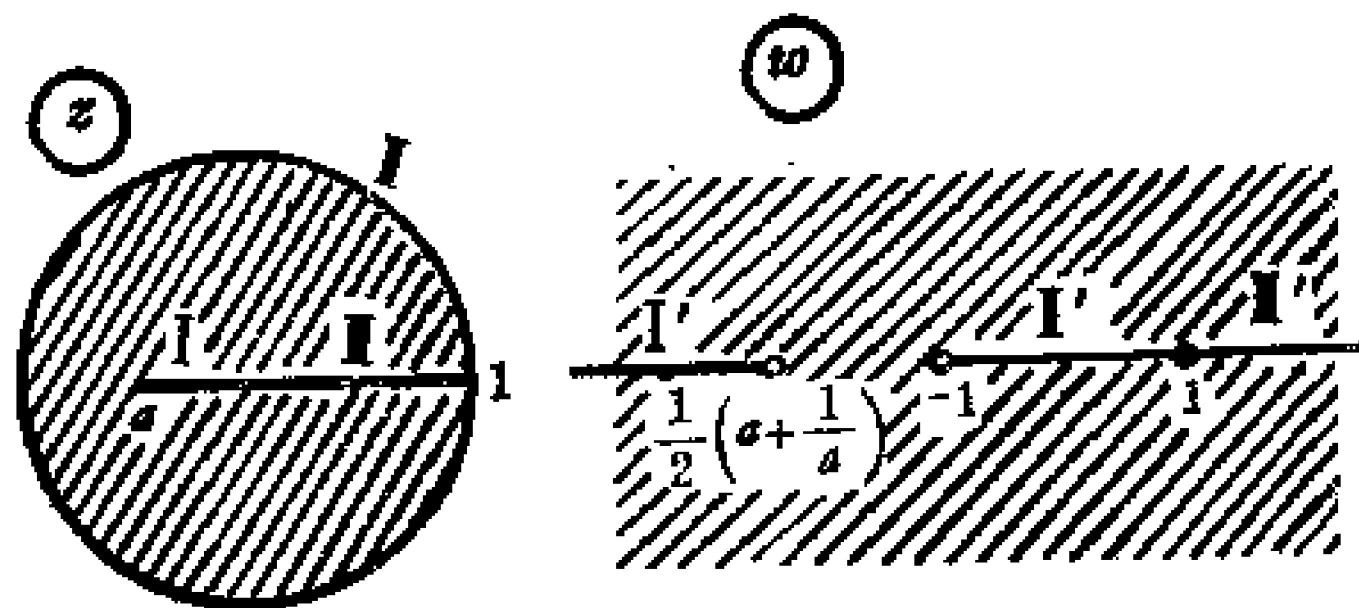
Ⅰ：单位圆周 $|z|=1$ 被映射成

Ⅰ′：线段〔$-1,1$〕.

Ⅱ：线段〔0,1〕被映射成

Ⅱ′：〔1，$+\infty$）.

由边界的对应绕行方向可知，区域 G 被映射成 S_w 上面去掉直线：$\left[-\infty,\ \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$ 与〔-1，$+\infty$）的区域（如指导图6·15）



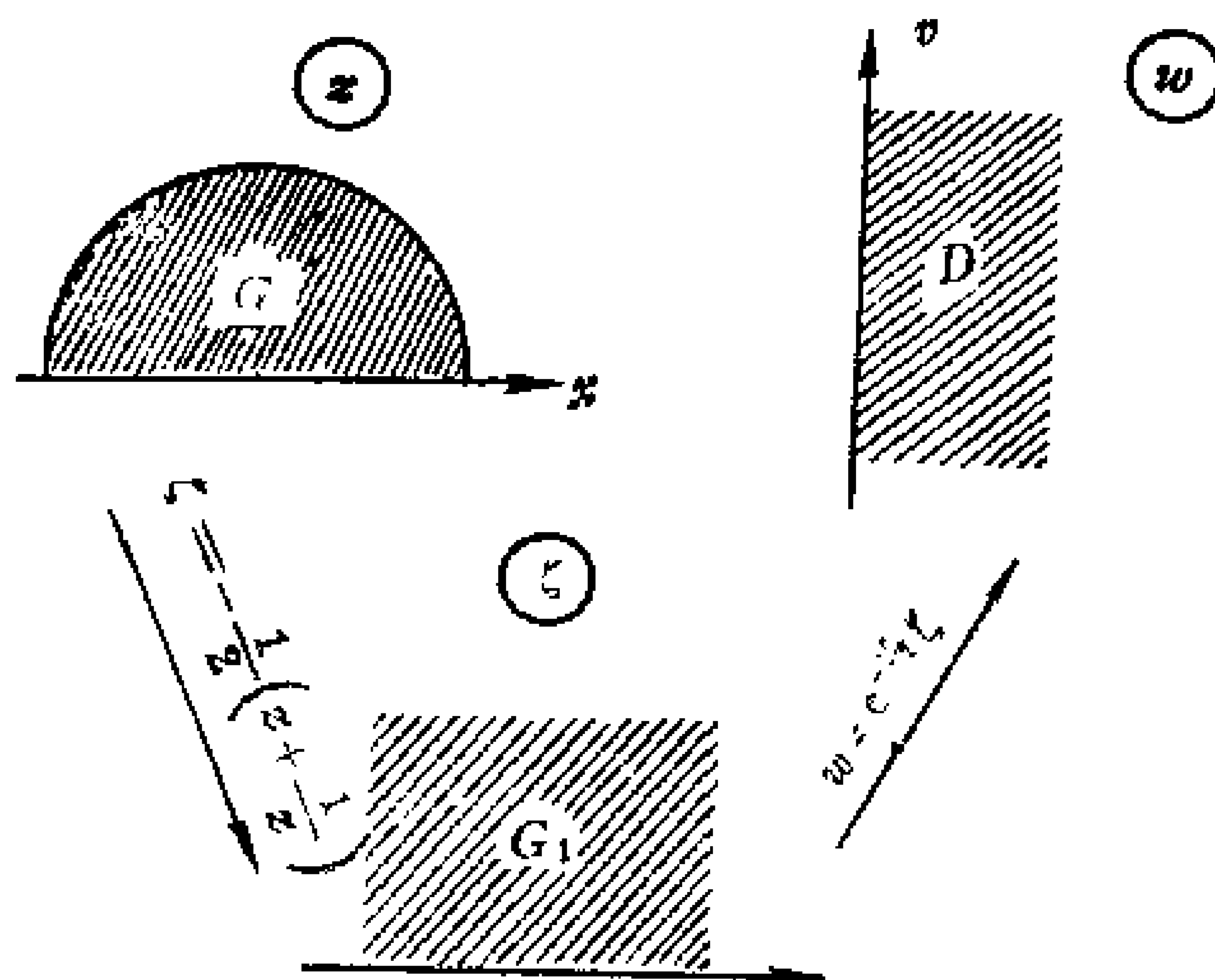
指导图6·15

习　题(6·3)

1．【解】

因为这是共形映射第二类问题，我们还是"**看两端，想中间，联系起来找函数**"．这两端的左端是上半单位圆域内部 G；右端

是右半平面 D。显然，两端都可以映射成上半平面。然后通过上半平面这个"中间"将左右两端用函数联系起来。具体映射图示如下：



指导图6·16

将各步组合起来并用 z 表示 w 时有

$$w=\frac{i}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

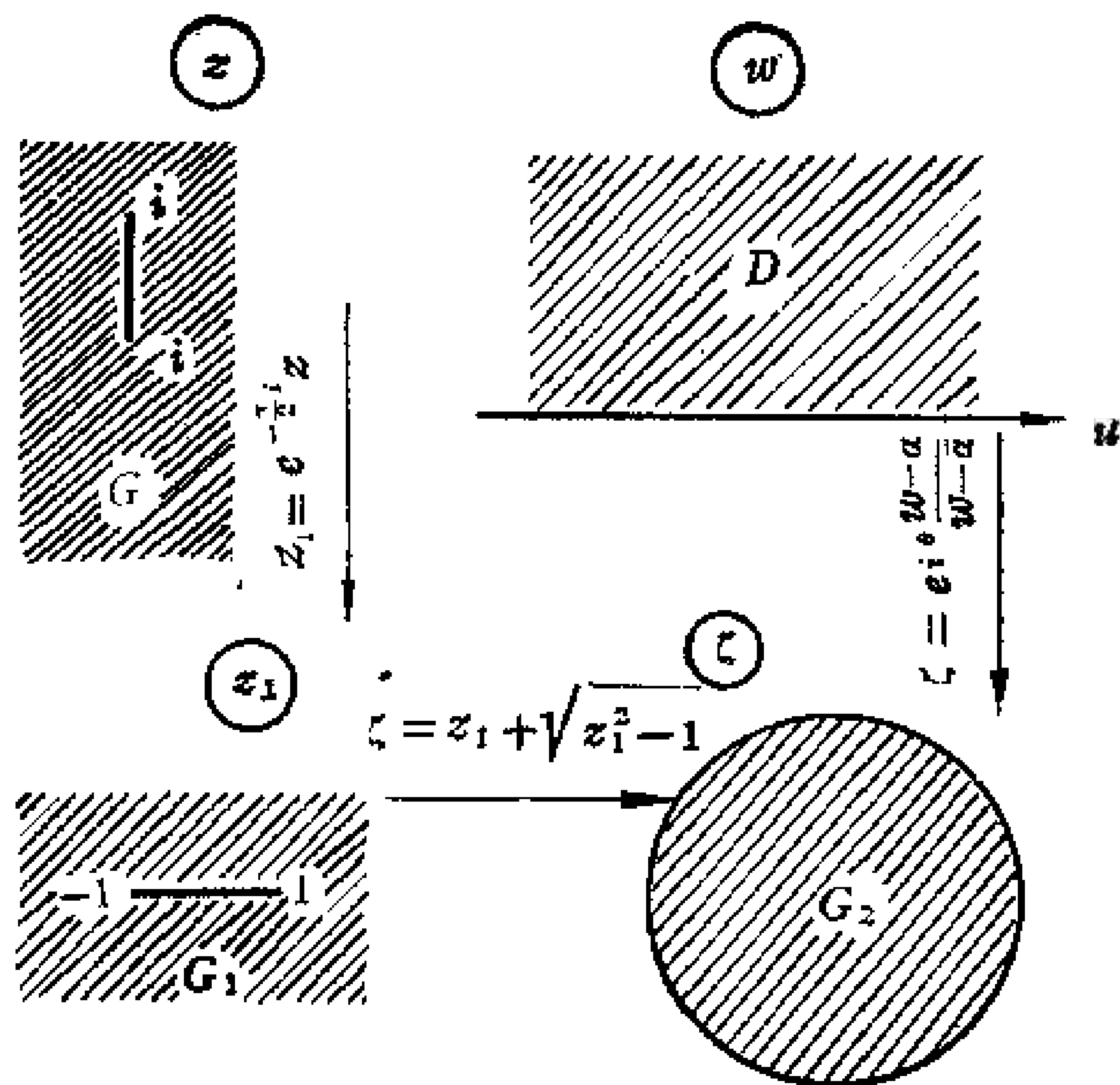
此即为所求之映射。

2．【解法 1】

设 S_z 上的区域为G，S_w 上的区域为 D。只要能将 G 映射成单位圆域内部，我们便可与上半平面联系起来。显然这里的"中间"就是单位圆域内部。

为此，首先将 G 旋转 $-\frac{\pi}{2}$ 角度到 S_{z_1}。然后对 S_{z_1} 实行 Жуковский 函数反函数之一枝的映射，可将 S_{z_1} 上的区域 G_1 映射成 S_ζ 的单位圆域内；然后再将 S_w 的 D 映射成 S_ζ 。

各步映射图示如下：



指导图6·17

将各步映射组合起来并用 z 表示 w 时有

$$\zeta = -iz + \sqrt{-z^2+1}, \quad \zeta = e^{i\theta}\frac{w-a}{w-\bar{a}}$$

联接起来便得

$$-iz + i\sqrt{z^2-1} = e^{i\theta}\frac{w-a}{w-\bar{a}}$$

或

$$e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\frac{w-a}{w-\bar{a}} = z - \sqrt{z^2-1}.$$

即为所求之映射。

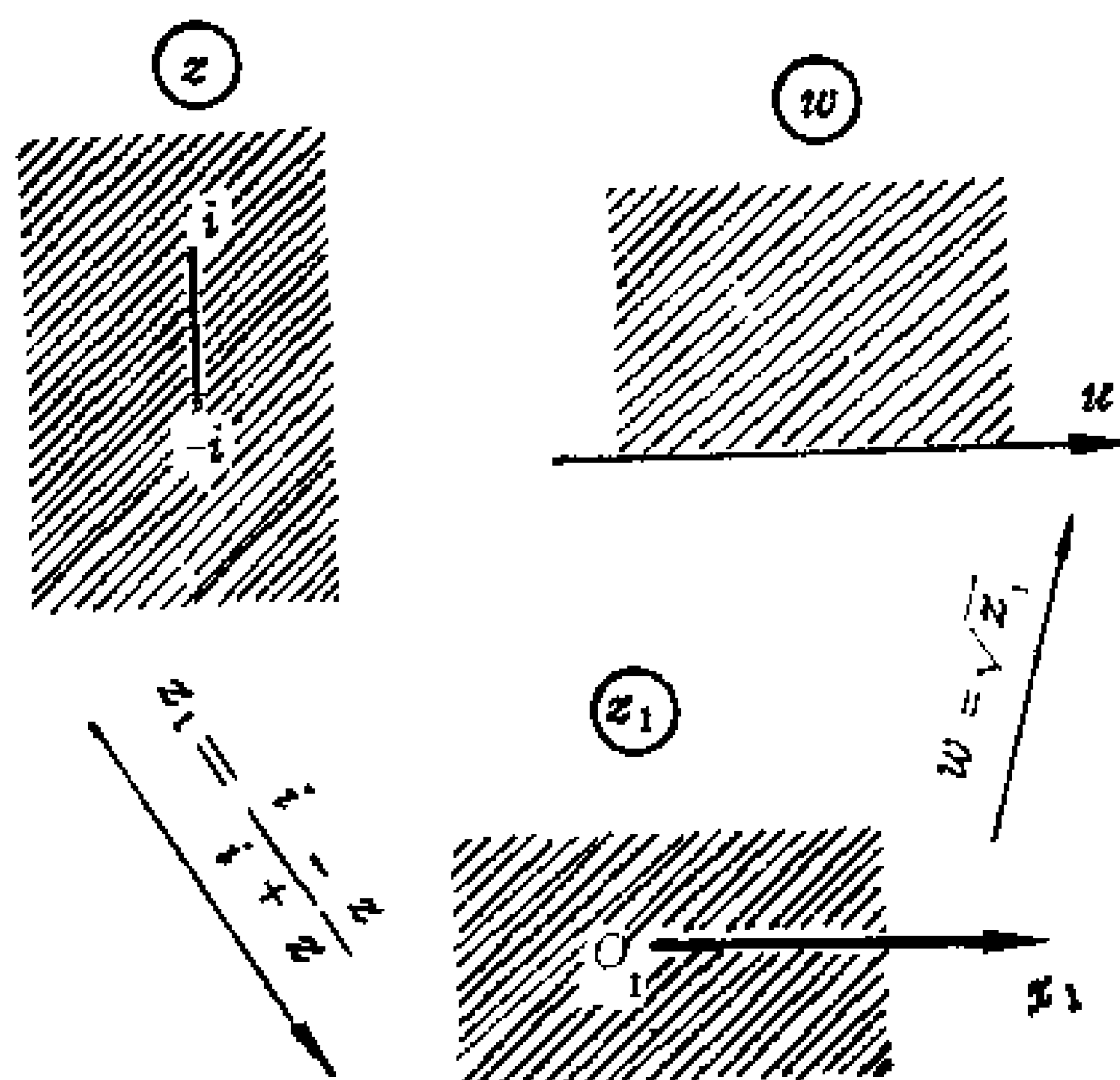
【解法 2】 使用分式线性映射

$$z_1=\frac{i-z}{i+z}$$

使原来沿着 $[-i,i]$ 剪开的 S_z 变成沿着正实轴有截口的 S_{z_1}. 然后再用根式函数

$$w=\sqrt{z_1}$$

的主枝，即可将 S_{z_1} 映射成 S_w 的上半平面. 各步映射图示如下：



指导图6·18

将各步组合起来并用 z 表示 w 时便有

$$w=\sqrt{\frac{i-z}{i+z}}$$

即为所求之映射.

3. 【解】

我们首先将 S_z 作$\frac{\pi}{2}$角的旋转到 S_{z_1} 的映射。然后考虑由 S_{z_1} 的上半平面到 S_w 的单位圆外部的分式线性映射。由边界对应定理可知，S_{z_1} 上面的实轴必然映射成 S_w 平面的单位圆周。

我们在 S_{z_1} 平面的下半平面任取一点 α，使其映射成 S_w 平面的单位圆域的圆心。于是 α关于实轴的对称点 $\bar{\alpha}$，必然被映射成S_w上面的无穷远点（单位圆域的圆心 $w=0$ 关于单位圆周 $|w|=1$ 的对称点）。因该分式线性映射的一般形式是

$$w=K\frac{z_1-\alpha}{z_1-\bar{\alpha}}$$

特别地取 $z_1=0$ 时，应有 $|w|=1$，即

$$|w|=\left|K\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right|=|K|=1$$

所以 $K=e^{i\theta}$。将 $z_1=iz$ 及 $K=e^{i\theta}$ 代入后得

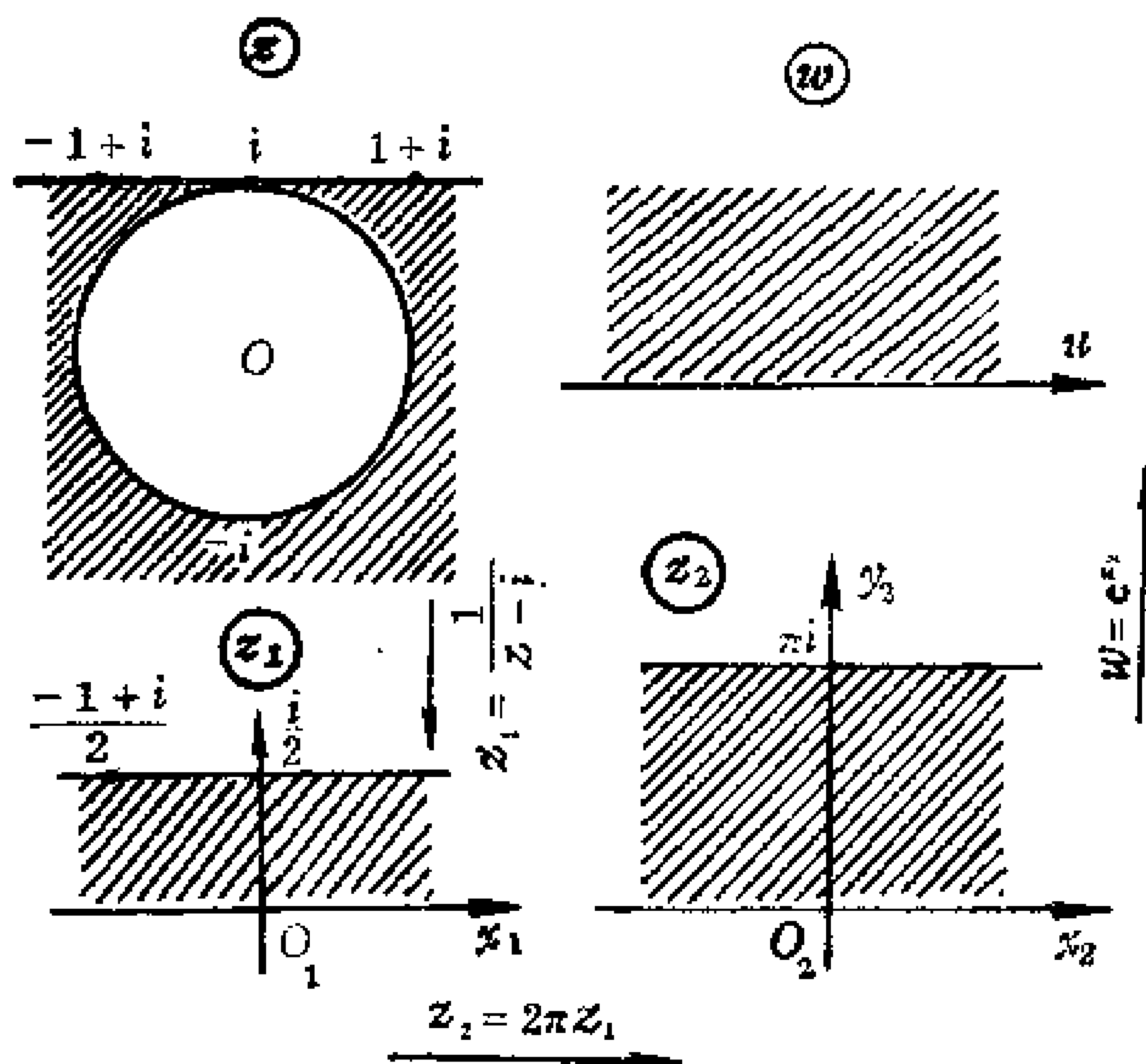
$$w=e^{i\theta}\frac{iz-\alpha}{iz+\bar{\alpha}},\ \alpha\in\operatorname{Re}z<0.$$

此即所求之分式线性映射。

从上式的结果看，与上半平面到单位圆域内部映射形式是一样的。事实上，这个结果就是将右半平面旋转$\frac{\pi}{2}$角后变成 S_{z_1} 的上半平面，然后直接利用上半平面到单位圆周外部的分式线性映射所得到的。

4. 【解法1】

我们知道，因为圆周与直线相切于 i，所以在分式线性映射下，其像可视为二条平行的直线（只须将切点映射成无穷远点即可）。这样一来，区域G的像域就是二条平行直线所夹的带域。由带域到上半平面的映射可用指数函数，这只须将其宽度变成 π即可。各步具体映射图示如下：



指导图6·19

$z_1=\frac{1}{z-i}$时 圆周c: $\begin{cases} z=i\text{时}, & z_1=i\infty; \\ z=-1\text{时}, & z_1=\frac{-1+i}{2}; \\ z=-i\text{时}, & z_1=\frac{i}{2}. \end{cases}$

直线l: $\begin{cases} z=1+i\text{时}, & z_1=1; \\ z=i\text{时}, & z_1=\infty; \\ z=-1+i\text{时}, & z_1=-1. \end{cases}$

将各步映射组合起来并用 z 表示 w，便得，

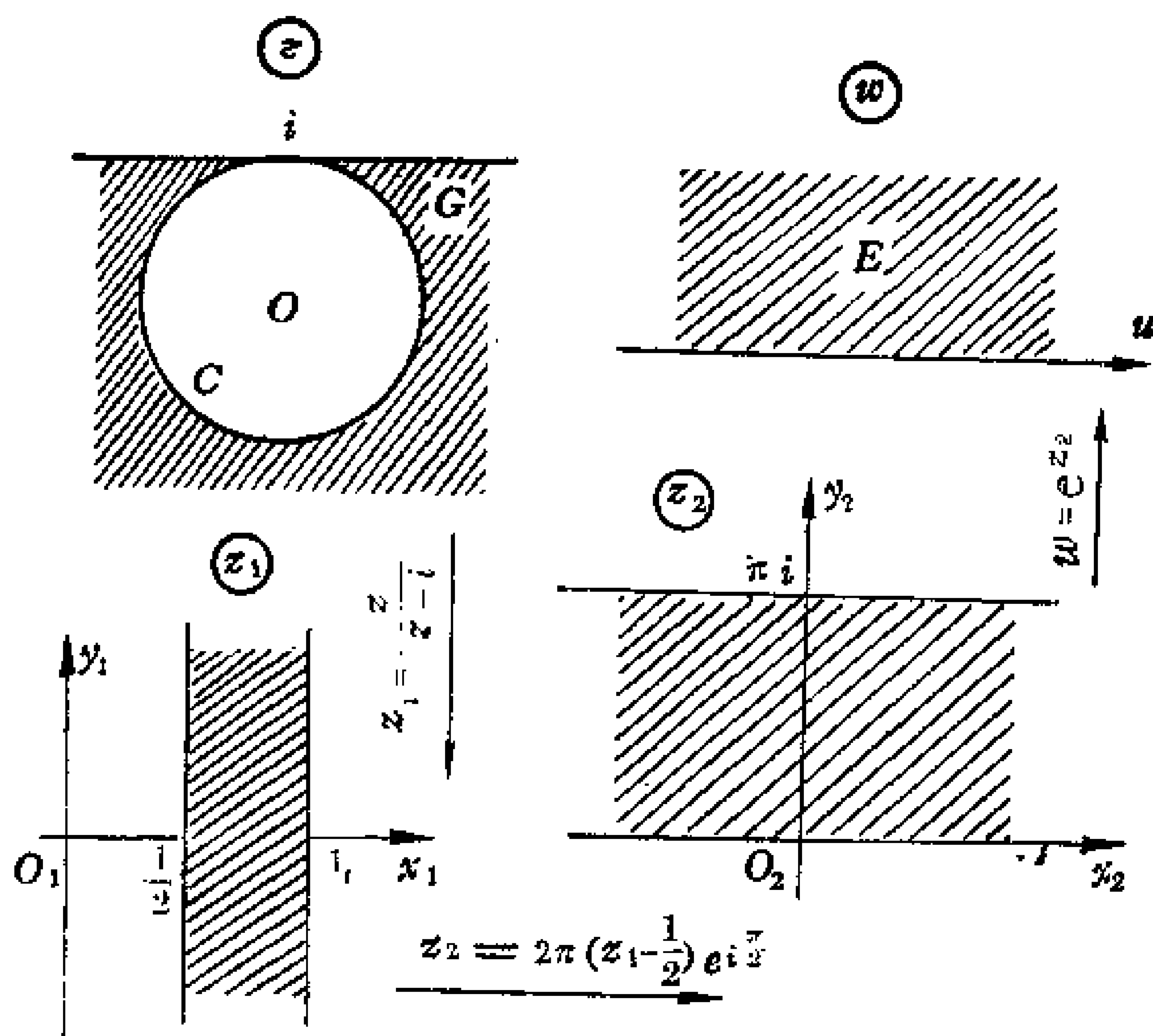
$$w=e^{\frac{2\pi}{z-i}}.$$

【解法 2】 首先使用 $z_1=\frac{z}{z-i}$。在此映射下，圆周 c 及直线 l的对应像可由下列对应点的关系确定。

圆周C：
$z=i$ 时，$z_1=i\infty$；
$z=-1$ 时，$z_1=\dfrac{1-i}{2}$；
$z=-i$ 时，$z_1=\dfrac{1}{2}$。

直线
$z=1+i$ 时，$z_1=1+i$；
$z=i$ 时，$z_1=i\infty$；
$z=-1+i$ 时，$z_1=1-i$。

在 S_{z_1} 上，我们再施以变换 $z_2=e^{i\frac{\pi}{2}}z_1\pi$，最后由 $w=e^{z_2}$ 可将 S_{z_2} 上面的平行于实轴，宽度为 π 的带形区域映射成上半平面。各步映射图示如下：



指导图6·20

将各步映射组合起来并用 z 表示 w，便得

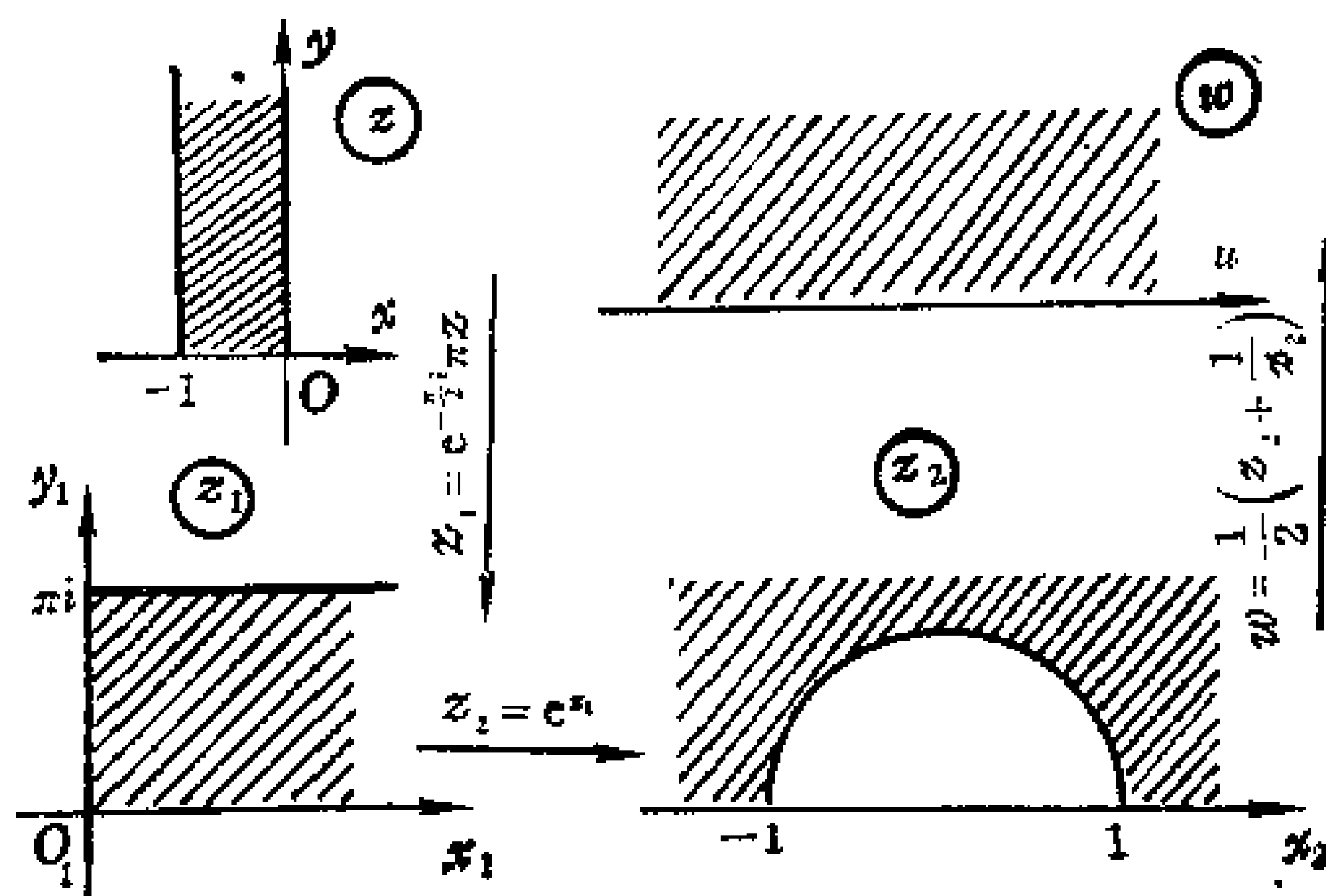
$$w = e^{z_2} = -e^{2i\pi z_1} = -e^{i\pi\frac{2z}{z-i}}$$

此即所求之映射关系式。

5．【解】

我们首先将区域G作扩大π倍并旋转$-\frac{\pi}{2}$角度的映射：$z_1 = e^{-\frac{\pi i}{2}}\pi z$。然后再将带域映射成上半个单位圆域外部，函数是：$z_2 = e^{z_1}$。最后使用$w = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$函数即可完成到上半平面的映射。

各步映射图示如下：



指导图6·21

将各步映射组合起来并用z表示w便得

$$w = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi zi} + e^{-\pi zi}\right)$$

$$= \cos\pi z。$$

此即所求之映射关系式。

6．【解法1】

令$z = e^{i\theta}$，则

$$w = e^{i\theta}(1-e^{i\theta})^{-2}$$

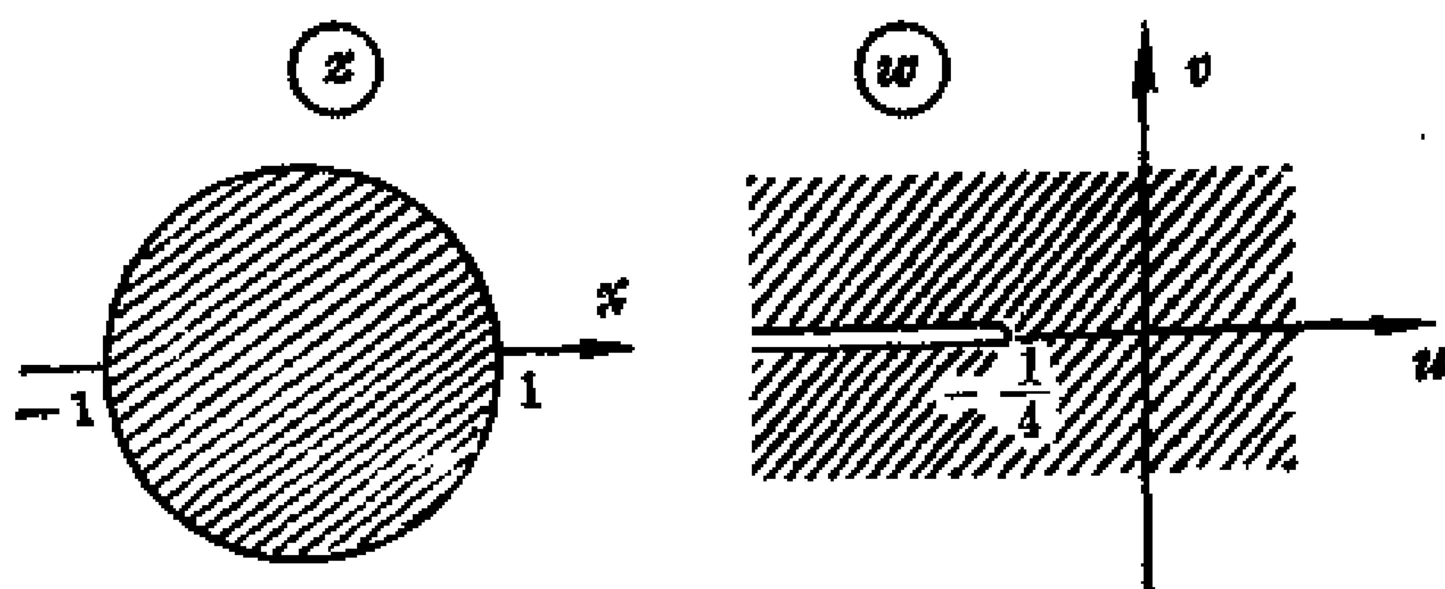
$$= \frac{e^{i\theta}}{1-2e^{i\theta}+e^{2i\theta}} = \frac{1}{e^{-i\theta}-2+e^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}-1\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta-1}.$$

先求单位圆周 $|z|=1$ 在 S_w 上面的像。因为

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
w	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$

所以单位圆域内部的像域是从 S_w 上面去掉直线$\left(-\infty,\ -\frac{1}{4}\right)$的区域（如指导图6·22）



指导图6·22

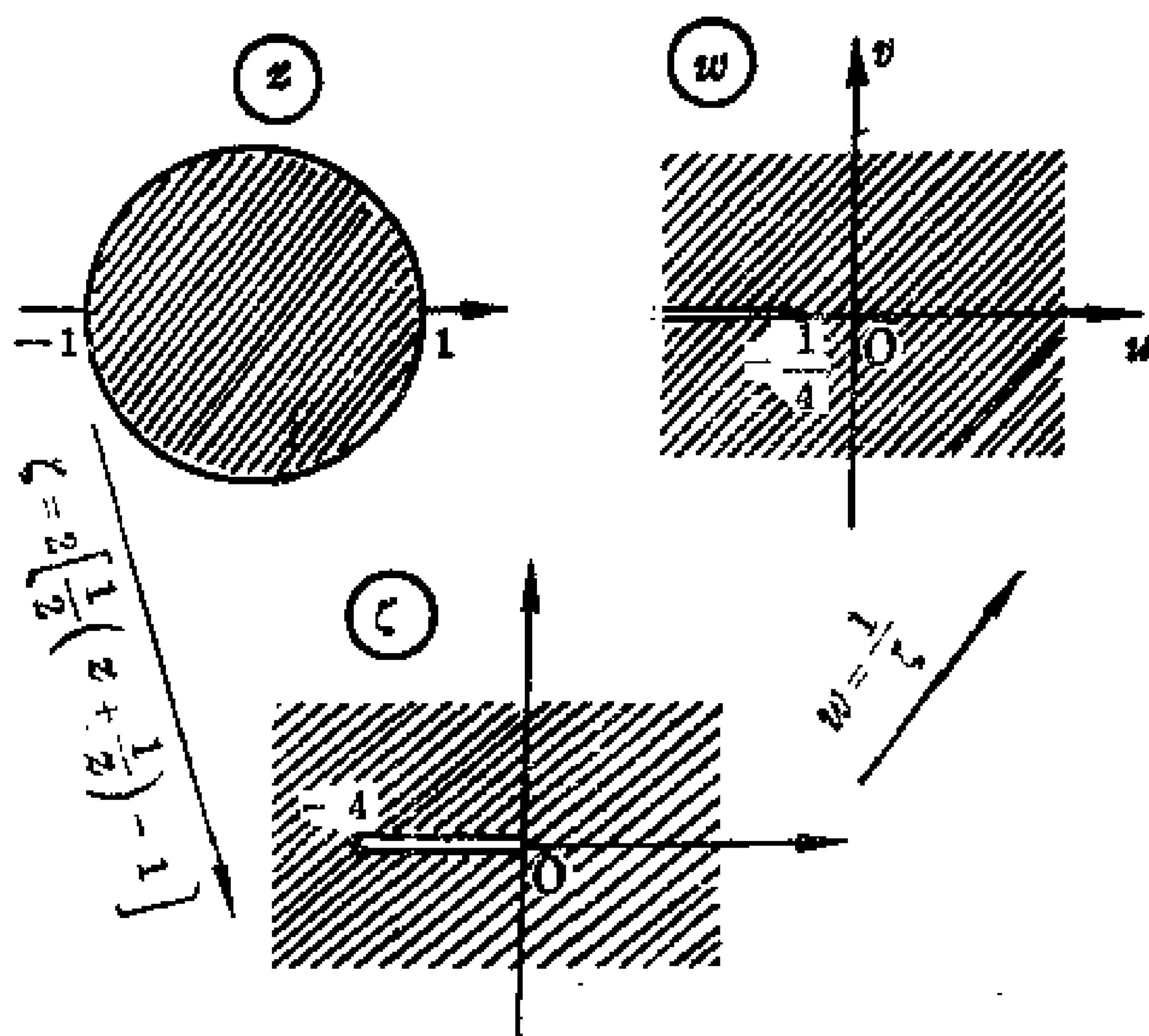
【解法 2】 可以把函数 $w=z(1-z)^{-2}$ 看成下列两个函数的组合：

$$w=\frac{1}{\zeta},\quad \zeta=z+\frac{1}{z}-2$$

而

$$\zeta=z+\frac{1}{z}-2=2\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1\right]$$

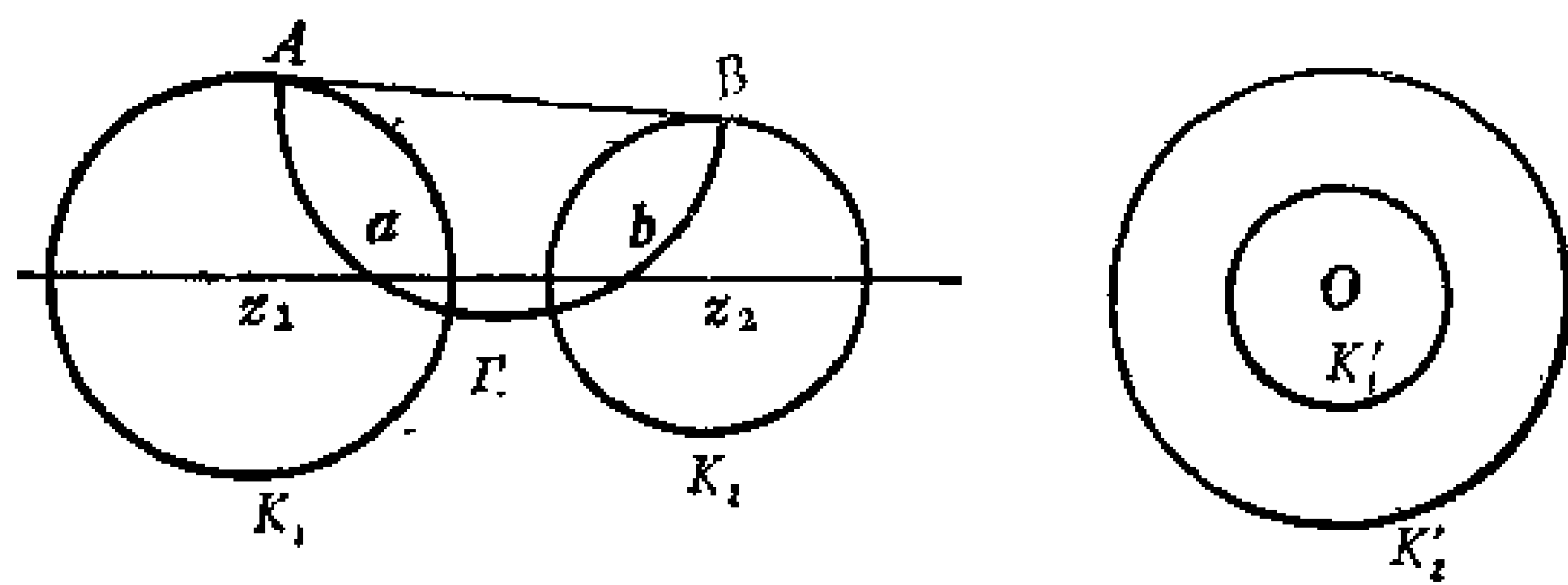
由 Жуковский 函数的映射性质可知，单位圆域内部 $|z|<1$ 被映射成 S_ζ 上面有裂缝 $(-4, 0)$ 的区域。在 S_ζ 的上面，再施以反演映射 $w=\dfrac{1}{\zeta}$，$\zeta=0$ 被映射成 $w=\infty$，$\zeta=-4$ 被映射成 $w=-\dfrac{1}{4}$。因此，映射后的 S_w 上面是有裂缝 $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{4}\right]$ 的区域。上述步骤图示如下：



指导图6·23

7*. 【解】

我们取这两组不相交的偏心圆族中各一个分别记为 K_1，K_2，作 K_1 及 K_2 的公切线 AB，以 AB 为直径作半圆周 Γ；这个半圆周与 K_1 及 K_2 的圆心连线交于 a, b 两点。则点 a 与 b 同时是关于圆 K_1 及圆 K_2 的对称点。这是因为直线 z_1z_2 与圆 K_1 及 K_2 相直交，由 Γ 的作法可知 Γ 也同时与 K_1 及 K_2 相直交。因此，依§6·4 定理 2 可知，点 a 及 b 同时是圆 K_1 及 K_2 的对称点。



指导图6·24

作分式线性函数

$$w=\frac{z-a}{z-b}$$

它将 $z=a$ 点映射成 $w=0$ 点；将 $z=b$ 点映射成 $w=\infty$。由于分式线性函数具有保圆性及对称点不变性，则 K_1 与 K_2 的像必定是 S_w 的上面以 $w=0$ 为心的同心圆 K_1' 及 K_2'（如指导图6·24）．这是因为 K_1 与 K_2的像 K_1' 与 K_2' 必须保持与点 a、b 的像 $w=0$ 及∞对称关系．因此，只有圆心在 $w=0$ 的同心圆才有这种关系。

显然形如

$$w=K\frac{z-a}{z-b}$$

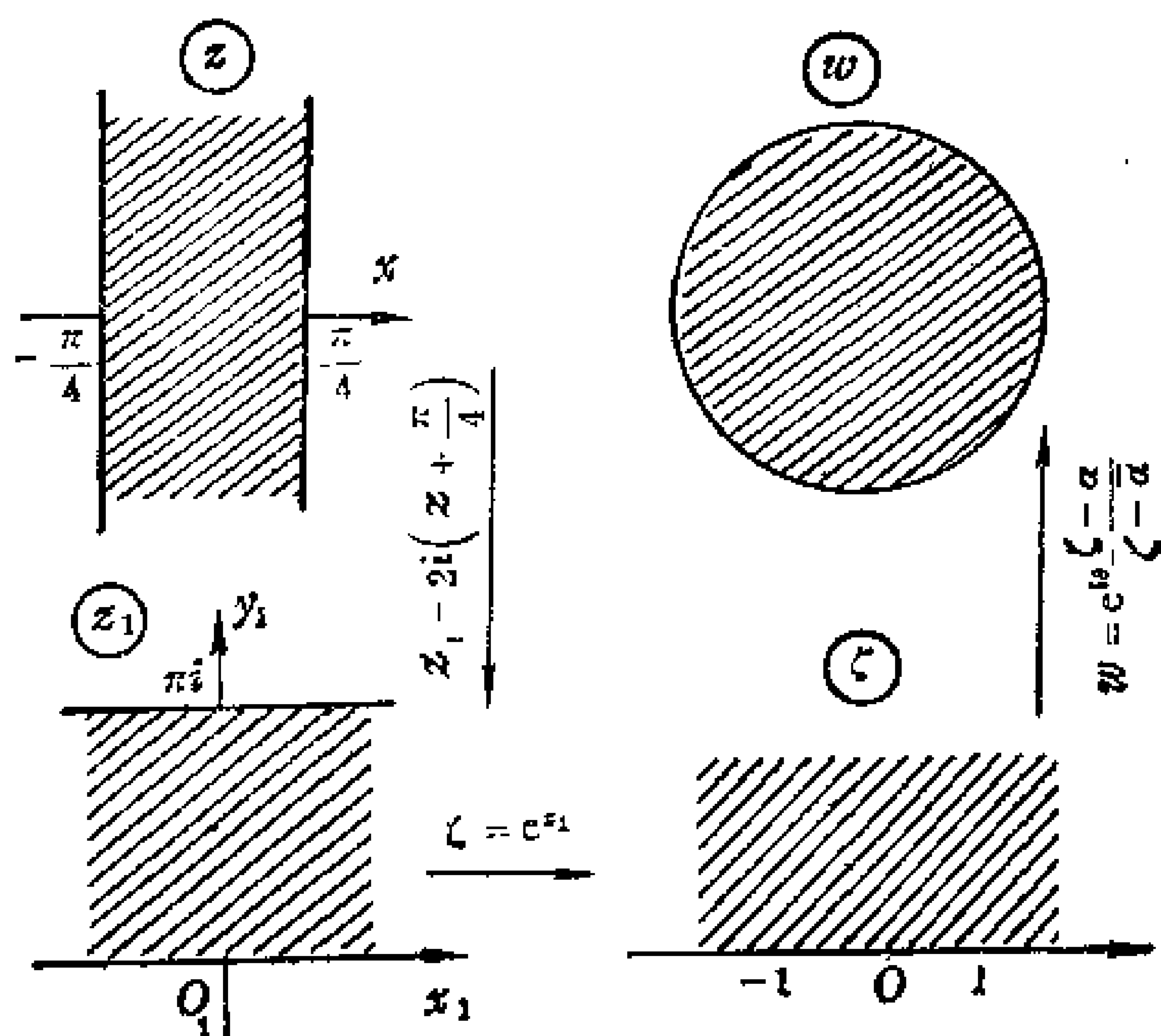
的分式线性映射都具有这种性质，因此映射不是唯一的。

8．【解】

显然，这是映射的第二类问题．我们还是用“看两端，想中间，联系起来找函数”的办法．左端的 z 平面是平行于虚轴的带域；右端的 w 平面是单位圆域内部．因而容易想到这个“中间”是上半平面．

要想把左端的带域映射到上半平面，必须首先将带域变成平行于实轴，宽度为 π 的带域．现将各步映射图示如下：

将各步组合起来并用 z 表示 w，便得



指导图6·25

$$w=e^{i\theta}\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\bar{\alpha}}=e^{i\theta}\frac{ie^{i2z}-\alpha}{ie^{i2z}-\bar{\alpha}}$$

由于所给条件是 S_z 与 S_w 上面的点的对应关系。因此，须将 S_z 上面的三点分别映射到 S_ζ 上面，最后再与 S_w 相对应。

$z=-\frac{\pi}{4}$时，　$\zeta=1$；

$z=\frac{\pi}{4}$时，　$\zeta=-1$；

$z=i\infty$时，　$\zeta=0$。

将 ζ 的三个值分别代入

$$w=e\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\bar{\alpha}}$$

后得到

$$-1 = \frac{1-a}{1-\bar{a}}e^{i\theta} \qquad (1)$$

$$1 = e^{i\theta}\frac{-1-a}{-1-\bar{a}} \qquad (2)$$

$$i = e^{i\theta}\frac{-a}{-\bar{a}} \qquad (3)$$

由上述（1）、（2）、（3）式求出 θ，a，$\bar{a}$。

$$a = i，\ e^{i\theta} = -i，\quad \bar{a} = -i$$

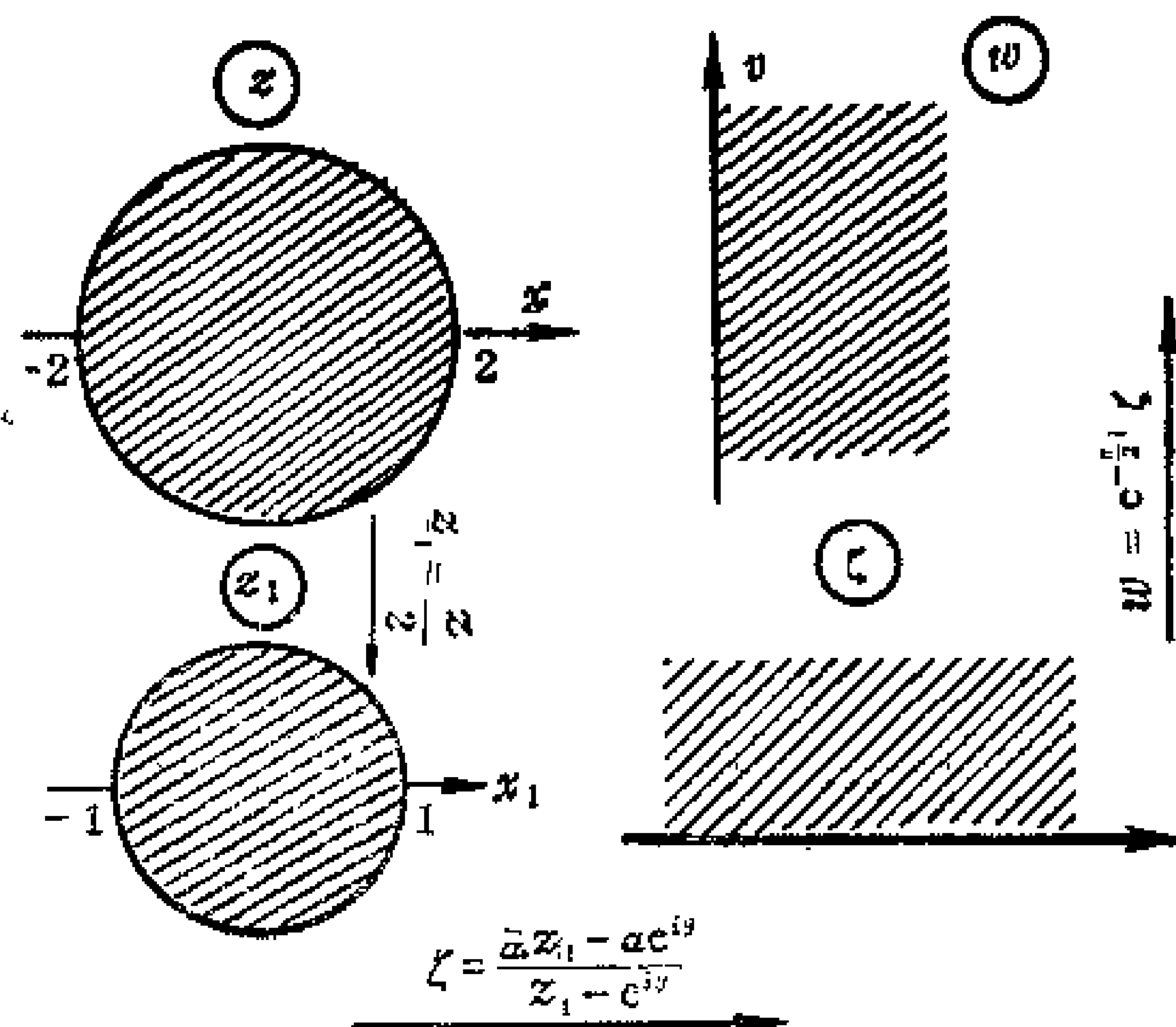
于是所求映射为

$$w = e^{i\theta}\frac{ie^{2zi}-a}{ie^{2zi}-\bar{a}} = -i\frac{ie^{2zi}-i}{ie^{2zi}+i}$$

$$= -i\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1} = \operatorname{tg}z。$$

9. 【解】

我们设法将 S_z 上面圆域：$|z|<2$ 变到上半平面，然后再对上半平面实行一次 $-\frac{\pi}{2}$ 角度的旋转即可，各步映射图示如下：



指导图6·26

将各步组合起来并用 z 表示 w 便有

$$w=-i\frac{\bar{a}z-2ae^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}}\text{其中 } a\in|z|<2.$$

下面根据条件确定 a 及 θ 值

因为 $f(0)=1$，所以 $1=-ia$，即 $a=i$。

由于 $w'(0)=e^{-i\theta}$，所以

$$\arg f'(0)=\arg e^{-i\theta}=-\theta=\frac{\pi}{2}\quad\text{即}$$

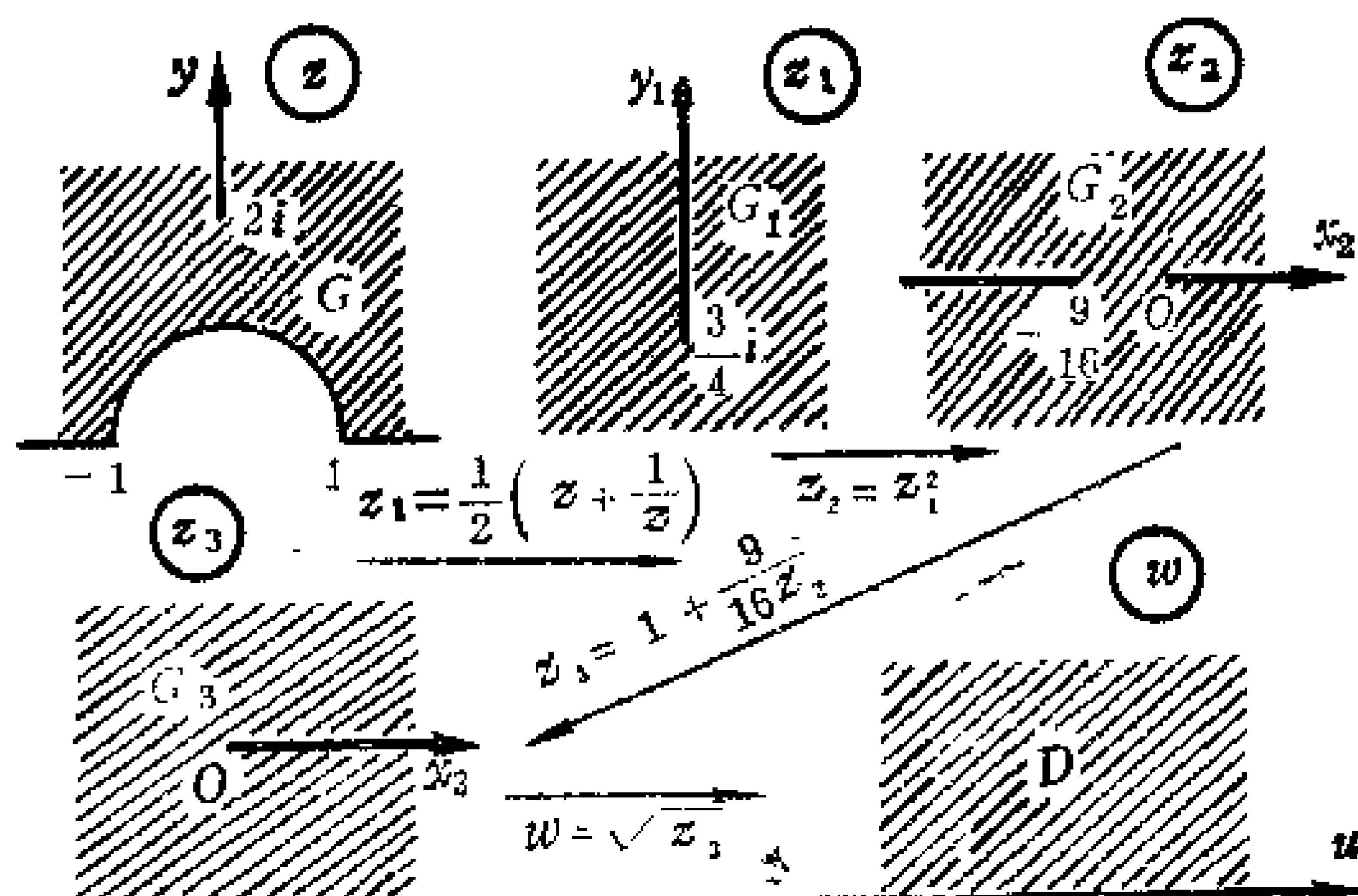
$$\theta=-\frac{\pi}{2}.$$

于是所求之映射为

$$w=-\frac{z-2i}{z+2i}.$$

10. 【解】

函数 $z_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将区域 G 映射成 G_1（见指导图6·27）；函



指导图6·27

数 $z_2=z_1^2$ 将区域 G_1 映射成区域 G_2；函数 $z_3=\dfrac{z_2+\dfrac{9}{16}}{z_2}=1+\dfrac{9}{16z_2}$ 将区域 G_2 映射成区域 G_3；函数 $w=\sqrt{z_3}$的主枝将 G_3 映射成区域 D．各步映射图示如下：

将各步映射组合起来并用 z 表示 w 时便得

$$w=\frac{\sqrt{4z^4+17z^2+4}}{2(z^2+1)}.$$

读者从此题可以看出，一般地说来，在圆域（包括半圆域）的内外部，如有裂缝时，可试用 Жуковский 函数$w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$．经此映射后的区域基本上都是半平面上具有裂缝的区域．

本题由 z_2 平面到 z_3 平面这一步映射需要较高的技巧与经验．

11．【证明】

易知．由于 $|f(z)|<1$，故 $|w_0|<1$．于是 S_z 及 S_w 上面的单位圆域内互相对应．而 $z=z_0$ 及 $w=w_0$ 对应于原点的线性变换为：

$$\zeta=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z},\quad \omega=\frac{w-w_0}{1-\bar{w}_0w}$$

解出 $$z=\frac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}$$

故有

$$\omega=\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0f(z)}=\frac{f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}\right)-w_0}{1-\bar{w}_0f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}\right)}.$$

设 $\omega=F(\zeta)$，则 $F(\zeta)$于单位圆域内 $|\zeta|<1$解析，$|F(\zeta)|<1$，且 $F(0)=0$．故 $\zeta=0$除可能为奇点外$\dfrac{F(\zeta)}{\zeta}$于 $|\zeta|<1$ 内解析．从而由解析函数最大模原理可知，当 $|\zeta|\leqslant r<1$ 时

$$\left|\frac{F(\zeta)}{\zeta}\right| \leqslant \frac{1}{r}$$

令 $r \to 1$，则

$$\left|\frac{F(\zeta)}{\zeta}\right| \leqslant 1$$

故有

$$\left|\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|.$$

显然，等号成立仅限于 $F(\zeta)=e^{i\theta}\zeta$ 情形。

12．【证法 1】

我们知道，由于单位圆域 $|z|<1$ 到单位圆域 $|w|<1$，且 $|z|<1$内的任意点 $z=a$ 映射成 $|w|<1$内的任意点 b时的分式线性映射为

$$\frac{z-a}{1-\bar{a}z}=e^{i\theta}\frac{w-b}{1-\bar{b}w}$$

对上式两端分别对 z 及 w 取微分，则有

$$\frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}dz=e^{i\theta}\frac{1-|b|^2}{1-\bar{b}w}dw$$

令 $z\to a$，则 $w\to b$，所以

$$\frac{dz}{1-|a|^2}=e^{i\theta}\frac{dw}{1-|b|^2}$$

故

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2}=\frac{|dw|}{1-|w|^2}.$$

【证法 2】因为

$$|w|^2=w\cdot\overline{w}=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot e^{-i\theta}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}}$$

$$=\frac{|z|^2-a\bar{z}-\bar{a}z+|a|^2}{1-a\bar{z}-\bar{a}z+|a|^2|z|^2}$$

所以

$$1-|w|^2=\frac{1-|z|^2-|\alpha|^2+|\alpha|^2|z|^2}{1-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z+|\alpha|^2|z|^2}$$

$$=\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)}{(1-\bar{\alpha}z)(1-\alpha\bar{z})} \tag{1}$$

$$\frac{dw}{dz}=e^{i\theta}\frac{1-\bar{\alpha}z+(z-\alpha)\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha}z)^2}=e^{i\theta}\frac{1-|\alpha|^2}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$$

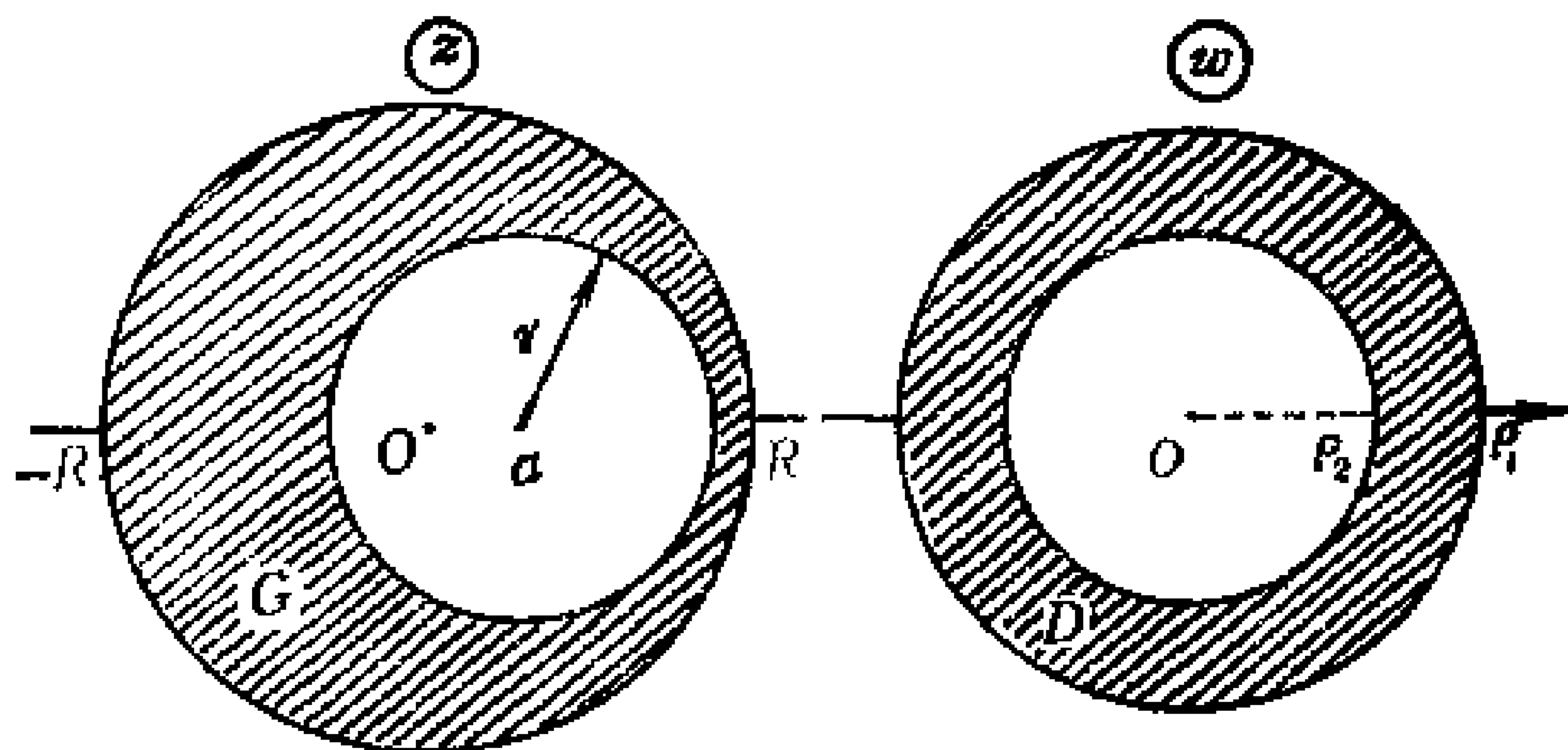
所以

$$|dw|=\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}|dz|$$

13. 【证明】

我们假设将G共形地映射成D的分式线性函数为 $w=f(z)$。

如果 $w=f(z)$ 将圆周 $|z|=R$ 映射成圆周 $|w|=\rho_1$，则圆周 $|z|=R$ 的直径 $[-R,R]$在 $w=f(z)$ 映射下，必被映射成与圆周 $|w|=\rho_1$相直交的圆弧A，由于圆周 $|z-a|=r$与直径 $[-R,R]$ 相直交，所以在 $w=f(z)$映射下， $|z-a|=r$的像 $|w|=\rho_2$也与圆弧A直交。因此，圆弧A必是圆周 $|w|=\rho_1$的直径。所以在 $w=f(z)$ 映射下，S_z 上面的四点 $z=R$，$-R$，$a+r$，$a-r$ 分别与 S_w 平面上的点四 $w=\rho_1$，$-\rho_1$，ρ_2，$-\rho_2$相对应。



指导图6·28

由于分式线性映射具有四个点的复比不变性，所以

$$\frac{\dfrac{R-a-r}{-R-a-r}}{\dfrac{R-a+r}{-R-a+r}}=\frac{\dfrac{\rho_1-\rho_2}{-\rho_1-\rho_2}}{\dfrac{\rho_1+\rho_2}{-\rho_1+\rho_2}}$$

整理得

$$\frac{(R-r)^2-a^2}{(R+r)^2-a^2}=\frac{(\rho_1-\rho_2)^2}{(\rho_1+\rho_2)^2}$$

由此可得

$$\frac{Rr}{(R+r)^2}\leqslant\frac{Rr}{(R+r)^2-a^2}=\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2} \qquad (1)$$

这里令 $\dfrac{R}{r}=p$, $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=q$，则

$$\frac{p}{(1+p)^2}\leqslant\frac{q}{(1+q)^2}$$

取其倒数

$$p+\frac{1}{p}\geqslant q+\frac{1}{q}.$$

函数 $x+1/x$ 当$1\leqslant x$时单调增加，所以如果注意 $p>1$，$q>1$，则得 $q\leqslant p$。这就证得了不等式。

等号成立是在（1）式中等号成立，因而是在 $a=0$ 的时候。

14. 【解】

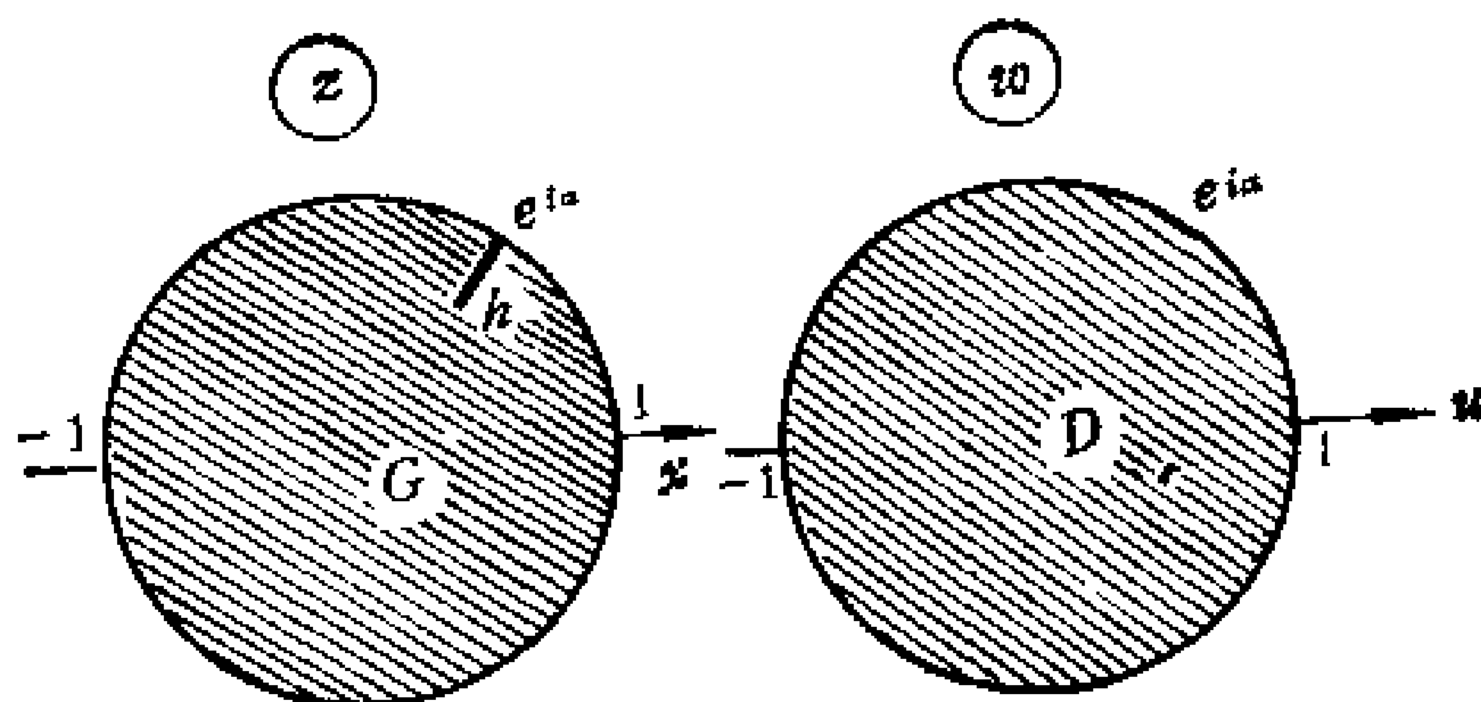
设 S_z 的区域G是从单位圆域：$|z|<1$ 中去掉线段：$[(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}]$后的区域。

将这样的区域G映射到单位圆域 D: $|w|<1$的函数可使用Жуковский 函数。

如何根据“看两端，想中间，联系起来求函数”的方法寻求映射函数呢？

首先把 S_z 里的圆作一个角度为 $-\alpha$的旋转：$z_1=e^{-i\alpha}z$。再应用Жуковский 函数





指导图6·29

$$z_2=\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)$$

便得到一个去掉了线段〔−1，1+$2h_1$〕的平面 S_{z2}. 其中 $h_1=h^2/4(1-h)$. 因为点 $z_1=1-h$ 在此映射下的像是点

$$z_2=\frac{1}{2}\left(1-h+\frac{1}{1-h}\right)=1+\frac{h^2}{2(1-h)}$$

用线性变换

$$z_3=\frac{z_2-h_1}{1+h_1}$$

把这个线段变成〔−1,1〕.

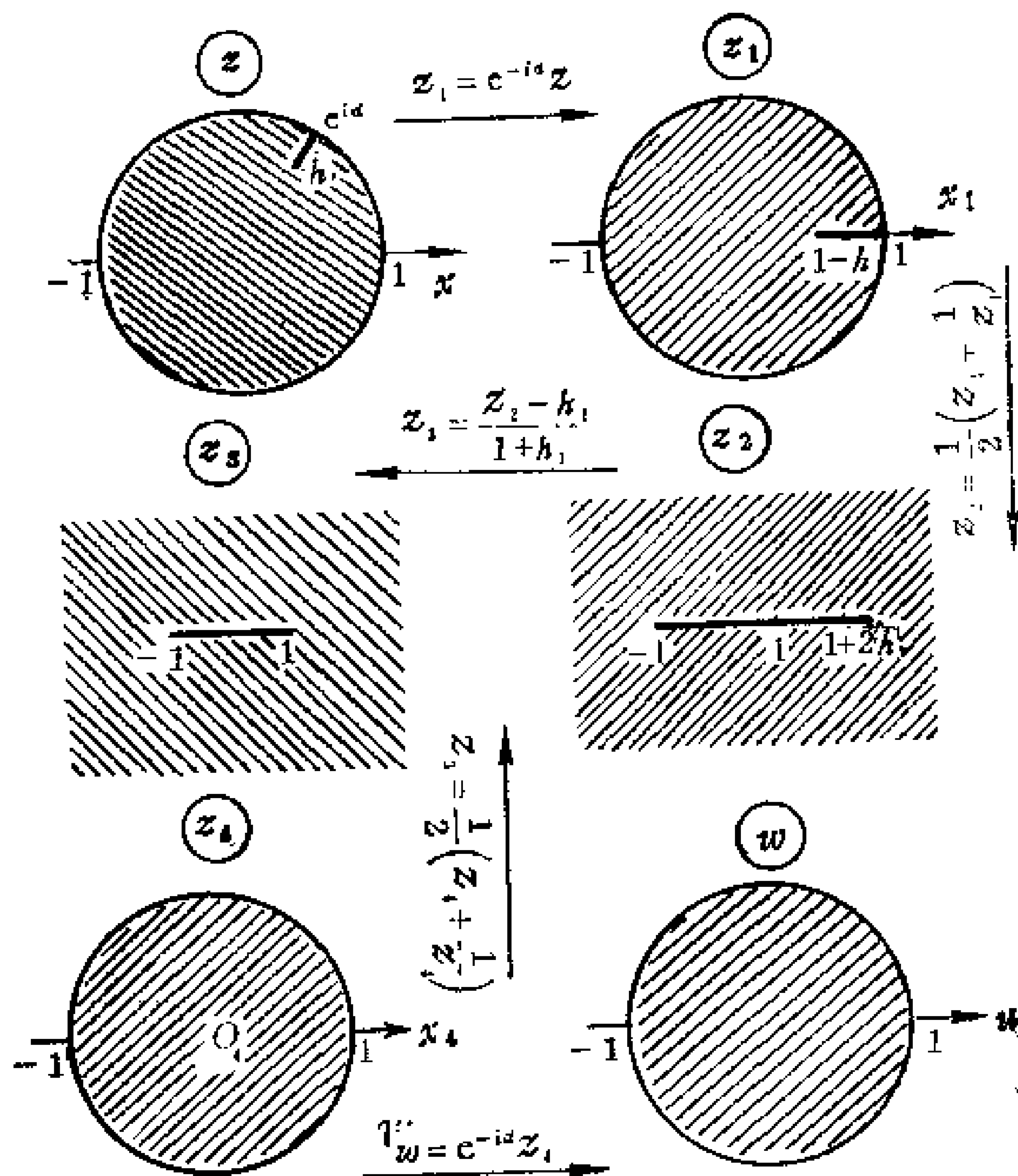
再使用变换 $z_4=e^{-i\alpha}w$，使$|w|<1$作一个旋转，并应用映射

$$z_3=\frac{1}{2}\left(z_4+\frac{1}{z_4}\right)$$

将此已旋转过的圆域变成那条线段〔−1，1〕的外部. 从 $z_3=(z_2-h_1)/(1+h_1)$ 和 $z_3=\frac{1}{2}\left(z_4+\frac{1}{z_4}\right)$中消去 z_3，再代回原来的变数 z与 w，便得到所求之映射

$$(1+h_1)\left(e^{i\alpha}w+\frac{e^{i\alpha}}{w}\right)=\left(e^{-i\alpha}z+\frac{e^{i\alpha}}{z}\right)-2h_1.$$

各步映射图示如下：



指导图6·30

在这个映射过程中，我们取 S_{z3} 去掉线段〔-1,1〕的区域作为"中间"。

从这个例子中可以想到：如果在单位圆域内的半径方向上有截口时，往往使用 Жуковский 函数将其变成去掉某一线段的区域，然后再通过相似变换映射成去掉线段〔-1,1〕的区域，最后使用 Жуковский 反函数变成单位圆域内部。由此再到其他区域的映射那就容易得多了。

15. 【解】

由于Жуковский 函数

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad (1)$$

将圆周 $|z|=r_0$ （>1)映射成椭圆周

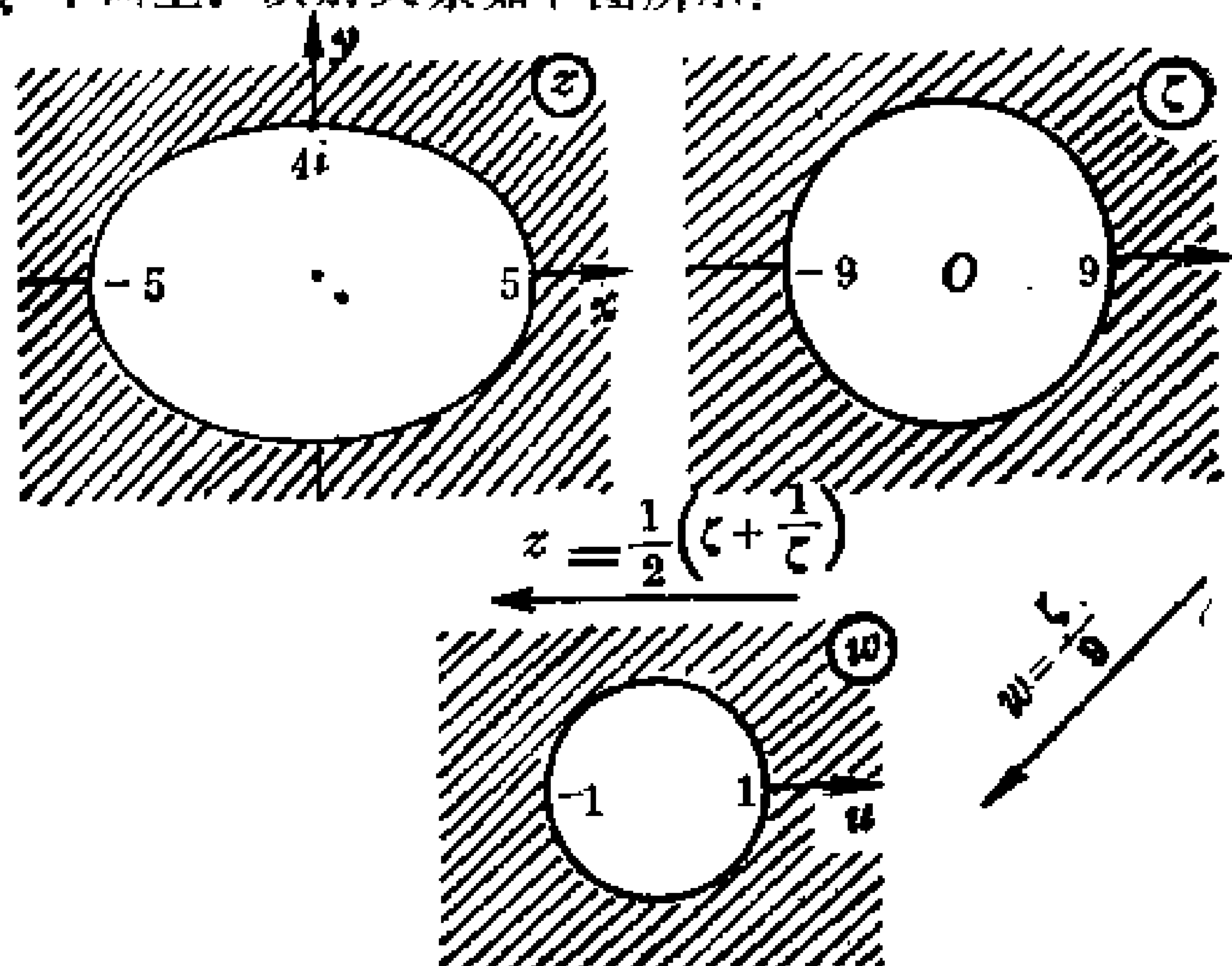
$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)^2\right]}+\frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)\right]}=1 \qquad (2)$$

由（2）式及所给条件可知

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right) \\ b=\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right) \end{cases}$$

所以 $r_0=9$

设椭圆：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$（在 S_z 平面上），圆周：$|\zeta|=r_0=9$ 是在 S_ζ 平面上。映射关系如下图所示：



指导图6·31

将各步映射组合起来并用 z 表示 w 便得

$$w=\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{9}$$

第七章 解 析 开 拓

本章着重讨论解析函数的区域的扩大问题．也就是讨论当一个已知函数在一个区域内解析时，这个函数能否在更大的区域内解析呢？如果说能，则应在什么条件下开拓成为更大的区域，以使函数在更大区域内解析呢？解析开拓的方法是什么等等，我们先从解析开拓概念谈起．

§7·1 解析开拓的一般概念

1．解析开拓原理

设区域 $D\subset S_z$，$f(z)$是D内的单值解析函数，这种区域及其函数的组合，称为一个解析元素，记为：

$\{D,f(z)\}$．

两个解析元素当且仅当其区域重合，于其上对应的函数值相等时，才是恒等的

设$\{D,f(z)\}$与$\{G,F(z)\}$为两个解析元素，且满足下列条件：

（1） 区域 $G\supset D$，是比D更大的区域；

（2） $F(z)=f(z)$，$z\in D$．

则称函数 $F(z)$为 $f(z)$在区域G内的解析开拓，并且这样的开拓是唯一的．

事实上，若在包含这区域D的更大区域G内有两个不同的函数$F(z)$与 $g(z)$为解析．并且在D内 $F(z)=f(z)$，$g(z)=f(z)$． 由解析函数的唯一性定理可知，在区域G内必有 $F(z)=g(z)$． 这

就是说，$f(z)$的解析开拓是唯一的。

【例 1】 函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在区域 $D=\{z: |z|<1\}$ 内解析，而函数 $F(z)=\frac{1}{1-z}$ 是 S_z 平面内除去 $z=1$ 的区域 $G=\{S_z\sim(1)\}$ 内解析，而 $G\supset D$ 是比 D 更大的区域，并且当 $z\in D$ 时，$F(z)=f(z)$，故 $F(z)=\frac{1}{1-z}$ 就是函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在区域 $G\supset D$ 内的解析开拓。

在解析开拓的实践中常用以下的定理：

定理 1 （解析开拓原理）设$\{G_1,f_1(z)\}$，$\{G_2,f_2(z)\}$为两个解析元素，且满足如下条件：

（1）区域 G_1 与 G_2 互不包含；

（2）$D=G_1\cap G_2$，且 $D\neq\phi$；

（3）$f_1(z)=f_2(z)$，$z\in D$

则函数

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & \text{当 } z\in G_1; \\ f_2(z), & \text{当 } z\in G_2; \\ f_1(z)=f_2(z), & \text{当 } z\in D; \end{cases}$$

在区域 $G=G_1\cup G_2$ 内解析，即$\{G,F(z)\}$也是一个解析元素。

【证明】 因为在G_1内 $F(z)=f_1(z)$，在 G_2内 $F(z)=f_1(z)$，而 $f_1(z)$，$f_2(z)$分别在 G_1 与 G_2 内解析，$G_1\cap G_2=D\neq 0$，且$f_1(z)=f_2(z)$，$z\in D$，因而 $F(z)$在 $G=G_1\cup G_2$ 内解析。 （证毕）

这里的区域G，是既包含G_1又包含G_2的更大区域。而在G_1内 $F(z)=f_1(z)$，在 G_2 内，$F(z)=f_2(z)$，所以由前面的解析开拓定义可知，函数 $F(z)$就是$f_1(z)$在 G 内的解析开拓，自然又是 $f_2(z)$ 在 G 内的解析开拓。在这种意义下，我们又称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在区域 G_2 内的直接解析开拓。亦称 $f_1(z)$为 $f_2(z)$在 G_1 内的直接

解析开拓，并称$\{G_1, f_1(z)\}$，$\{G_2, f_2(z)\}$为互为直接解析开拓。

【例 2】设

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \qquad G_1: |z|<1.$$

$$f_2(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n, \quad G_2: |z-i|<\sqrt{2}.$$

易知：在 G_1 内 $f_1(z)=\dfrac{1}{1-z}$，在 G_2 内 $f_2(z)=\dfrac{1}{1-z}$。

$\{G_1, f_1(z)\}$，与$\{G_2, f_2(z)\}$为两个解析元素，且满足：

（1）G_1与 G_2 互不包含，

（2）$D=G_1\cap G_2\neq\phi$，

（3）$f_1(z)=f_2(z)=\dfrac{1}{1-z}$，$z\in D$

所以函数

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z)=\dfrac{1}{1-z}, & z\in G_1\\ f_2(z)=\dfrac{1}{1-z}, & z\in G_2\\ f_1(z)=f_2(z)=\dfrac{1}{1-z}, & z\in D\end{cases}$$

在 $G=G_1\cup G_2$ 内解析，即$\{G, F(z)\}$为解析元素，$F(z)$ 为 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$在区域G内的解析开拓。$\{G_1, f_1(z)\}$与$\{G_2, f_2(z)\}$互为直接解析开拓。

上面在定义解析开拓概念时，我们假设D是一个区域。现在假设 l 为平面 Sz 上的一条曲线，在 l 上定义一个函数 $f(z)$，$l\subset G$，$G\subset Sz$。如果在G内存在一个解析函数 $F(z)$，且在 l 上 $F(z)=f(z)$，我们亦称 **$F(z)$为 $f(z)$在区域 G 内的解析开拓**。在特殊情况下，如果 l 为实轴上的线段$[x_0, x]$，并且用 $f(x)$ 表示对应于这些点的函数值，我们可以把 $f(x)$ 开拓到复数平面 Sz，并且这种开

拓也是唯一的.

【例 3】正如§ 2·3—7中所论，在实变函数中，指数函数 e^x，三角函数 $\sin x$，$\cos x$ 等在实轴上及对数函数 $\log x$，反正弦函数 $\arcsin x$，分别在 $|x-1|<1$，$|x|<1$内展开成幂级数为：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \log x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$$

我们把上述诸级数的变量 x，形式地换成变量 z，就相应地得到复变量的幂级数，它们是：

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ ,\quad f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$f_3(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ f_4(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{n},$$

$$f_5(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2n!\,(2n+1)}z^{2n+1}.$$

前三个幂级数在整个复平面 S_z 上都收敛，后两个在相应的定义域 $|z-1|<1$, $|z|<1$内收敛，并且它们所表示的函数在相应区域内解析．前三个都在平面 S_z 上的每一点解析；后两个在圆域 $|z-1|<1$, $|z|<1$内解析．因为在实轴上，函数 $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_4(z)$, $f_5(z)$分别与 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $\arcsin x$ 重合，由定义可知，它们就是这些相应函数在复数域中的解析开拓，正是由于这个原因，我们才称 $f_1(z)$为指数函数，记为 e^z；称 $f_2(z)$为正弦函数，$f_3(z)$为余弦函数，$f_4(z)$为对数函数，$f_5(z)$为反正弦函数，依次用 $\sin z$, $\cos z$, $\log z$, $\arcsin z$ 表示。

以前我们提到的直接解析开拓概念，是两个区域之“交”是区域。如果这两个区域之交为空集，即不相交，但有一段公共边界。我们相应地就有下面的名为连续开拓的定理，并在此基础上，给定越过弧直接解析开拓的概念。

定理 2 （连续开拓原理） 设$\{G_1, f_1(z)\}$与$\{G_2, f_2(z)\}$为两个解析元素，并且满足下列条件：

（1）$G_1 \cap G_2 = \phi$，但有一段公共边界，设除去边界的两个端点后的开弧记为 l，

（2）$f_1(z)$在 $G_1 \cup l$ 上连续，$f_2(z)$在 $G_2 \cup l$ 上连续，

（3）$f_1(z) = f_2(z), z \in l$。

则函数

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1; \\ f_2(z), & z \in G_2; \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in l. \end{cases}$$

在 $G = G_1 \cup l \cup G_2$ 上解析，即$\{G, F(z)\}$也是解析元素。

【证明】 易知，$F(z)$在区域 $G = G_1 \cup l \cup G_2$ 内是连续的，依 Cauchy 定理我们来证：$F(z)$沿G内任一条闭路C（C的内部属于G）的积分等于零。

如果 $C \subset G_1$ 或 $C \subset G_2$，则由 Cauchy 积分定理有：

$$\int_c F(z)\,dz = 0.$$

如果 $c = c_1 \cup c_2$，而 $c_1 \subset G_1$，$c_2 \subset G_2$，l 的一段弧 $r \subset c$（如图7·1）则由 Cauchy 积分定理有：

$$\int_{c_1 \cup r} F(z)\,dz = 0,$$

$$\int_{c_2 \cup r} F(z)\,dz = 0$$

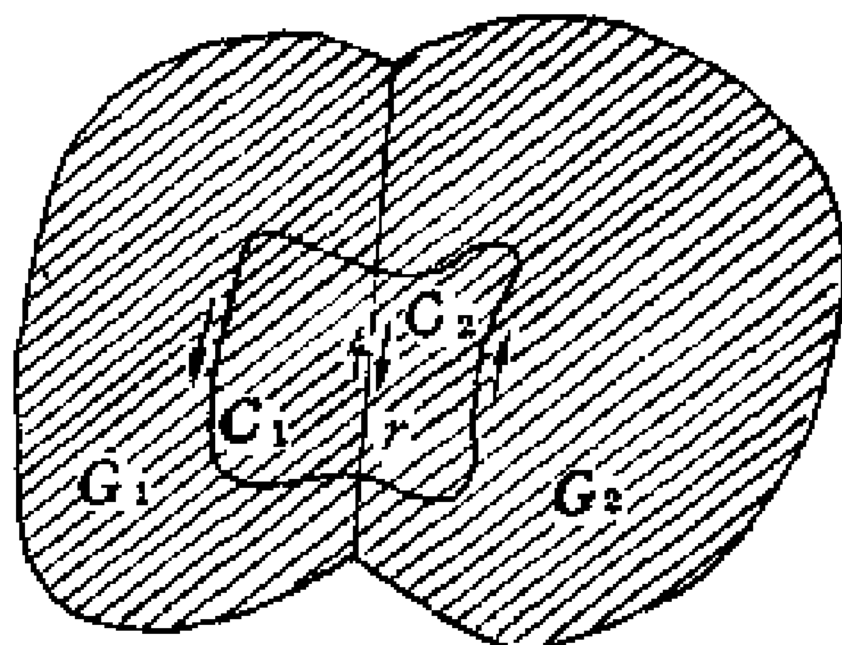


图7·1

及

$$\int_C F(z)dz = \int_{C_1 \cup r} F(z)dz + \int_{C_2 \cup r} F(z)dz = 0$$

由 morcra 定理，$F(z)$在区域 $G = G_1 \cup l \cup G_2$ 内解析。即

$$\{G_1 \cup l \cup G_2, F(z)\}$$

为一解析元素。（证毕）

这里的 $F(z)$为G内解析函数，且在 $l \subset G$ 上有 $F(z) = f_1(z) = f_2(z)$，可见 $F(z)$为 $f_1(z)$与 $f_2(z)$在G内的解析开拓。在这种意义下，我们称 $f_2(z)$为 $f_1(z)$ 在 G_2 的**越过弧的直接解析开拓**，$f_1(z)$为 $f_2(z)$在 G_1 内的越过弧的直接解析开拓，亦称 $\{G_1, f_1(z)\}$ 与$\{G_2, f_2(z)\}$互为直接解析开拓。

2. 完全解析函数

以前我们在定义解析函数时，都是局限于某一个特定的区域，解析开拓原理可以使我们有可能把定义于一个特定区域的解析函数，扩大其定义区域，并得到更大区域内的解析函数。

一般地说，设有一串解析元素 $\{G_1, f_1(z)\}$，$\{G_2, f_2(z)\}\cdots\{G_k, f_k(z)\}\cdots\{G_n, f_n(z)\}$。如果其中任意相邻的两个元素都互为直接解析开拓，那么这些解析元素便组成一个解析元素链，这个链把开始元素$\{G_1, f_1(z)\}$与最后的元素 $\{G_n, f_n(z)\}$ 连接起来。我们也把 $\{G_1, f_1(z)\}$与 $\{G_n, f_n(z)\}$ 这两个解析元素称为**互为解析开拓**。同样，解析元素串中的每一个，都可以看成是另一个的解析开拓。其中每两个元素都可以称为互为解析开拓。

由解析开拓原理，我们不难想到，如果给定一组解析元素$\{G_1, f_1(z)\}, \cdots, \{G_n, f_n(z)\}$ 其中任意两个解析元素经过一条链互为解析开拓，那么这组解析元素便确定一个在 $G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ 内的解析函数 $F(z)$，我们称 $F(z)$ 为**一般解析函数**。我们不难想到一个一般解析函数，它的每一个元素还可能存在解析开拓，解析开拓还可能再存在解析开拓，一直到不能再开拓为止。如果一个一般解析函数 $F(z)$

包含其中任意一个解析元素的一切解析开拓，那么我们称这个一般解析函数 $F(z)$ 为完全解析函数，其中不能再扩大的区域 G，称为它的存在域。G 的边界称为 $F(z)$ 的自然边界，显然 G 的边界就是由完全解析函数 $F(z)$ 的奇点所组成的。

【例 4】 函数 $e^z, \sin z, \cos z$ 等都是在复平面上的一般解析函数，而且是完全解析函数，它们的自然边界都为 $z=\infty$。

【例 5】 函数 $F(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的自然边界是由无穷多个点 $z=n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 及 $z=\infty$ 所组成的。

【例 6】 函数 $F(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}+\cdots+\dfrac{1}{z-n}$ 的自然边界是由 $1, 2, \cdots n$ 等 n 个极点组成的。

【例 7】 函数 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}=z+z^2+z^4+\cdots+z^{2^n}+\cdots$ 是单位圆域：$|z|<1$ 内的完全解析函数，$|z|<1$ 为其存在域，$|z|=1$ 为其自然边界。

事实上级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ 的收敛半径为 $R=1$，故在单位圆 $|z|=1$ 的内部，$F(z)$ 为一个解析函数，只须证 $F(z)$ 的奇点稠密于单位圆周 $|z|=1$ 上即可。

为此，先证：点 $z=1$ 为 $F(z)$ 的一个奇点。即证当 $z\to 1$ 时，$F(z)\to\infty$。事实上，令

$z=x$，$0<x<1$，则

$$F(x)=x+x^2+\cdots+x^{2^{n-1}}+\cdots>x+x^2+\cdots+x^{2^{n-1}}$$

故

$$\lim_{x\to 1} F(x)\geqslant \lim_{x\to 1}(x+x^2+\cdots+x^{2^{n-1}})=n$$

由 n 的任意性，故 $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=\infty$。

即 $z=1$ 为 $F(z)$ 的一个奇点。

其次，由于 $F(z)=z+(z^2+\cdots+z^{2^n}+\cdots)$

$$=z+f(z^2)$$

$F(z)$在 $z^2=1$，即 $z=\pm1$处不解析。同样，由于：

$$F(z)=z+z^2+(z^4+\cdots+z^{2^n}+\cdots)$$
$$=z+z^2+f(z^4).$$

$F(z)$在 $z^4=1$ 上的点也是 $F(z)$的奇点。以此类推，对于任意正整数 n，凡能满足 $z^{2^n}=1$的点均为 $F(z)$的奇点，并且点

$$z_k=e^{\frac{2k\pi i}{2^n}}\ (k=0,1,2,\cdots 2^n-1;\ \ n=1,2,\cdots)$$

稠密于圆周$|z|=1$上。故 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$不能向单位圆周$|z|=1$ 之外开拓。故$|z|<1$为 $F(z)$的存在域，$|z|=1$为 $F(z)$的自然边界，$F(z)$为$|z|<1$内的完全解析函数。

在解析开拓中，我们自然要解决这样两个问题：

1）如果已知一个解析元素$\{G_1,f_1(z)\}$，如何知道它能或不能向另一个区域 G_2 内解析开拓？如果能，将如何去求这个开拓函数 $f_2(z)$呢？

2）如果已知一个完全解析函数的一个元素，如何去求其他一切可能的解析开拓？从而唯一地确定这个完全解析函数？

这里采用幂级数法和对称原理法。

§7·2 解析开拓的一般方法——幂级数法

设给定一个解析元素$\{G_1,f_1(z)\}$，$z_1\in G_1$ 是任意一点，则 $f_1(z)$在 z_1 的邻域 $B(z_1\rho)$可以展开成幂级数：

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(1)}(z-z_1)^n \tag{1}$$

其中 $C_n^{(1)}=\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(z_1)$。这时有两种可能性：

其一，设级数（1）的收敛半径$R_1=\infty$，这时级数（1）在平面 S_z 的每一点都收敛，其和函数在平面 S_z 上处处解析，且在G_1内与$f_1(z)$相同，因此它也是$f_1(z)$在 G_1 以外的解析开拓。

其二，如果级数（1）的收敛半径 R_1 为一有限正数时，我们在级数(1)的收敛圆 $\Gamma_1=\{z:|z-z_1|<R_1\}$内取一异于 z_1 的点 z_2，并在 z_2 的邻域 $B(z_2,\rho)$内把 $f_1(z)$展成幂级数

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(2)}(z-z_2)^n \tag{2}$$

其中 $C_n^{(2)}=\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(z_2)$。

如果级数（2）的收敛半径为 R_2，则 R_2 一定满足不等式：

$$R_2\geqslant R_1-|z_2-z_1| \tag{3}$$

但无论如何，R_2 不能大于 $R_1+|z_2-z_1|$，也就是级数（2）的收敛圆不能全包含级数（1）的收敛圆加上它的边界。不然的话与级数（1）的收敛半径为 R_1 的假设相矛盾。

当（3）式的等号成立时，即 $R_2=R_1-|z_2-z_1|$时，级数（2）所确定的函数值与级数（1）相同。因此级数（2）并不代表新的东西。这时两圆周的切点ζ不是$f_1(z)$的解析点，而是$f_1(z)$的一个奇点。因为，沿着半径从 z_1 到 z_2 的方向，$f_1(z)$ 不能进行开拓了。（如图7·2(A)）

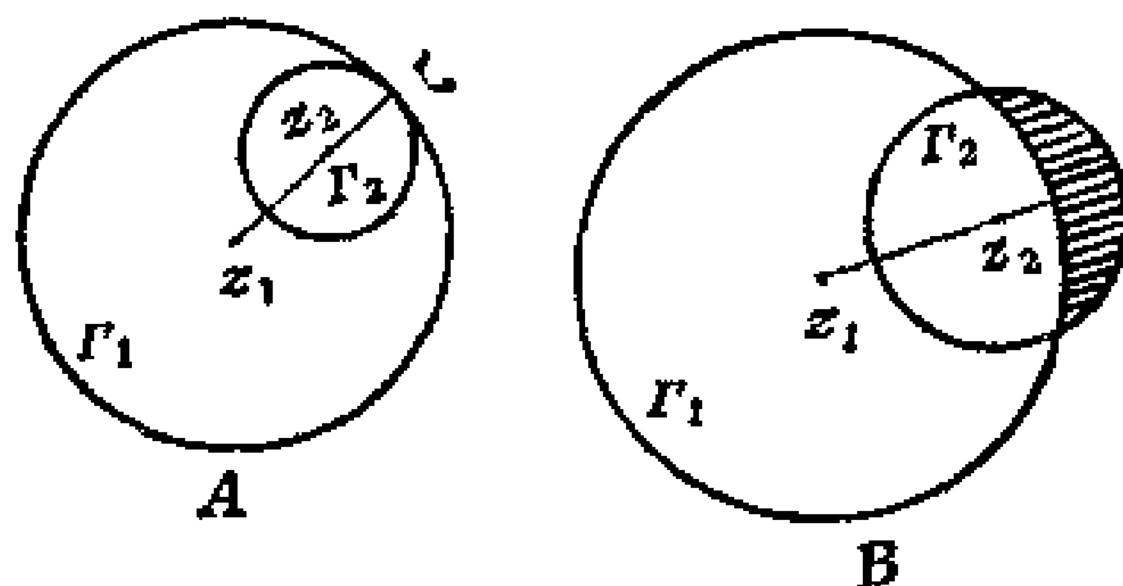


图7·2

当（3）式的不等号成立时，即当 $R_2>R_1-|z_2-z_1|$时，则新

的收敛圆 $\Gamma_2: |z-z_2|<R_2$ 就超出了原来的收敛圆 $\Gamma_1: |z-z_1|<R_1$（如图7·2B），于是级数（2）在 Γ_2 内表一解析函数 $f_2(z)$，且 $f_2(z)=f_1(z)\ z\in\Gamma_1\cap\Gamma_2\neq 0$。因而 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 Γ_2 内沿半径从 z_1 到 z_2 的方向的解析开拓。

再在 Γ_2 内任取一点 $z_3\neq z_2$，并在 z_3 点的邻域内把 $f_2(z)$ 展开成幂级数

$$f_3(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(3)}(z-z_3)^n \qquad (4)$$

其中 $C_n^{(3)}=\frac{1}{n!}f_2^{(n)}(z_3)$。

设级数（4）的收敛圆为 $\Gamma_3=\{z: |z-z_3|<R_3\}$，当 $R_3>R_2-|z_3-z_2|$ 时，级数（4）在 Γ_3 内表示着一个解析函数 $f_3(z)$，且有 $f_3(z)=f_2(z)$，$z\in\Gamma_2\cap\Gamma_3\neq\phi$。因而 $f_3(z)$ 为 $f_2(z)$ 在 Γ_3 内沿半径从 z_2 到 z_3 方向的解析开拓。继续不断地进行，就能得到 $\{\Gamma_1, f_1(z)\}$ 的所有解析开拓。也就得到了 $\{G_1, f_1(z)\}$ 的所有可能的解析开拓，即沿所有可能方向进行开拓。再把这些函数从重新得的区域向一切可能方向进行开拓，如此不断的进行，一直开拓到不能再开拓为止。最后将得到一个更大区域 G 上的解析函数 $F(z)$，$F(z)$ 便是完全解析函数。G 就是 $F(z)$ 的存在域，G 的边界为 $F(z)$ 的自然边界。

用幂级数法开拓，必须注意两个问题：

1）如果级数（1）的和函数 $f_1(z)$ 在收敛圆 Γ_1 内的任何方向都不能进行开拓，则此级数的收敛圆便是和函数 $f_1(z)$ 的存在域，$f_1(z)$ 便是完全解析函数，圆周便是 $f_1(z)$ 的自然边界。

2）由于函数的幂级数展开式的收敛圆周上，至少应有一个奇点。所以在收敛圆内所定义的解析函数 $f_1(z)$ 并不能向任何方向都可以进行解析开拓。如沿半径从圆心到奇点的方向就不能进行解析开拓。

【例 8】我们仍以函数

$$f_1(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

为例。

由于 $f_1(z)$ 是定义于 $|z|<1$ 的解析函数，其值为 $\frac{1}{1-z}$，如果在单位圆域：$|z|<1$ 内任取一点 $\zeta \neq 0$，则：$\frac{1}{1-z}$ 在 ζ 点的某一邻域内可以展开成幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\zeta)^{n+1}} (z-\zeta)^n.$$

此级数当 $|z-\zeta|<|1-\zeta|$ 时收敛，且：

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\zeta)^n}{(1-\zeta)^{n+1}} = \frac{1}{1-z}.$$

如当 $\zeta = \frac{i}{2}$ 时，展开式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{i}{2}\right)^{-(n+1)} \left(z-\frac{i}{2}\right)^n$$

其收敛圆为 $\left|z-\frac{i}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$。于是 $f_1(z)$ 就开拓到 $|z|<1$ 的外面。

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{i}{2}\right)^{-(n+1)} \left(z-\frac{i}{2}\right)^n$ 是 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的一个解析开拓。因为在圆域 $\left|z-\frac{i}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 内确实含有除单位圆域 $|z|<1$ 以外的点（如图7·3阴影部分Ⅰ）。

当 $\zeta = -\frac{1}{2}$ 时，展开式为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(z+\frac{1}{2}\right)^n$$

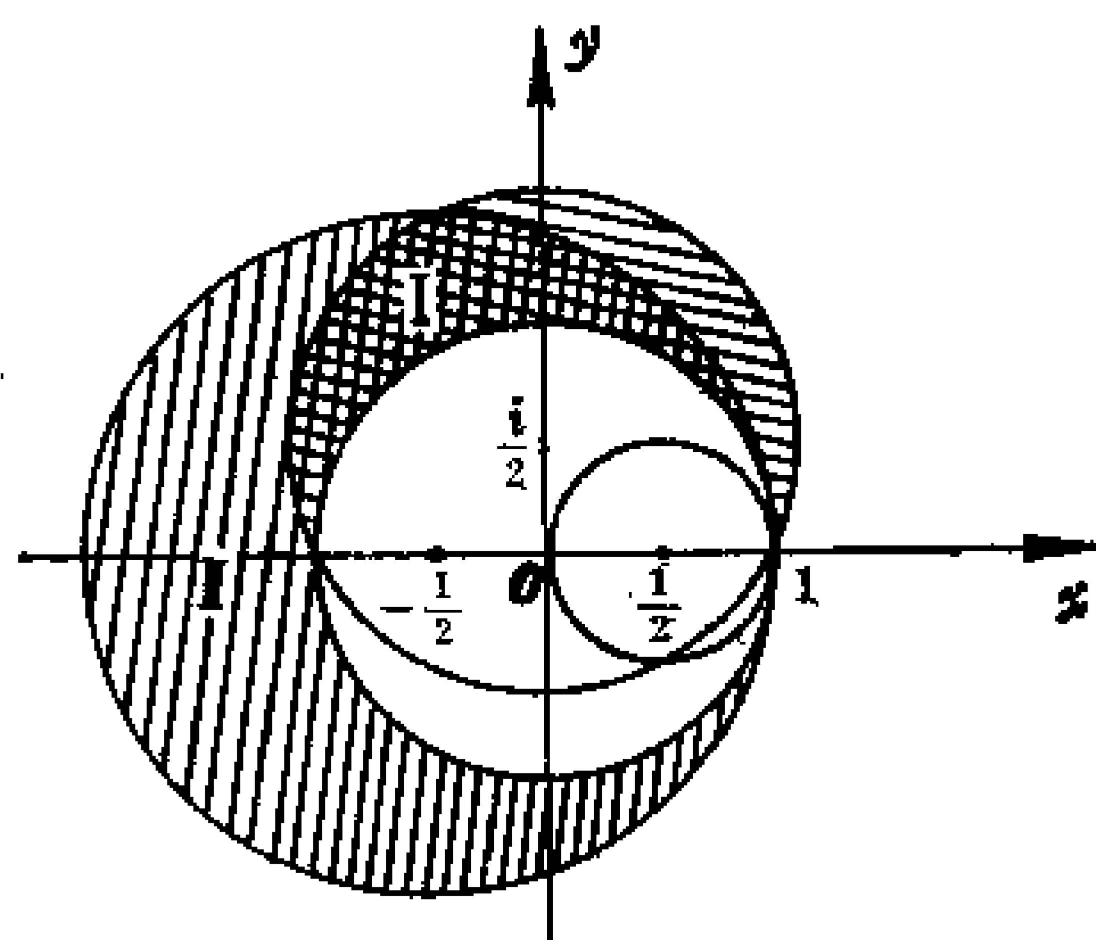


图7·3

此级数的收敛圆为$\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$，于是$f_1(z)$也开拓到$|z|<1$的外面。级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(z+\frac{1}{2}\right)^n$是$\sum_{n=0}^{\infty}z^n$的一个解析开拓。因为在圆$\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$内确实含有$|z|<1$以外的点（如图7·3阴影部分II）。

当$\zeta=\frac{1}{2}$时，展开式成为

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n,$$

此级数的收敛圆周为$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$。此时$z=1$为新旧两个收敛圆周的切点。这时$f_1(z)$没有开拓出去。

事实上，除实轴正方向外，单位圆内的解析函数$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$可沿其半径的任何方向进行开拓，并且都与$\frac{1}{1-z}$是一致的。很明显，$\frac{1}{1-z}$就是$\sum_{n=0}^{\infty}z^n$。

§7·3 Schwarz对称原理

1. 对称原理的特殊情况

定理1 设

1）区域 G_1 与 G_2 分别在上半平面与下半平面关于 x 轴对称，它们的边界都包含 x 轴的一段 l。

2）函数 $f_1(z)$ 在 G_1 内单叶解析，$G_1\cup l$ 上连续，在 l 上取实数值，则

①$w=f_1(z)$ 越过 l 在 G_2 有一解析开拓 $f_2(z)$ 存在，且 $f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}$。

②函数
$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in G_1;\\ f_2(z), & z\in G_2;\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in l.\end{cases}$$

在 $G_1\cup l\cup G_2$ 内解析，且具有对称点不变性，即 $F(\bar{z})=\overline{F(z)}$。

【证明】 作函数 $w=f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}$，$z\in G_2$，为证 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 的解析开拓，首先证明 $f_2(z)$ 在 G_2 内解析，为此，设 $z, z+\Delta z\in G_2$（图7·4）

$$\frac{f_2(z+\Delta z)-f_2(z)}{\Delta z}=\frac{\overline{f_1(\bar{z}+\Delta\bar{z})-f_1(\bar{z})}}{\Delta z}=\left(\overline{\frac{f_1(\bar{z}+\Delta\bar{z})-f_1(\bar{z})}{\Delta\bar{z}}}\right)$$

因为 $f_1(z)$ 在 G_1 内解析，$\bar{z}\in G_1$，$f_1'(\bar{z})$ 存在，故上式两边取极限
$$f_2'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}f_2'(z)=\overline{f_1'(\bar{z})}.$$
存在，即 $f_2(z)$ 在 G_2 内解析.

其次，在 l 上，$z=\bar{z}=x$，$f_2(x)=\overline{f_1(x)}=f_1(x)$
（$f_1(x)$ 取实数值）

其三，因为
$$\lim_{\substack{z\to x\\ z\in G_2}}f_2(z)=\lim_{\substack{\bar{z}\to x\\ \bar{z}\in G_1}}\overline{f_1(\bar{z})}=\overline{f_1(x)}=f_2(x)$$

故 $f_2(z)$ 在 $G_2 \cup l$ 上连续。

应用§7.1—1 定理2. 由于元素$\{G_1, f_1(z)\}$，与$\{G_2, f_2(z)\}$都满足条件，它们互为直接解析开拓。

至于定理的第二个结论，是显然的。（证毕）

显然，在定理中，如果把直线段 l 换成一个圆弧，其他条件不变，定理仍成立。因为圆弧经过线性映射可以变成直线段。

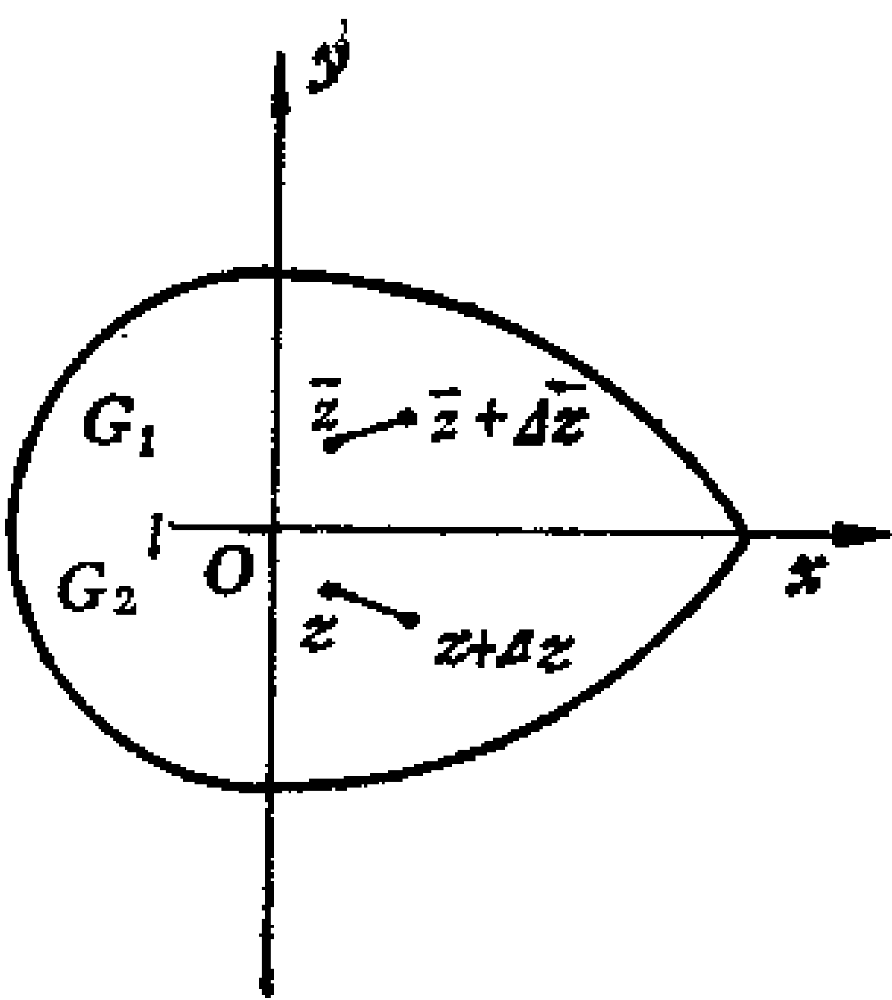


图7·4

2. 对称原理应用举例

我们以火箭尾部剖面绕流问题，化归为圆的外部绕流问题为例。

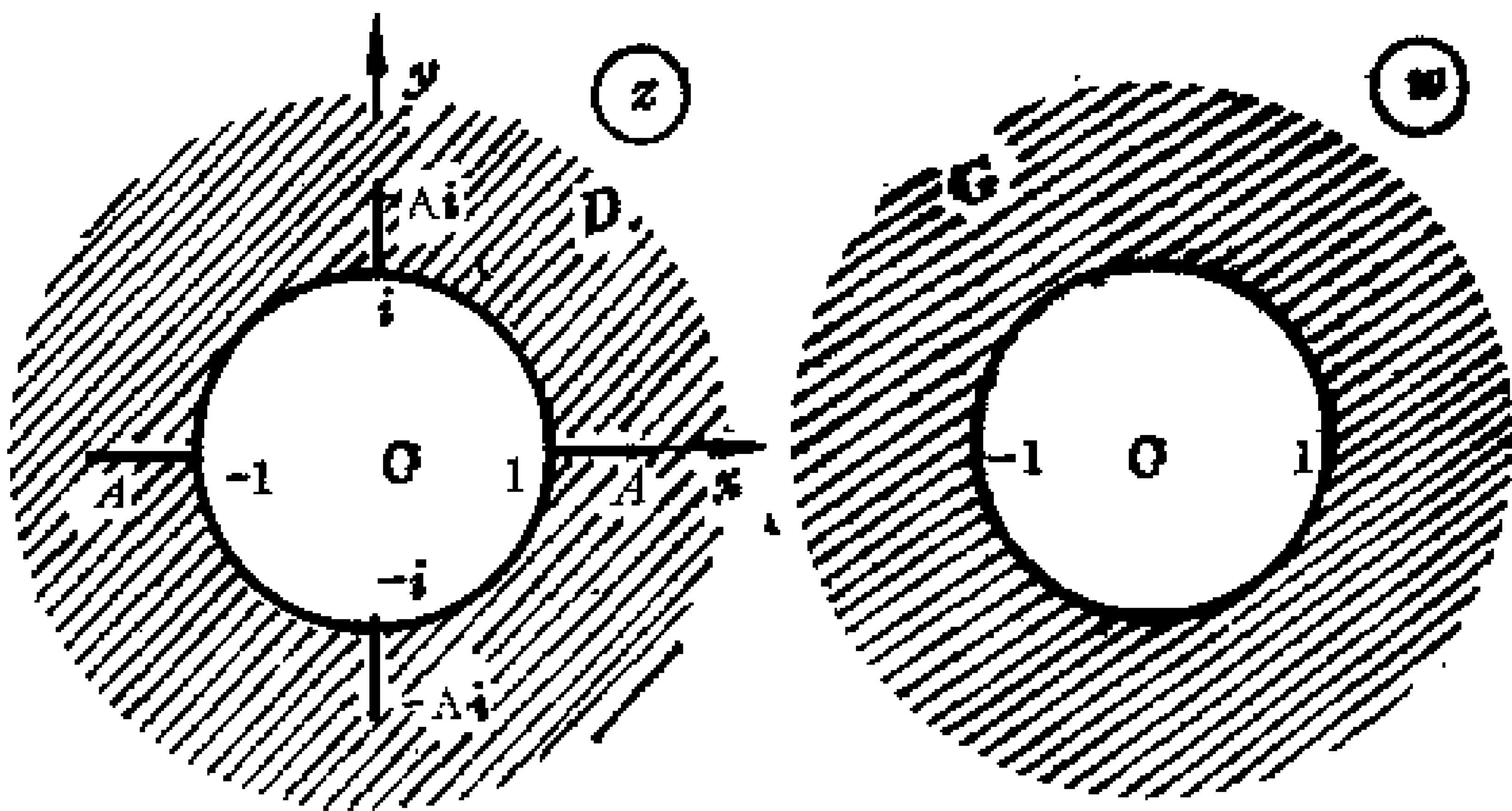


图7·5

这实际上是求区域D：由单位圆周的外部去掉四个相等的线段后的区域到单位圆周外部的区域G的共形映射问题（图7·5）。

区域D虽比较复杂，但它有特点，即关于坐标轴是对称的，（区域G也是如此）。为此，我们首先将区域D在第一象限的部分 d 映射成 S_w 平面的第一象限的部分 g；使 A、∞，Ai三点映射成 1，

∞, i 三点；然后应用对称原理。

将 d 映射成 g，使 A,∞,Ai 映射成 $1,\infty$，i 的步骤如下：（图7.6）

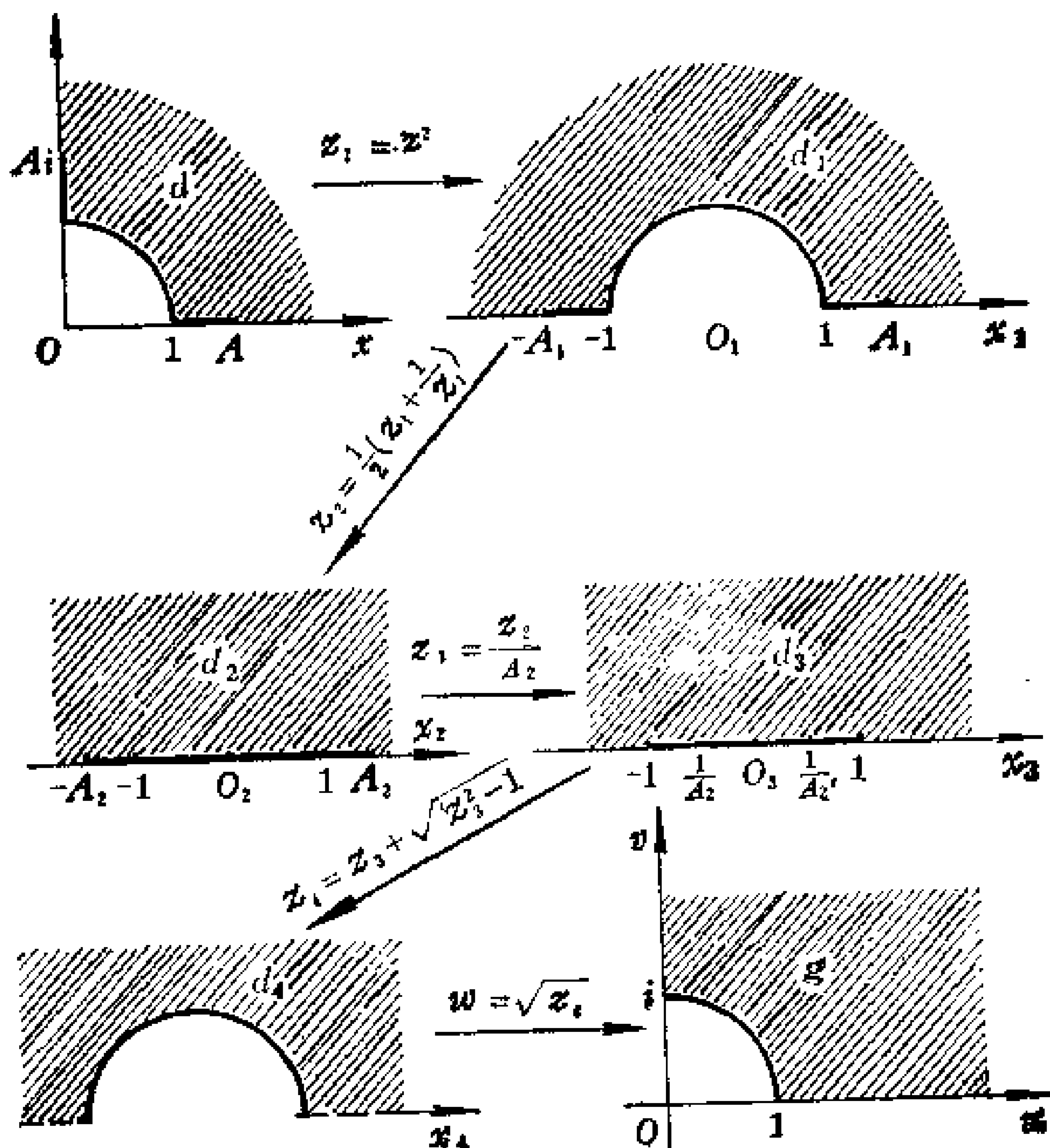


图 7·6

将各步组合并用 z 表示 w，有

$$w = f(z) = \sqrt{\frac{1}{2A_2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4A_2^2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 1}}$$

为所求的函数。

习　题（7·1）

1．设 $f(z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots,|z|<1$

如果 $|a|<1$，试证 $f(a)+f\left(\frac{z-a}{1+a}\right)$ 是 $f(z)$ 的解析开拓。

2．级数 $-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots$ 在 $0<|z|<1$ 内所定义的函数是否可以开拓为级数 $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots$ 在 $|z|>1$ 内所定义的函数？

3．试证：级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ 所定义的函数在左半平面内解析；并且可以解析开拓到除去点 $z=0$ 外的整个复平面。

4．实函数 $f(x)=|x|,-\infty<x<+\infty$ 能否开拓到复数域？

5．实函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 能否开拓到复数域？

6．证明：$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$ 的自然边界是圆周 $|z|=1$。

学　习　指　导

一、内容与要求

这一章着重讨论，如何把解析函数的解析域扩大的问题，我们不仅给出了解析开拓与完全解析函数的概念；给出了解析开拓原理

和连续开拓原理，同时还给出了将函数进行解析开拓的幂级数法和对称原理，因此我们要求读者：

1）清楚掌握解析开拓与完全解析函数的概念。

2）清楚掌握两个开拓原理的条件和结论。

3）会用解析开拓的幂级数法和对称原理，并用这种方法把解析函数进行解析开拓。

二、例　题

【例1】试证由 $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 与 $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$ 定义的函数互为解析开拓。

【证明】设 $f(z)=\frac{1}{1-z}$，则当 $z\in G_1=\{z:|z|<1\}$时，有 $f(z)=f_1(z)$，当 $z\in G_2=\{z:|z-a|<|1-a|\}$时，有 $f(z)=f_2(z)$，依定义，故 $f_1(z)$与 $f_2(z)$互为解析开拓，特别是当 $|a|<1$ 时，$G_1\cap G_2\neq\phi$，有

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in G_1\ ; \\ f_2(z), & z\in G_2\ ; \\ f_1(z)=f_2(z), & z\in G_1\cap G_2\ . \end{cases}$$

此时 $f_1(z)$与 $f_2(z)$ 互为直接解析开拓。

【例2】设上半平面上的区域 G_1，它以实轴上的线段Γ：$a<a<b$ 为一部分边界，设 G_2 为与 G_1 关于实轴为对称的区域；$f_1(z)$，$f_2(z)$ 分别在 G_1，G_2 上解析，且对于 Γ 上的任意一点有

$$\lim_{y\to 0}(f_1(x+iy)-f_2(x-iy))=0\ ,\ (y>0).$$

则 $f_1(z)$可以越过 Γ 解析开拓到 G_2，并且在 G_2 上与 $f_2(z)$ 相一致。

【证明】设 $F(z)=f_1(z)+\bar{f}_2(\bar{z})$，$F(z)$在$G$内为解析。并令 $f_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y)$

$$f_2(\bar{z}) = u_2(x,y) + iv_2(x,-y)$$

则设$w_1(x,y) \equiv \mathrm{Im}[F(z)] = \mathrm{Im}(f_1(z) + \overline{f_2(\bar{z})}) = v_1(x,y) - v_2(x,-y)$。

由题设，对于 Γ 上的点有 $\lim\limits_{y\to 0} w_1(x,y) = 0$，$(y>0)$ 由对称原理，故 $F(z)$可以越过 Γ 解析开拓到 G_2。现设开拓到 G_2 上的函数为 $\varphi(z)$

$$F(z) = f_1(z) + \overline{f_2(\bar{z})} = \varphi(z),\quad z\in G_1 \qquad (1)$$

同样，设 $G(z) = i(f_1(z) - \overline{f_2(\bar{z})})$

则 $w_2(x,y) \equiv R_e[G(z)] = -v_1(x,y) + v_2(x,y)$。

由题设，因 $\lim\limits_{y\to 0} w_2(x,y) = 0$ $(y>0)$，所以 $G(z)$ 越过 Γ 可以开拓到 G_2。设开拓到 G_2 的这个函数为 $\psi(z)$

$$G(z) = i(f_1(z) - \overline{f_2(\bar{z})}) = \psi((z),\quad z\in G_1 \qquad (2)$$

由（1）与（2）得：

$$f_1(z) = \frac{\varphi(z) - i\psi(z)}{2} \qquad (3)$$

$$\overline{f_2(\bar{z})} = \frac{\varphi(z) + i\psi(z)}{2} \qquad (4)$$

因为 $\varphi(z),\psi(z)$都在 $G_1\cup G_2\cup\Gamma$ 上解析，所以 $f_1(z)$也在 $G_1\cup G_2\cup\Gamma$ 上解析．故 $f_1(z)$可以开拓到 G_2。又因为 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 在Γ上取实数值，所以由（3），（4）知在Γ上 $f_1(z) = \overline{f_2(\bar{z})} = f_2(z)$，故在 G_2 上 $f_1(z)$的开拓与 $f_2(z)$相一致．

【例 3】 假设函数 $f(z)$ 在原点解析，并且在原点的邻域内适合方程

$$f(2z) = 2f(z)\cdot f'(z)$$

试证 $f(z)$可以开拓到整个平面。

【证法 1】 由题设，存在原点的邻域 $B:|z|<\rho$ $(\rho>0)$，$f(z)$在B内解析，且 $f(2z) = 2f(z)f'(z)$成立，令 $\zeta = 2z$，则：

$$f(\zeta) = 2f\left(\frac{\zeta}{2}\right)\cdot f'\left(\frac{\zeta}{2}\right)$$

在$\left|\frac{\zeta}{2}\right|<\rho$ 内成立，从而 $f(\zeta)$ 在$|\zeta|<2\rho$ 内解析，由于在$|\zeta|<\rho$ 内，上述的方程成立，根据解析函数唯一性定理，则在$|\zeta|<2\rho$ 内有：

$$f(2\zeta)=2f(\zeta)\cdot f'(\zeta).$$

如果令 $w=2\zeta$，同样可以推得 $f(w)$ 在$|w|<4\rho$ 内解析。如此类推，即得 $f(z)$ 可以开拓到整个平面上去。

【证法 2】 因为 $f(z)$ 在原点邻域内解析，故 $f(z)$ 在原点邻域内可以展开成幂级数：

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots \quad (1)$$

$$f'(z)=f'(0)+\frac{f''(0)}{1!}z+\frac{f'''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}z^n+\cdots$$

依级数的乘法有

$$f(z)\cdot f'(z)=f(0)\cdot f'(0)+[f(0)\cdot f''(0)+f'(0)\cdot f'(0)]z+\cdots+\left[\frac{f(0)\cdot f^{(n+1)}(0)}{n!}+\frac{f'(0)\cdot f^{(n)}(0)}{1!\,(n-1)!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)\cdot f'(0)}{n!}\right]z^n+\cdots$$

而 $f(2z)$ 在原点邻域有展开式

$$f(2z)=f(0)+\frac{2f'(0)}{1!}z+\frac{2^2f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{2^nf^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots$$

又因为在原点邻域内有：

$$f(2z)=2f(z)\cdot f'(z)$$

成立，故级数展开式中同次幂的系数相等。

即：

$$f(0)=2f(0)\cdot f'(0),$$

$$\frac{2f'(0)}{1!}=2[f(0)f''(0)+f'(0)f'(0)],$$

$$\frac{2^2f''(0)}{2!}=2\left[\frac{f(0)f'''(0)}{2!}+\frac{f'(0)f''(0)}{1!}+\right.$$

$$\left.\frac{f''(0)f'(0)}{2!}\right]\cdots$$

$$\frac{2^nf^{(n)}(0)}{n!}=2\left[\frac{f(0)f^{(n+1)}(0)}{n!}+\frac{f'(0)f^{(n)}(0)}{1!\,(n-1)!}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(n)}(0)f'(0)}{n!}\right]\cdots$$

如果 $f(0)\neq 0$，则得：

$$f'(0)=\frac{1}{2},\ f''(0)=\frac{1}{4f(0)},\quad f'''(0)=\frac{1}{2^3[f(0)]^2}\cdots$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{1}{2^n[f(0)]^{n-1}},\cdots$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2|f(0)|}\sqrt[n]{\frac{|f(0)|}{n!}}=0$。

所以级数（1）的收敛半径为 $R=\infty$，故 $f(z)$ 可以开拓到整个平面。

若 $f(0)=0$，而 $f'(0)\neq 0$，则得

$f'(0)=1$，$f''(0)=f^{(4)}(0)=\cdots=f^{(2k)}(0)=0(k=1,2,\cdots)$

$f^{(5)}(0)=[f'''(0)]^2$，$f^{(7)}(0)=[f'''(0)]^3$，$\cdots$，$f^{(2k+1)}(0)$
$=[f'''(0)^k]$，$\cdots$

若令 $f'''(0)=a$，则：

$$f(z)=z+\frac{a}{3!}z^3+\frac{a^2}{5!}z^5+\cdots+\frac{a^K}{(2k+1)!}z^{2k+1}\cdots$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k+1]{\left|\frac{a^k}{(2k+1)!}\right|}=0$，所以收敛半径 $R=\infty$

故 $f(z)$ 也可开拓到整个平面.

如果 $f(0)=f'(0)=0$, 则得 $f^{(n)}(0)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ 这时 $f(z)\equiv 0$.

综上所述, $f(z)$ 可以开拓到整个平面.

【例 4】 试证幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2^n+2}}{(2^n+2)(2^n+1)}$ 不能开拓到收敛圆的外部.

【证明】 因为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2^n+2}}{(2^n+2)(2^n+1)}$ 的收敛半径 $R=1$. 所以 $f(z)$ 不能开拓到收敛圆的外部. 否则 $f'(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2^n+1}}{2^n+1}$,

$f''(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$ 也可在收敛圆外某一区域上解析, 由第七章解析开拓例题 7 可知, 这是不可能的.

三、习题解答

习　题 (7·1)

1. **【证明】**

在 $G_1=\{z:|z|<1\}$ 内, 显然有 $f(z)=\log(1+z)$, 对于 $|a|<1$, 则 $f(a)=\log(1+a)$. 设 $F(z)=f(a)+f\left(\dfrac{z-a}{1+a}\right)$, 而 $f\left(\dfrac{z-a}{1+a}\right)$

$=\dfrac{z-a}{1+a}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z-a}{1+a}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z-a}{1+a}\right)^3+\cdots$ 这个级数在 $G_2=\{z:|z-a|<|1+a|\}$ 内收敛于 $\log\left(1+\dfrac{z-a}{1+a}\right)$. 即在 G_2 内有 $F(z)$

$=\log(1+a)+\log\left(1+\dfrac{z-a}{1+a}\right)=\log(1+z)$. 而 G_1, G_2 都包含 a,

因此它们的交集$G_1\cap G_2\neq\phi$，且在 $G_1\cap G_2$ 内有 $F(z)=f(z)$，所以$(f(z),G_1)$与$(F(z),G_2)$互为直接解析开拓。

2. 【证明】

由于 $-\dfrac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots=-\dfrac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots)=\dfrac{1}{z(z-1)}$，

所以这级数在 $0<|z|<1$ 内收敛于 $\dfrac{1}{z(z-1)}$，而 $\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 S_z 平面上除 $z=0$ 与 $z=1$ 外都解析。而在 $|z|>1$ 内，有

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

因此级数 $\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^4}+\cdots$ 是级数 $-\dfrac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots$ 越过圆弧$\{|z|=1,\ 0<\arg z<2\pi\}$ 解析开拓到 $|z|>1$ 内所得的函数。

3. 【证明】

由于 $f_n(z)=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^n$ 在 $\mathrm{Re}\,z<0$ 内是解析的，令 $w=\dfrac{1+z}{1-z}$，它把 $\mathrm{R}_e z=0$ 映射为 $|w|=1$；把 $\mathrm{R}_e z<0$ 映射为 $|w|<1$。而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}w^n$ 的收敛圆为 $|w|<1$，且和函数为 $\dfrac{1}{1-w}$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z<0$ 内为内闭的一致收敛于 $f(z)=\dfrac{z-1}{2z}$，故 $f(z)$ 在 $\mathrm{R}_e z<0$ 内解析。

又由于 $\dfrac{z-1}{2z}$ 在平面 S_z 上除 $z=0$ 外，处处解析，故 $f(z)$ 可以解析开拓到除 $z=0$ 外的整个复平面上去。

4. 【解】

不能解析开拓到复数域。因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是不可导的，因此不可能存在一个在复平面上解析，而在实轴上等于 $f(x)=|x|$的复变函数。

5．【解】

不能开拓到复数域。假若存在一个在复平面上解析，在实轴上取值 $f(x)$的复函数 $f(z)$，这个函数为 $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$。这是由于 $e^{-\frac{1}{z^2}}$在 $z\neq 0$ 解析，根据解析函数唯一性定理，应有 $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}(z\neq 0)$，从而有 $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$，可是这个函数在 $z=0$ 处不解析，故 $f(x)$不能开拓到整个复平面。

6．【证明】

级数$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$的收敛半径为 $R=1$。假如函数 $f(z)$可以向级数$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$的收敛圆外开拓，那么收敛圆周上就有某段弧是完全由函数 $f(z)$的解析点所组成的。这段弧上有无穷多个 $z_0=e^{2\pi i\frac{p}{q}}$形式的点。其中 p 和 q 为正整数，假如能指出有 z_0 这种形式的点不可能是函数 $f(z)$的解析点，那么这个事实就证明了函数 $f(z)$ 是不能开拓的。事实上，

令 $z=\rho z_0$，其中 $0<\rho<1$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}\rho^{n!}$$

因为当 $n\geqslant q$ 时，我们有 $z^{n!}=(\rho z_0)^{n!}=\rho^{n!}$。

这样，设 $M=2q+N$，其中N 是一个任意大的正整数。就有

$$|f(z)|>\sum_{n=q}^{M}\rho^{n!}-\sum_{n=1}^{q-1}|z|^{n!}>(M-q+1)\rho^{n!}-(q-1)\text{ 当 }\rho\to 1\text{时，}$$

上面不等式的右端趋向的数值为 $M-2q+2=N+2$。由此，适当选

择 ρ_0，对于所有的 ρ 值($\rho_0<\rho<1$)就必然有 $|f(z)|>N$。但是，因为N表示一个可以任意大的数，所以我们得到结论：当 z 沿着半径趋向点 z_0 时，函数 $f(z)$的模趋向无穷大。由此可见，z_0 不能是函数 $f(z)$的解析点。故 $f(z)$不能向$|z|<1$ 外开拓，$|z|=1$ 是 $f(z)$的自然边界。

第八章　初等多值函数与黎曼曲面

在第二章初等函数那一章里，虽然已经遇到过多值函数，如 $\sqrt[n]{z}$ 与 Log$z$ 等等。但那时为便利起见，我们采取了限制辐角范围的办法，使之成为单值函数，如 $\sqrt[n]{z}$ 的主枝 $+\sqrt[n]{z}$、Log$z$ 的主枝 log$z$ 等。在第六章讨论根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 与对数函数 Log$z$ 的映射性质时，都是对它们的单值枝（主枝）进行讨论的。当时并没有论及这些单值枝之间存在什么关系，更没有引进解析开拓、枝点及黎曼曲面等概念。这些都是关于多值函数的重要内容。只要弄明白多值函数与解析开拓、黎曼曲面之间的关系，就能对多值函数的解析性有本质的了解。即不仅把它们的分枝，而且也把多值函数本身看成解析函数。为此，这里重点讨论一下初等多值函数与黎曼曲面的关系。实际上，我们将会看到，多值函数在黎曼曲面上是一个单值函数。因此，在黎曼曲面上，不但给多值函数以几何表示而且使之单值化。

§8·1　初等多值函数概念

1. 单值枝与单叶性区域

为了弄清多值函数的概念，我们先来谈一下单值枝与单叶区域的联系。

在多值函数中，单值枝的概念是很重要的。所谓区域 G 内的解析函数 $f(z)$ 是 G 内的多值函数 $F(z)$ 的单值枝，意思是说，$f(z)$ 在 G 内每一点的值等于 $F(z)$ 在该点的值之一。那么怎样才能分出

一个多值函数的单值枝呢？对此，我们从初等函数的单叶性区域谈起。

对于幂函数 $z=w^n$ 来说，角形区域

$$G_K:\ K\frac{2\pi}{n}<\arg w<(K+1)\ \frac{2\pi}{n}(K=0,1,2,\cdots,\ n-1)$$

中的每一个都是幂函数的单叶性区域。就是说，$z=w^n$ 在每一个这样的区域 G_K 内，为单叶函数。函数 $z=w^n$ 将 G_K 中的每一个都映射成 Sz 平面的角域

$$D:\ 0<\arg z<2\pi.$$

一般地，对于 $z=w^n$，当然也可以取区域

$$G'_K:\ \alpha+\frac{2K\pi}{n}<\arg w<\alpha+\frac{2(K+1)\pi}{n}(K=0,1,2,\cdots,n-1)$$

为其单叶性区域。函数 $z=w^n$ 将 G'_K 中的每一个都映射成区域

$$D':\ n\alpha<\arg z<n\alpha+2\pi$$

（如图8·1所示）。

总之，幂函数 $z=w^n$ 的单叶性区域是Sw 平面上张角为$\frac{2\pi}{n}$的角域。在 $z=w^n$的映射下，它的像域是 Sz 平面去掉一条半射线。

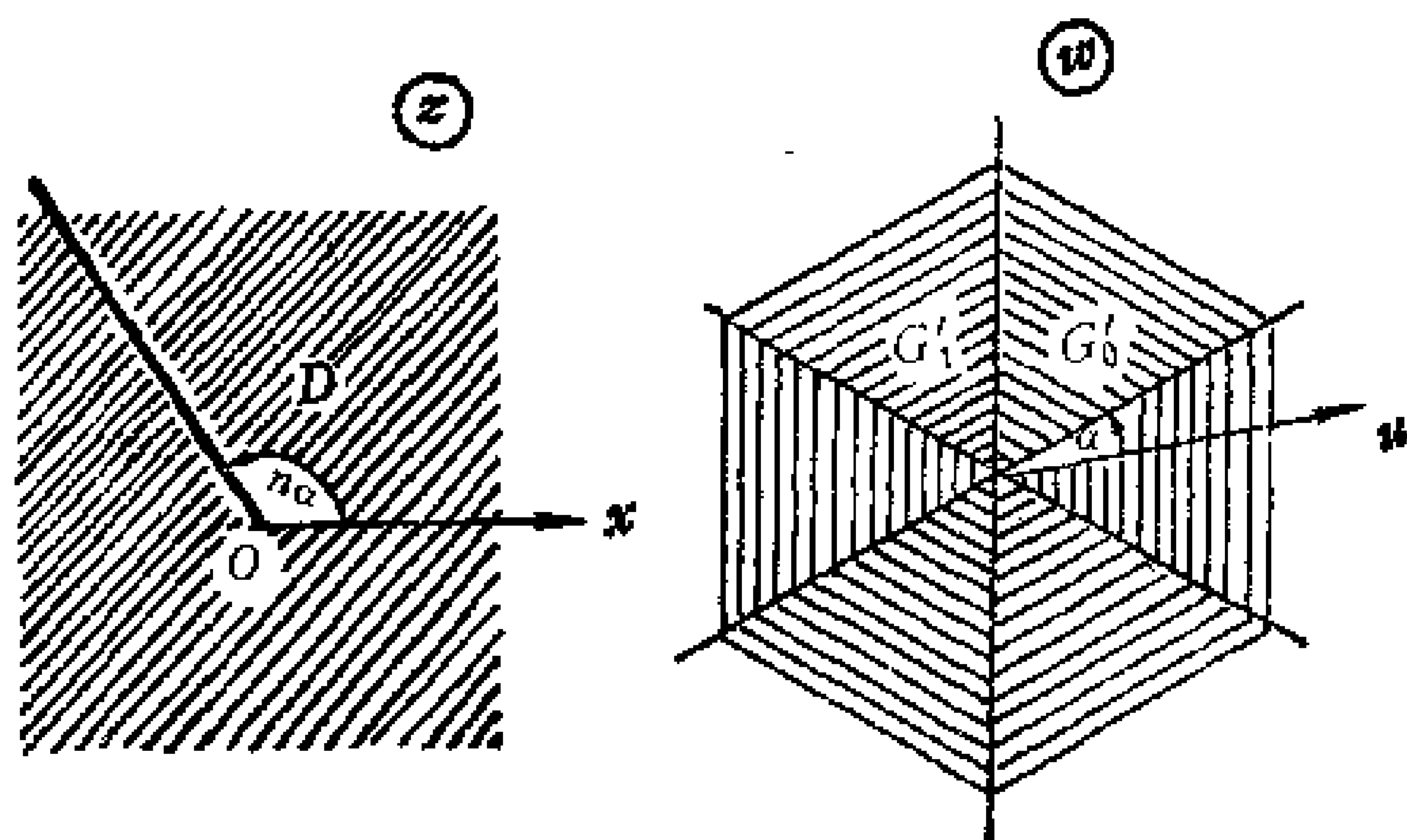


图 8·1

由§6·2定理3可知，函数 $z=w^n$ 在 $G_0, G_1, \cdots, G_{n-1}$ 内存在反函数．这些反函数都是 Sz 平面上区域 D：$0<\arg z<2\pi$ 的多值函数 $W=\sqrt[n]{z}$ 的单值枝．它们共有 n 个，分别记为

$$(\sqrt[n]{z})_0, \quad (\sqrt[n]{z})_1, \cdots, (\sqrt[n]{z})_{n-1}$$

令 $z=\rho e^{i\theta}$，则由第二章可得

$$(\sqrt[n]{z})_K = w_K = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2K\pi}{n}} \quad (K=0,1,2,\cdots,n-1)$$

其中每一个 $(\sqrt[n]{z})_K$ 都是定义在区域 D：$0<\arg z<2\pi$ 内的单叶解析函数，其值域是 G_K．当 $K=0$ 时，$(\sqrt[n]{z})_0=w_0$ 就是在第二章中提到的主枝．它将区域 D 共形地映射成区域 G_0．

通过上面的论述，可以看出：多值函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 在区域 D 内可以分出 n 个单值枝．

下面我们考察两相邻的单值枝 $(\sqrt[n]{z})_K$ 与 $(\sqrt[n]{z})_{K+1}$ 的关系．设 D 为 Sz 平面沿正实轴剪开以后的区域．在 D 内自然定义函数 $\sqrt[n]{z}$ 的一个单值枝为

$$\phi(z)=\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha+2(K+1)\pi}{n}}, \quad (0<\alpha<2\pi)$$

它在 D 内单叶解析．当 z 取在 ox 轴的上方时，$\alpha=\theta$，

$$\phi(z)=(\sqrt[n]{z})_{K+1}$$

当 z 取在 ox 轴下方时，$\alpha=\theta-2\pi$，$\phi(z)=(\sqrt[n]{z})_K$。这就表示 $(\sqrt[n]{z})_{K+1}$ 是 $(\sqrt[n]{z})_K$ 由 ox 轴的下方到上方的解析开拓．同样 $(\sqrt[n]{z})_K$ 是 $(\sqrt[n]{z})_{K+1}$ 的由 ox 轴上方到下方的解析开拓．同时两个单值枝 $(\sqrt[n]{z})_K$ 与 $(\sqrt[n]{z})_{K+1}$ 沿正实轴 ox 相互衔接．

依同样道理，两个单值枝 $(\sqrt[n]{z})_{n-1}$ 与 $(\sqrt[n]{z})_0$ 也沿正实轴 ox 相互衔接，一个为另一个的解析开拓．

2．分枝、枝点与枝割线

设在 Sz 平面上绕原点 $z=0$ 作一简单闭曲线 C，于 C 上取一定点 $z_0=\rho_0 e^{i\theta_0}$，对应的函数值设为

$$W_0=\sqrt[n]{\rho_0}\, e^{i\frac{\theta_0}{n}},$$

它是属于区域 G_0: $0<\arg w<\frac{2\pi}{n}$的点，并且是单值枝（$\sqrt[n]{z}$）。在点 z_0的值。

当点 z 由 z_0 出发，沿$\overline{C}$依逆时针方向（如图8·2）绕原点一周并回到 z_0 时，对应的函数值便为

$$W_1=\sqrt[n]{\rho_0}\,e^{i\frac{\theta_0+2\pi}{n}}=W_0e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

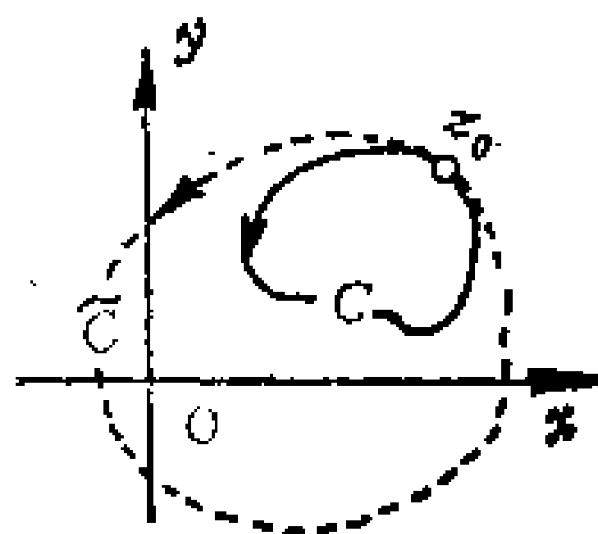


图 8·2

它属于区域 G_1: $\frac{2\pi}{n}<\arg W<\frac{4\pi}{n}$，是单值枝（$\sqrt[n]{z}$）$_1$ 在点 z_0 的值，也是 W_0 绕原点旋转 $\frac{2\pi}{n}$的结果。

当点 z 再由 z_0 出发，沿$\overline{C}$正向绕原点 1 周，2 周，…n 周再重新回到 z_0 时，相应的函数值为

$$W_2=\sqrt[n]{\rho_0}\,e^{i\frac{\theta_0+2\cdot2\pi}{n}}=w_1e^{i\frac{2\pi}{n}},$$

……………………………

$$w_{n-1}=\sqrt[n]{\rho_0}\,e^{i\frac{\theta_0+2(n-1)\pi}{n}}=w_{n-2}e^{i\frac{2\pi}{n}},$$

$$w_n=\sqrt[n]{\rho_0}\,e^{i\frac{\theta_0+2n\pi}{n}}=w_0.$$

它们分别属于区域 $G_2,\cdots,G_{n-1},G_0$ 且为单值枝 $(\sqrt[n]{z})_K(K=2,3,\cdots n-1)$在 z_0 点的值。这就是说，当点 z 从 z_0 出发沿$\overline{C}$ 绕原点依次地旋转 1 周，2 周，…，n 周重新回到 z_0时，对应的函数值便依次地从 w_0 变成 $w_1,\cdots,w_{n-1}$，最后又变成 w_0。而对应的 $w_0,w_1\cdots,w_{n-1}$ 便是单值枝（$\sqrt[n]{z}$）在 z_0 的函数值。

我们把围绕原点旋转一周，就可把函数值从一个单值枝变到另一个单值枝的点，称为多值函数的**枝点**。

如果围绕枝点旋转 n 周时，函数值又重新回到其开始之值（即从一个单值枝又重新回到开始的单值枝），则称这样枝点为 $n-1$ **阶枝点**或**代数枝点**。

显然，根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 以 $z=0$ 为 $n-1$ 阶枝点。扩充平面

$\hat{S}_z$ 上的无穷远点也是 $w=\sqrt[n]{z}$ 的 $n-1$阶枝点．这是因为，以原点为中心作相当大的圆周$\tilde{C}$，点 z 沿 $\tilde{C}$ 绕原点旋转一周时，也就是 z 绕∞点旋转一周．这时，函数由一个单值枝变成另一个相邻的单值枝，故∞点也是函数$\sqrt[n]{z}$的 $n-1$ 阶枝点．除此而外，函数不再有其他的枝点．因为沿着不包含原点的任一条闭曲线变动一周时，函数$\sqrt[n]{z}$的值不变．

由于在枝点的邻域内函数能由一枝变到另一枝，故函数在枝点邻域内缺少单值性．因而它以最简单的方式破坏了函数的解析性．因此**枝点也是函数的奇点**．

为了得到多值函数$\sqrt[n]{z}$的各分枝，我们用扩充平面 $\hat{S}_z$ 上的原点与∞点的连线 Γ，或由原点引出的任一射线将平面分割开来，所得到的区域便是函数$\sqrt[n]{z}$的单叶性区域，并能分出它的 n 个单值枝．

以上的结果自然可以推广到函数$\sqrt[n]{z-a}$ 与$\sqrt[n]{\dfrac{z-a}{z-b}}$上去．前者以 a 和∞为 $n-1$阶枝点；后者以 a 与 b 为 $n-1$阶枝点．值得注意的是，后者并不以∞点为枝点（读者可自行说明）．

我们将分割平面并以此分出多值函数的单值解析分枝的线，称为该函数的**枝割线**．例如，由原点出发的射线是函数$\sqrt[n]{z}$ 的枝割线；连结 a 与 b 点的直线段是函数$\sqrt[n]{\dfrac{z-a}{z-b}}$的枝割线等．

上面讨论的是代数枝点．现在讨论另一种枝点——**对数枝点**（**或超越支点**）．

根据指数函数 $z=e^w$ 的单叶性区域及对数函数 $w=\text{Log}z$的多值性可知，$\text{Log}z$ 具有无限多个单值枝为$(\log z)_0,(\log z)_1,\cdots,(\log z)_n,\cdots$．这些单值枝都定义在 Sz 平面上去掉正实轴的区域D上．它们的值域分别是 Sw 平面上的带域 $G_0,G_1,\cdots,G_n,\cdots$．

对数函数 $\text{Log}z$ 的枝点是原点与∞点．因此，从原点出发的射线就是 $\text{Log}z$ 的枝割线．它可以分出函数的无限多个单值枝．这是

因为，当z绕原点依逆时针方向旋转一周时，w的值增加$2\pi i$，即由一枝变到另一枝．当 z 继续依逆时针方向旋转 2 周，3 周，…时，w 的值便依次地增加 $4\pi i$，$6\pi i, \cdots$，即由其中的一枝变成相邻的另一枝．但永远回不到开始的一枝．我们称原点为函数 Log$z$ 的**无限阶枝点或对数支点**．同样，无穷远点也是它的对数枝点．现设连结原点与∞点的射线为 Γ，经过 $w=\text{Log}z$ 映射后，Γ 在 S_w 平面的像设为 $l_K(K=0, \pm1, \pm2, \cdots)$．$l_K$ 便把 S_w 平面分成无限多个带形区域 G_K．G_K 的边界是 l_K 与 l_{K+1}，从而将 Log$z$ 分出无限多个单值枝．

通过上面的讨论，可以看出，$\sqrt[n]{z}$ 与 Log$z$ 这两个函数在以下两个方面是类似的：

（A）对于自变量 z 的一个值，可有许多个 w 值与之对应；

（B）在枝点邻域内，函数能从它的一枝进入相邻的另一枝．即能从一枝解析开拓到相邻的另一枝．这表明，枝与枝之间不是毫无关系，而是有着密切的内在联系的．

今后，我们称具有性质（A）与（B）的函数，为**多值函数**．因此，易于看到，在复变函数论里所研究的多值函数与数学分析中所谈的多值函数是有区别的．数学分析中的多值函数是指仅具有性质（A）的函数；而复变函数论里的多值函数除具有性质（A）外，还须具有性质（B）．换句话说，在复变函数论里，除从"对一个自变量 z，有多个 w 的值与之对应"外，还从（B）以说明函数的多值性．下面来看几个例子．

【例 1】设 $w=\sqrt{z^2}$，令 $z=\rho e^{i\theta}$，则有

$$w=\sqrt{\rho^2 e^{2i\theta}}=\rho e^{i\frac{2\theta+2K\pi}{2}}=\rho e^{i(\theta+K\pi)} \qquad (K=0,1)$$

于是有

$$w_0=\rho e^{i\theta}, w_1=\rho e^{i(\theta+\pi)}.$$

当增加 2π 时，我们由 w_0 不能得到 w_1；由 w_1 亦不能得到 w_0．也就是说，w_0 与 w_1 中的任意一个，都不能从一个值解析开拓到另一个值．因而，不能说函数 $w=\sqrt{z^2}$为多值函数．但它与通常所说

的单值函数又不一样。事实上它为"两个单值函数"。

【例2】同例1一样，函数 $w=\sqrt{1-\sin^2 z}$ 好象是多值函数，其实它表示着两个单值解析函数

$$w=\cos z \text{ 与 } w=-\cos z.$$

两者之间没有开拓关系。

同样，函数 $w^2=2\cos^2\frac{z}{2}$ 表示两个单值函数：

$$w=\sqrt{2}\cos\frac{z}{2} \quad \text{与} \quad w=-\sqrt{2}\cos\frac{z}{2}.$$

但是函数 $w^2=z$ 便是 Z 的多值(二值)函数。事实上，我们令

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$，则

$R^2(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

从而得到

$$R=\sqrt{r},\quad \phi=\frac{\theta}{2}+n\pi \ \ (n\text{为}0,\ 1)$$

显然，所取的 n 的值不同时，w 值亦不同。现设

$$w_0=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

当 z 沿一条闭曲线依逆时针方向绕行一周又回到原处时，如果原点不包含于其曲线内部，θ 的值不变，w_0 亦不变；如果原点被包含于闭曲线的内部，则 θ 变为 $\theta+2\pi$，而 w_0 变为：

$$w_1=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]=-w_0.$$

当 z 沿绕原点的闭曲线多次绕行时，则 w 由 w_0 依次变为：w_1，w_2，…，并且

$$w_0=w_2=w_4=\cdots,\ w_1=w_3=\cdots.$$

这样一来，对于 z 的一个值，w 有两个不同的值（$\pm w_0$），而且一个值是另一个的解析开拓。故 $w^2=z$ 为 z 的二值函数。

*3．函数$\mathbf{w}=\sqrt[n]{\mathbf{p}(\mathbf{z})}$的枝点的判定

设 $p(z)$ 为N次多项式，并设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 $p(z)$的互不相同

的零点．且

$$p(z)=(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z-a_m)^{\alpha_m},$$

其中 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=N$．

如前所述，点 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 与∞点可能是函数 $w=\sqrt[n]{p(z)}$ 的枝点．但如何判定它是否为此函数的枝点呢？怎样分出函数的单值枝呢？

对此，我们的结论是：

① 如果因子：$(z-a_k)^{\alpha_k}$ 的次数 α_k 不是 n 的整数倍，则 a_k 便是 w 的枝点；

② 如果 α_k 与 n 的最大公约数为 $\delta_k(\delta_k<n)$，而 $\alpha_k=\delta_k\xi_k$，$n=\delta_k\mu_k$，$\mu_k>1$，则 a_k 是 μ_k-1阶枝点；

③ 如果N是 n 的整数倍，则∞不是 w 的枝点；如果N不是 n 的整数倍，则∞是 w 的枝点．当 δ 是N与 n 的最大公约数，$n=\delta\cdot\mu$，$\delta<n$，则∞是 w 的 $\mu-1$阶枝点；

④ 如果区域D只含有这样的简单闭曲线Γ，它的内部(int(Γ))没有枝点或有枝点但枝点的相应数 $\Sigma\alpha_k$ 为 n 的整数倍，则可以分出函数的单值枝．

(证明从略)

【例1】 试确定函数 $w=\sqrt{z(z-1)(z-2)}$ 的枝点．

【解】 此函数为二值函数，$z=0,1,2,\infty$可能是枝点．由于$n=2$，$N=3$．依上面的结论，0，1，2都是 w 的一阶枝点．又$N=3$不是 $n=2$的整数倍，故∞是枝点且是一阶枝点．当 z 沿只含两个枝点的简单闭曲线绕行一周时函数值不变．因之，在 z 平面上去掉[0,1]，[2,∞)；或去掉：(∞,0]，[1,2]；或去掉[0,∞)或去掉从0，1，2出发的射线，便可以分出函数的两个单值枝．

【例2】 求出函数 $w=\sqrt[3]{z(z-1)^2}$ 的枝点．

【解】 这个函数是三值函数，它可能以0，1，和∞为枝点．由于 $n=3$，$N=3$，N 是 n 的整数倍，所以∞不是枝点．$z=0$ 及 $z=1$都是二阶枝点．将 z 平面沿[0,1]剪开，便可分出单值枝．

§8·2 黎曼曲面

1．黎曼曲面概念

为了把多值函数也象单值函数那样去研究，Riemann 第一个提出把区域的概念加以推广，使得任何一个复变量 z 的多值解析函数 $f(z)$，当把 $f(z)$ 看作是推广区域内的点的函数时，$f(z)$ 便成为单值函数．这个推广的区域被称为黎曼曲面．

所谓 Riemann 曲面，就是由许多层平面（我们称之为叶片安放在一起而成的一个曲面)．利用这种曲面，可以使以前所说的解析开拓的过程及多值解析函数本身、分枝与枝点等概念在几何上有了非常直观的表示和说明．对于某一个多值函数，一经作出这样一个曲面后，则函数就成为这种曲面上的单值函数．从而使单值函数的理论可以应用于它．这样，由于多值函数所引起的复杂性，利用几何方法便可以芟除．当然，在实际上使用这种方法并不容易，而且未必所有的多值函数全可以用一个简单的曲面去几何地表示它．

2．多值函数与黎曼曲面

现在我们仅举几个简单的例子来讨论黎曼曲面．对于许多函数，当然要用若干叶片来适当地连接成一个黎曼曲面的工作是相当复杂的，并且需要一定的技巧．

【例 1】 试作出多值函数 $w=\sqrt{z}$ 的黎曼曲面．

【解】 这是一个二值函数．$z=0$ 及 ∞ 是一阶枝点．枝割线可取正实轴．因此这个函数所在的 S_z 平面，可用两个叶片 R_0 与 R_1 来代替．

R_0: $0\leqslant \arg z<2\pi$, $|z|>0$;

R_1: $2\pi\leqslant \arg z<4\pi$, $|z|>0$.

并将 R_0 与 R_1 均沿实轴正向（枝割线）剪开．将 R_0 重迭在 R_1 之

上，使 R_0 的截口的下边连接到R_1的截口的上边；并将 R_1 的下边也连接于 R_0 的上边（后一个连接是设想的）．这样两个叶片便在截口处相交叉（如图8·3）．

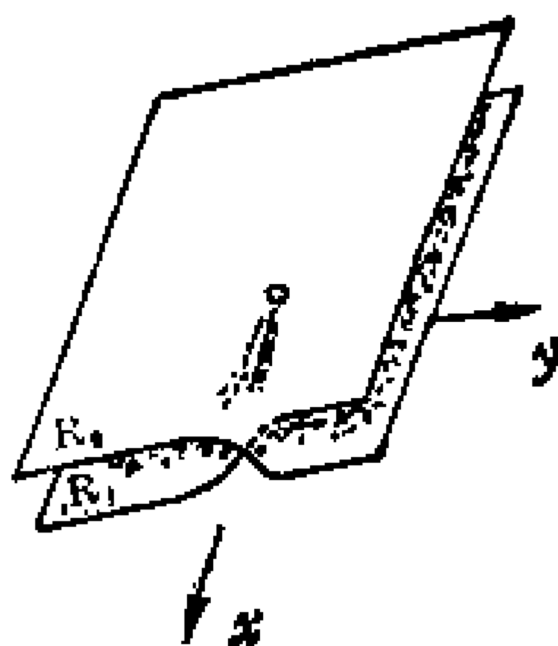


图 8·3

当z在此种曲面上，自叶片R_0上一点起，围绕枝点 $z=0$ 连续地变动时，辐角θ由0增到2π，然后由叶片 R_0 进入叶片R_1．在后一叶片上，θ 又由 2π 增到 4π．当点 z 继续绕枝点 $z=0$变动时，它仍回到叶片 R_0 上，这时 R_0 上的值可以认为是由 4π 增到 6π，即由0增到2π，这对于函数的值没有什么影响．而且 z 与 w 之间的关系为一一对应且是连续的．这样所作成的曲面，称为**函数$\sqrt{z}$的*Riemann* 曲面**．用这样确定的两个叶片连接成的 Riemann 曲面，便可以把原来 S_z 平面上的多值函数变成了 Riemann 曲面上的单值函数．而且每两个相邻叶片上确定的函数分枝，一个是另外一个经过截口处的解析开拓．因之， Riemann 曲面上点的单值函数$\sqrt{z}$，除原点外到处是解析的．

应当注意，要由以上的描述来把 Riemann 曲面具体地制作出来那是很困难的．因为当我们先把叶片 R_0 的截口下边与 R_1 的截口的上边连接起来以后，再把 R_1 的下边与 R_0 的上边具体的连接就无法进行了．因为这时已有一个连接好的平面存在着．所以在描述 Riemann 曲面时，说 R_1 的截口的下边连接到 R_0 的截口的上边，只能是一个假设．但如果我们不坚持两叶片上同位置的点必须对应于同一个值时，则可以利用拓扑想象来连接闭曲面．即如果把无穷远点加到 S_z 平面上去，则所得闭平面 $\widehat{R_0}$ 与 $\widehat{R_1}$ 就应该是球面。当我们把 $\widehat{R_0}$ 与 $\widehat{R_1}$ 都沿枝割线剪开时，就相当于这两个球面都从南极到北极剪开．因此，上边所说的 Riemann 曲而，实际上就是把第二个球面反转过来，再与第一个球面沿截口处连接起来，

其结果就形成一个封闭的曲面。设想这个曲面是富有弹性的（比如是橡皮的），并把它打上气便得一个球面。这样一来，依照拓扑的观点，前面所说的黎曼曲面与球面是没有区别的。

【例2】试作多值函数 $w=\mathrm{Log}z$ 的黎曼曲面。

【解】依函数 $w=\mathrm{Log}z=\log|z|+i\arg z+2\pi ki$ 的无限多值性。当点 z 围绕枝点 $z=0$ 依逆时针方向转动，w 便依次增加 $2\pi i$，$4\pi i, 6\pi i, \cdots, 2n\pi i, \cdots$。如果 z 沿着顺时针方向转动，则 w 的值依次比原来的值增加 $-2\pi i, -4\pi i, \cdots, -2n\pi i, \cdots$。因此这个黎曼曲面便是由无穷多个叶片所构成，而且曲面不是封闭的。曲面的构造与螺旋相似（如图8·4）。$z=0$ 这一点，起着螺旋中柱的作用。

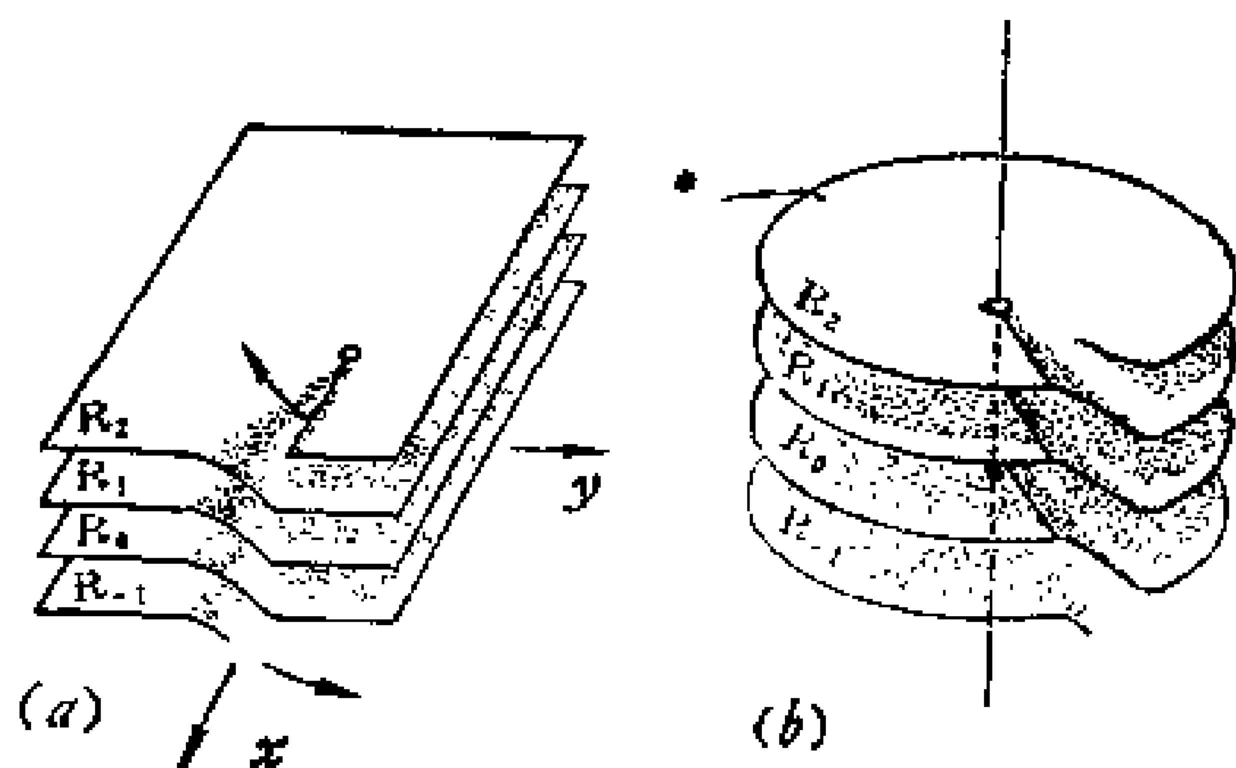


图 8·4

【例3】试作二值函数 $w=\sqrt{(z-1)(z-2)}$ 的黎曼曲面。

【解】令 $z-1=r_1e^{i\theta_1}$，$z-2=r_2e^{i\theta_2}$ 则 $w=\sqrt{r_1r_2}\,e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$ 如果 $0\leqslant\theta_1<2\pi$ 及 $0\leqslant\theta_2<2\pi$，则函数是单值的。当 z 趋近于 $z=2$ 点右侧的任一点时，如果它是从上面趋近，则 $\theta_1+\theta_2$ 的极限是零；如果是从下面趋近，则 $\theta_1+\theta_2$ 的极限是 4π（如图8·5）。因而 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ 的两个极限值之差是 2π，函数在这些点上是连续的。

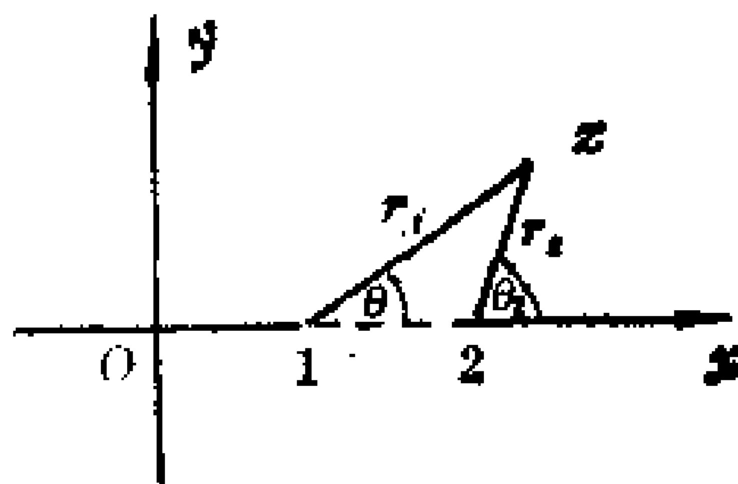


图 8·5

但当点 z 趋近 $z=1$的左侧各点时，角 θ_1 与 θ_2 都趋近于 π，因而函数是 z 的连续函数.

当 z 位于线段$1<x<2$上各点时， $\theta_1+\theta_2$ 的极限值从上边趋近于 π，从下边趋近于3π. 故函数 $e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$ 在此处不连续.

如此看来，单值函数 w 除线段$1<x<2$上各点到处是连续解析的. 它是多值函数的一个分枝. 枝点为 $z=1$及 $z=2$，枝割线是$1\leqslant x\leqslant 2$. 1 与 2 都是一阶枝点.

函数的 Riemann 曲面必须包括两个叶片 R_0 与 R_1. 把这两个叶片沿着线段 L:〔1,2〕各剪开一个截口，然后把 R_0 的截口的下边连接到 R_1 的截口的上边，R_1的截口的下边连接到 R_0 截口的上边，这样连成的连续曲面的两个叶片便在线段L处交叉. 当一点连续地在这曲面上移动时，它便由一个叶片，经过线段L，进入另一叶片上去.

今设 θ_1 及 θ_2 在 R_0 上的值为 α_1 及 α_2，并且由 0 到2π. 但在R_0上的任一点，两角之值可能同时都增加2π 或同时减少2π. 因为函数 w 的值仍与以前相同. 角值的这种改变就是点 z 由原来的位置循着任何围绕全部线段L的曲线回到原有位置. 同样，如果一角 θ_1 或 θ_2 保持不变，另一角增加 4π，函数的值仍然不变. 这种改变就是点z在一曲线上移动环绕点 $z=1$或 $z=2$两次，返回到原有位置.

一般说来，位于 R_0 上的每一点，θ_1 与 θ_2 分别是

$$\theta_1=\alpha_1+2n_1\pi,\theta_2=\alpha_2+2n_2\pi \qquad (A)$$

其中 n_1,n_2 同时是正或负的偶数或奇数，但其和必是一偶数或零. 如果 n_1 与 n_2 不全为偶数或不全为奇数，则角（A）便是叶片R_1上的点的坐标. 例如，坐标是 $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$， $\theta_2=\dfrac{5\pi}{2}$的点便是 R_1 上的点.

根据拓扑的观点，R_0 与 R_1 所构成的 Riemann 面仍是一个球面. 因为把无穷远点加到 z 平面上去，R_0 与 R_1 便是球面. 这

两个球面依截口处对起来，并打上气便成一个球面。

习　题　(8·1)

1．区分下列函数是单值还是多值函数？

1) $\sqrt{e^z}$． 2) $\sqrt{\cos z}$．

3) $\operatorname{Log} e^z$． 4) $\operatorname{Log}\sin z$．

2．讨论 $w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$ 的 Riemann 曲面。

3．讨论 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 的反函数的 Riemann 曲面。

4.*作函数 $w=\sin^{-1}z$ 的 Riemann 曲面．

5.*作满足方程：$w^3-3w-2z=0$ 的代数函数的 Riemann 曲面。

学　习　指　导

一、内容与要求

这一章的内容，主要讨论了初等多值函数的各个单值枝之间的关系；枝点、枝割线及 Riemann 曲面在研究多值函数中的作用；简单的初等多值函数 Riemann 曲面的制作等．

关于初等多值函数的各单值枝与枝点、枝割线的关系．我们用对数函数稍作补充解释。

类似于根式函数，可以考虑对数函数的多值性．由于

$$w_k=(\log z)_k=\log\gamma(z)+i[\theta(z)+2k\pi],\quad (z\in G)$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

是 $w=\operatorname{Log}z$ 的无穷多个不同的单值连续分枝．它的各个分枝皆在 G 内解析，且有 $\frac{d}{dz}(\log z)=\frac{1}{z}$ $(z\in G, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．

Log$z$ 的各分枝有如下关系：

……………………………………………

$w_1=(\log z)_1=\log\gamma(z)+i[\theta(z)+2\pi]$；

$w_0=(\log z)_0=\log\gamma(z)-i\theta(z)$；

$w_{-1}=(\log z)_{-1}=\text{L}\log\gamma(z)+i[\theta(z)-2\pi]$；

……………………………………………

枝点 $z=0$，枝割线为沿负实轴剪开的射线．（枝割线也可取作沿正实轴剪开的射线）．当 z 沿原点转动一周时，Log$z$的各分枝就依次的互相串动．即各枝沿负实轴互为解析开拓．如果 z 转动一周回来后再继续绕原点转动，Log$z$ 的各枝就再依次地串动．可见Log$z$的各分枝是通过枝点紧密地联在一起的．它们不是独立的存在着．

正是因为复变函数的多值函数有这样的特点，因此首先要明确多值函数与多个单值函数的区别．当点 z 绕枝点转动一周后，多值函数的各个单值枝便从一枝进入另一枝．说句通俗话，多值函数的各分枝不是孤立的，是通过枝点将它们串在一起．而多个单值函数它们之间没有这种联系．

其次，要了解枝点、枝割线和多值函数的关系及其在研究多值函数上的作用．我们在第二章中所提到的多值函数：根式函数、对数函数及反三角函数等的解析性问题，都是指它们各自的单值解析分枝（当时，我们一律取其主枝进行研究）．那么对于一个多值函数，如何将它们的各个分枝分离出来呢？在这个问题上枝点与枝割线起着关键的作用．从多值函数的概念本身来说，当点 z 绕枝点转动一周后（再回到原来的位置时），多值函数的一枝进入另一枝．因此，为了将它们各枝分开，我们就把z平面沿枝割线剪开，使 z 不能绕枝点转动一周．所以枝割线是分开各枝的一把“剪刀”．

最后，要理解 Riemann 曲面的作用．在我们这里，它的主要作用就是多值函数单值化．由前边的叙述可知，枝割线将多值函数各枝切割开来．如果我们将枝割线看成 w 平面上的截口，每个这样

的截口如果再连结起来——但这次连接不是恢复原样的处置，而是将截口看成有上边与下边。将上面剪开的平面依次地上、下边连接起来便形成了新的曲面，即 Riemann 曲面。在这种曲面上，多值函数便是单值的。

为此，我们要求对简单的初等多值函数的 Riemann 曲面能够制做出来。

制做 Riemann 曲面的大致步骤是：确定枝点、枝割线；沿枝割线剪开；连接截口。

二、例　　题

【例1】设 $w=\sqrt[3]{z}$ 且 $w(i)=-i$，试求 $w(-i)$ 之值。

【解】

我们先来分析一下题意。$\sqrt[3]{z}$ 是三值函数，我们可设 $w=\sqrt[3]{z}$ 的三个分枝分别确定在沿负实轴剪开的三个叶片上。它的各枝都是独立的解析分枝。所求 $w(-i)$ 之值是指在满足 $w(i)=-i$ 的条件下的单值枝。即由此条件去确定 k。为此设 $z=re^{i\theta}$，则

$$w_k=\sqrt[3]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{3}},\quad k=0,1,2.$$

这里 $z\in G$，$-\pi<\theta<\pi$

$$z=i\in G\ \text{时},\ r(i)=1,\quad \theta(i)=\frac{\pi}{2}$$

由条件，有

$$-i=e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi+4k\pi}{6}},$$

则必有 $k=2$。

其次、求 $w_2(-i)$ 之值 $(-i\in G)$

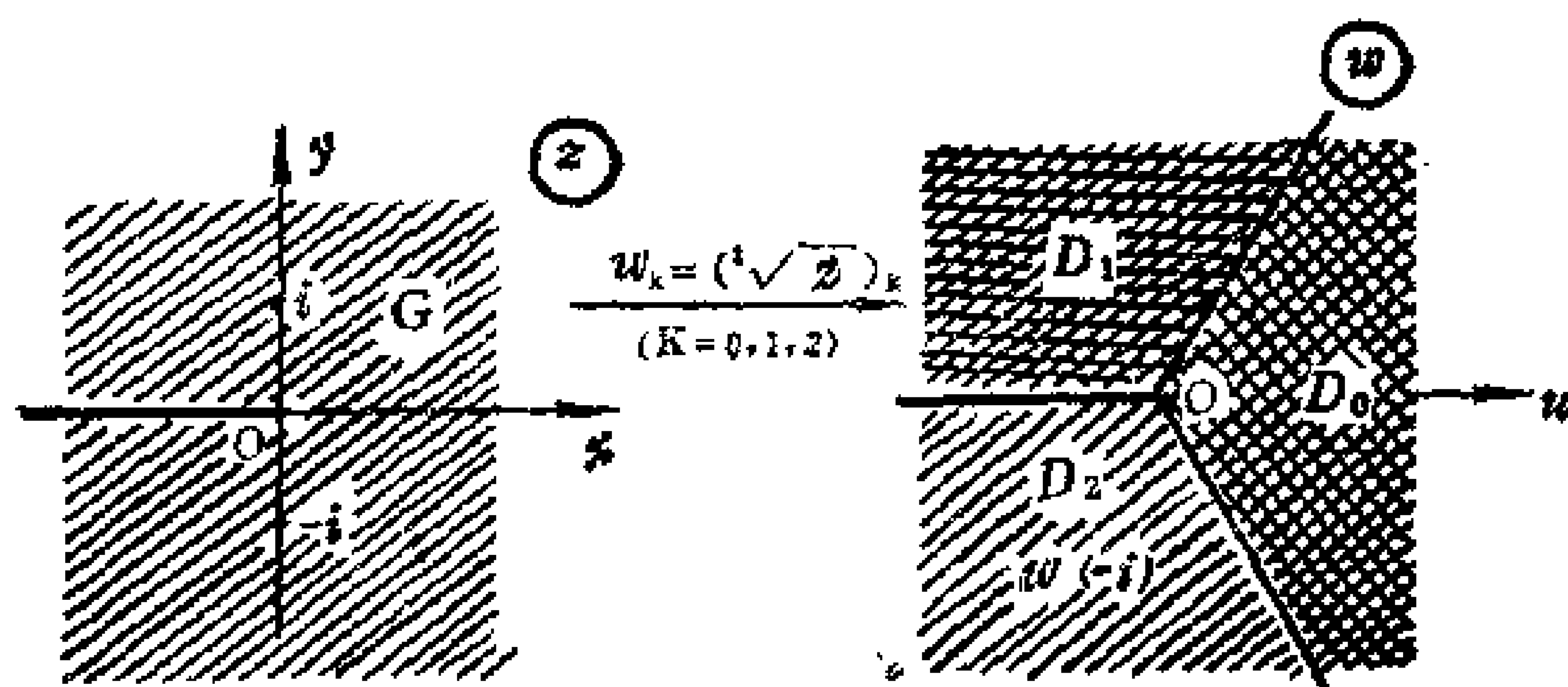
因为 $r(-i)=1$，$\theta(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$

故 $$w_2(-i)=e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}}=e^{i\frac{7}{6}\pi}=-e^{\frac{\pi}{6}i}$$

因而所求 $w(-i)=-e^{\frac{\pi}{6}i}$。

这个例子说明单值枝的确定要依所给条件．各枝定义域与值域（如指导图8·1所示）

$$G:\quad -\pi<\arg z<\pi\rightarrow\begin{cases}D_0:\quad -\dfrac{\pi}{3}<\arg w_0<\dfrac{\pi}{3},\\ D_1:\quad \dfrac{\pi}{3}<\arg w_1<\pi,\\ D_2:\quad \pi<\arg w_2<\dfrac{5\pi}{3}.\end{cases}$$



指导图 8·1

【例2】问函数 $w=\alpha^z$ 是无穷多个单值解析函数还是无穷多值函数？

【解】设 $\alpha=a+ib$，则

$$w=\alpha^z=e^{z\text{Log}\alpha}=e^{z(\log\alpha+2k\pi i)}$$

表示着无穷多个单值解析函数：

$$e^{z\log\alpha},\quad e^{z(\log\alpha+2\pi i)},\cdots$$

事实上，设 $z=re^{i\theta}$，则各枝可写成

$$e^{re^{i\theta}\log\alpha},\ e^{re^{i\theta}(\log\alpha+2\pi i)},\cdots$$

当 z 绕原点 $z=0$ 正向转动一周后再回到原来位置时，即 θ 增加了 2π，则

$$e^{re^{i\theta}\log\alpha}\rightarrow e^{re^{i(\theta+2\pi)}\log\alpha}=e^{re^{i\theta}e^{2\pi i}\log\alpha}=e^{re^{i\theta}\log\alpha}.$$

并没有变成下一枝：$e^{re^{i\theta}(\log\alpha+2\pi i)}$．同样地，其他各枝也无变化。

所以 $w=e^z$ 是无限多个单值函数。因此，不能从函数

$$w=e^{z(\log a+2k\pi i)}$$

的表面形式上去判断是"真"多值还是"假"多值。我们要看它们各枝是否有内在联系，否则可能被"假"多值的现象所迷惑。

【例 3】作二值函数 $w=\sqrt{(z-1)(z-2)(z-3)}$ 的Riemann曲面。

【解】首先，点 $z=1, z=2, z=3$ 是函数的枝点，∞也是一个枝点。

如果我们沿 $z=1$ 在正实轴上向右剪开，剩下的区域设为 G，并令

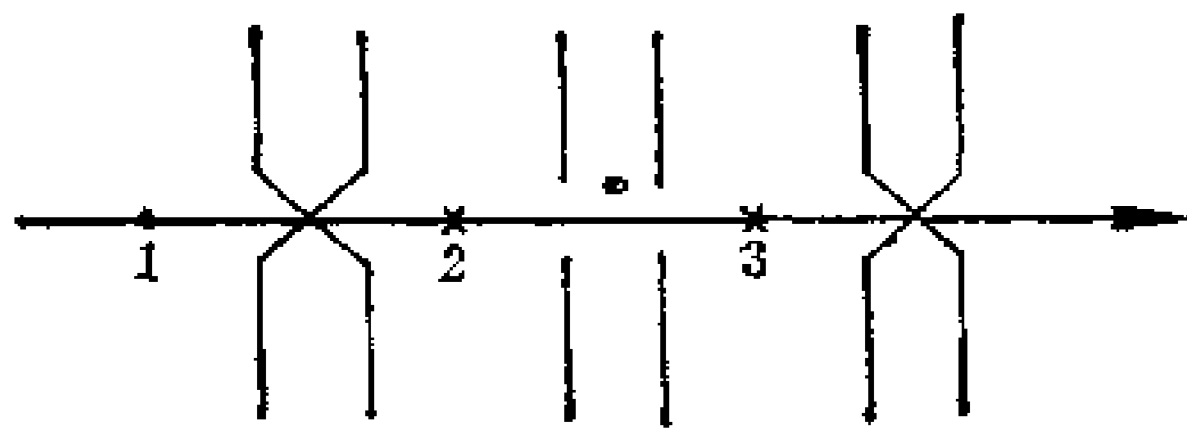
$$z-1=r_1e^{i\theta_1},\ z-2=r_2e^{i\theta_2},\ z-3=r_3e^{i\theta_3}$$

则

$$w=\sqrt{r_1r_2r_3}\,e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}}$$

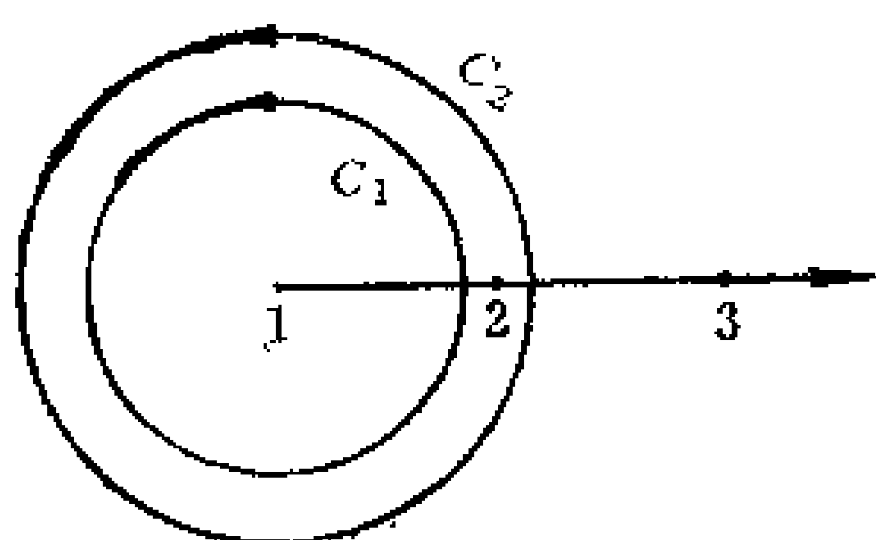
在区域 G 上解析。

这个函数的 Riemann 曲面是由两个叶片 R_0 与 R_1 所组成。它们都沿着 $z=1$ 到 $z=2$ 的线段 L_1 及沿着 $z=3$ 的右边一段实轴 L_2 剪开，然后按指导图8·2连接起来而成。



指导图 8·2

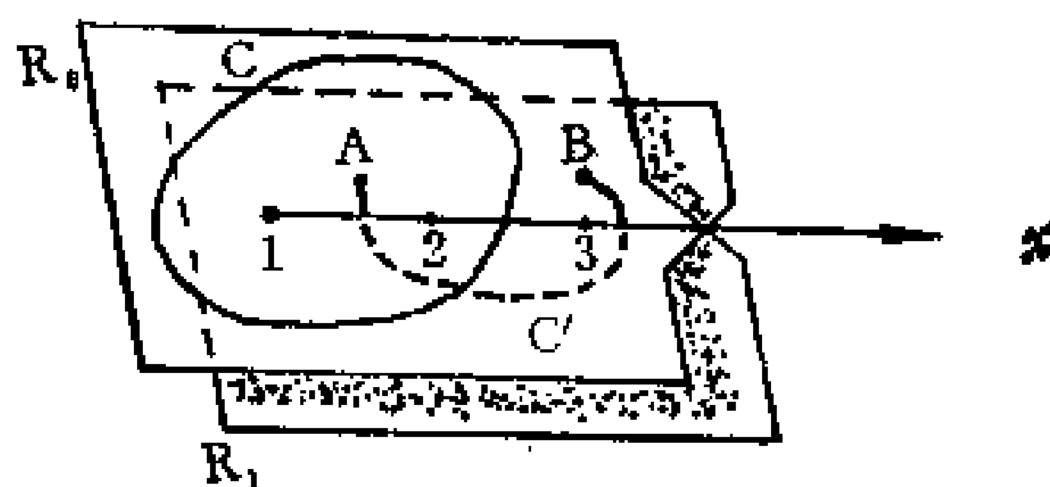
因为当 z 沿着指导图 8·3 的 C_1 的逆时针方向解析开拓，函数 $\sqrt{z-1}$ 的值变动的结果差一个符号。而函数 $\sqrt{z-2}$ 与 $\sqrt{z-3}$ 不变。因之 w 在 C_1 上变化的结果就差一个符号。故 Riemann曲面在 1 与 2 之间的连接情况见指导图8·2。当 z 沿 C_2 的逆时针方向解析开拓时，函数 $\sqrt{z-1}$ 与 $\sqrt{z-2}$ 在 C_2 上的值都差一个符



指导图 8·3

号．而$\sqrt{z-3}$不变，结果 w 的值不变．因而 Riemann 曲面在 2 与 3 之间的连接情况如指导图 8·2 所示．同理可知 Riemann曲面在 3 至∞的连接情况如（指导图 8·2）所示．

值得注意的是，在这个连接的曲面上，我们可以在叶片 R_0 上作出（当然不是任意的）一条完全包含在 R_0 上的曲线C（见指导图8·4）．在 R_0 上于C的内部(int(C))及外部（ext(C))分别取点A与B．我们在这个 Riemann 曲面上完全可以不经过C而由A走到B（见指导图8·4的路线 C'）．其中实线是位于 R_0 上的路段，虚线是位于 R_1 上的路段．



指导图 8·4

这样一来，这个 Riemann曲面与球面是大不相同的．

根据拓扑的观点，所谓沿L_1及L_2剪开，实质上是把复数球面 R_0与 R_1 都剪成两条截口．或者说，把 R_0 与 R_1 都打两个洞．设这个球面是由富有弹性的橡皮做成的．由于每一个都有两个洞，故可以拉长而成一条橡皮管子．把这两个橡皮管在剪口处连接起来就是上面所说的Riemann曲面．这个曲面是一个环面．从环面来看，则上述的连通性是不足怪的．

普通的球面（或平面）与 Riemann 曲面之间的根本差别在于：在球面上所作的任何一条简单的闭曲线（圈线），总把球面分成两个部分，使得位于这两个不同部分内的两个点，不可能用一条不通过那个圈线的曲线来联结起来．但这个性质对于其他的曲面来说便不成立．（指导图8·4）就是一个例子．

三、习题解答

习　题

1. 【解】

1) $\sqrt{e^z}$为两个单值函数

$$w_0=e^{\frac{z}{2}};\ w_1=-e^{\frac{z}{2}}.$$

事实上，设 $z=re^{i\theta}$，则

$$\sqrt{e^z}=e^{\frac{z}{2}}=e^{\frac{r\cos\theta+ir\sin\theta}{2}}=e^{\frac{r\cos\theta}{2}}\cdot e^{i\frac{r\sin\theta+2\pi k}{2}}$$

当$K=0$时，

$$(\sqrt{e^z})_0=e^{\frac{r\cos\theta}{2}}\ e^{i\frac{r\sin\theta}{2}}=e^{\frac{z}{2}}$$

当$K=1$时，

$$(\sqrt{ve^z})_1=e^{\frac{r\cos\theta}{2}}\ e^{i\frac{r\sin\theta+2\pi}{2}}=e^{\frac{r\cos\theta}{2}}\ e^{i\frac{r\sin\theta}{2}}e^{i\pi}$$

$$=-e^{\frac{r\cos\theta+ir\sin\theta}{2}}=-e^{\frac{z}{2}}.$$

但当θ增加2π时，即z绕原点转动一周时$(\sqrt{e^z})_0$不能变成$(\sqrt{e^z})_1$。同样地，$(\sqrt{e^z})_1$也不能变成$(\sqrt{e^z})_0$。

2) $\sqrt{\cos z}$是二值函数。枝点 $z=(2K+1)\frac{\pi}{2}$。

3) $\mathrm{Log}\,e^z$ 是无限多个不同的单值解析函数：

$$w=z,w=z+2\pi i,w=z+4\pi i,\cdots;$$

事实上，

$$w=\mathrm{Log}\,e^z=\log e^z+i2k\pi=z+i2k\pi$$

当 $k=0$时，$w=z$；

当 $k=1$时，$w=z+i2\pi$；

当 $k=2$时，$w=z+i4\pi$；

……………………………………………

显然，当 z 的辐角由 θ 增加 2π 时，各枝不动，并不能使一枝变成另一枝。所以各枝是孤立无关的单值解析函数。

4) Logsin$z$ 为无限多值函数．枝点是 0， $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\cdots$.

2．【解】

我们设 $z-a=r_1e^{i\varphi_1}$, $z-b=r_2e^{i\varphi_2}$, 则

$$w=\sqrt{r_1r_2}\,e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2+2k\pi}{2}}\quad(k=0,1)$$

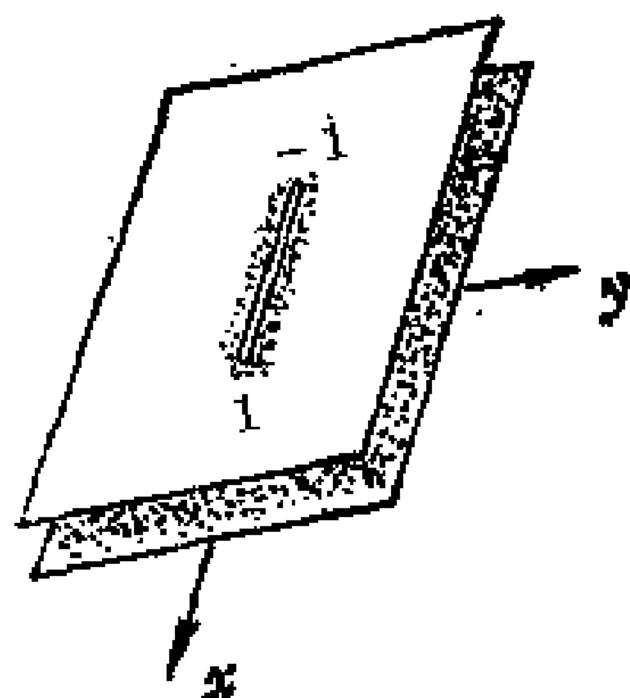
它的枝点是$z=a$及$z=b$．连接a,b 两点的直线段是枝割线．沿枝割线剪开，并取同样剪开的两叶片，使截口交叉地连接起来便得到所求的Riemann面．

3．【解】

已知Жуковский 函数$w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$的反函数为

$$w=z+\sqrt{z^2-1}\qquad\text{（仍用}w\text{表示函数）}.$$

我们取去掉了线段$[-1,1]$的z平面来作为区域D_K．设 $f_0(z)$与$f_1(z)$分别是这个函数的把D_0映射到单位圆域内部的与把D_1映射到单位圆域外部的那个分枝（见§6·6·3)．因为$f_0(z)$把线段$[-1,1]$的下边映射到单位圆周的上半部分，而$f_1(z)$把线段$[-1,1]$的上边映射到这个单位圆周的上半部分．所以，我们应当把叶片D_0中截口的下边与叶片D_1中截口的上边互相连接起来．同样，应当把D_0中截口的上边与D_1中截口的下边互相连接起来．因为它们都被映射到单位圆周的下半部分上去的．所得到的这两层曲面就是$w=z+\sqrt{z^2-1}$的Riemann曲面．它在点$z=\pm1$上面有二阶枝点．（指导图8·5）



指导图 8·5

4* 【解】

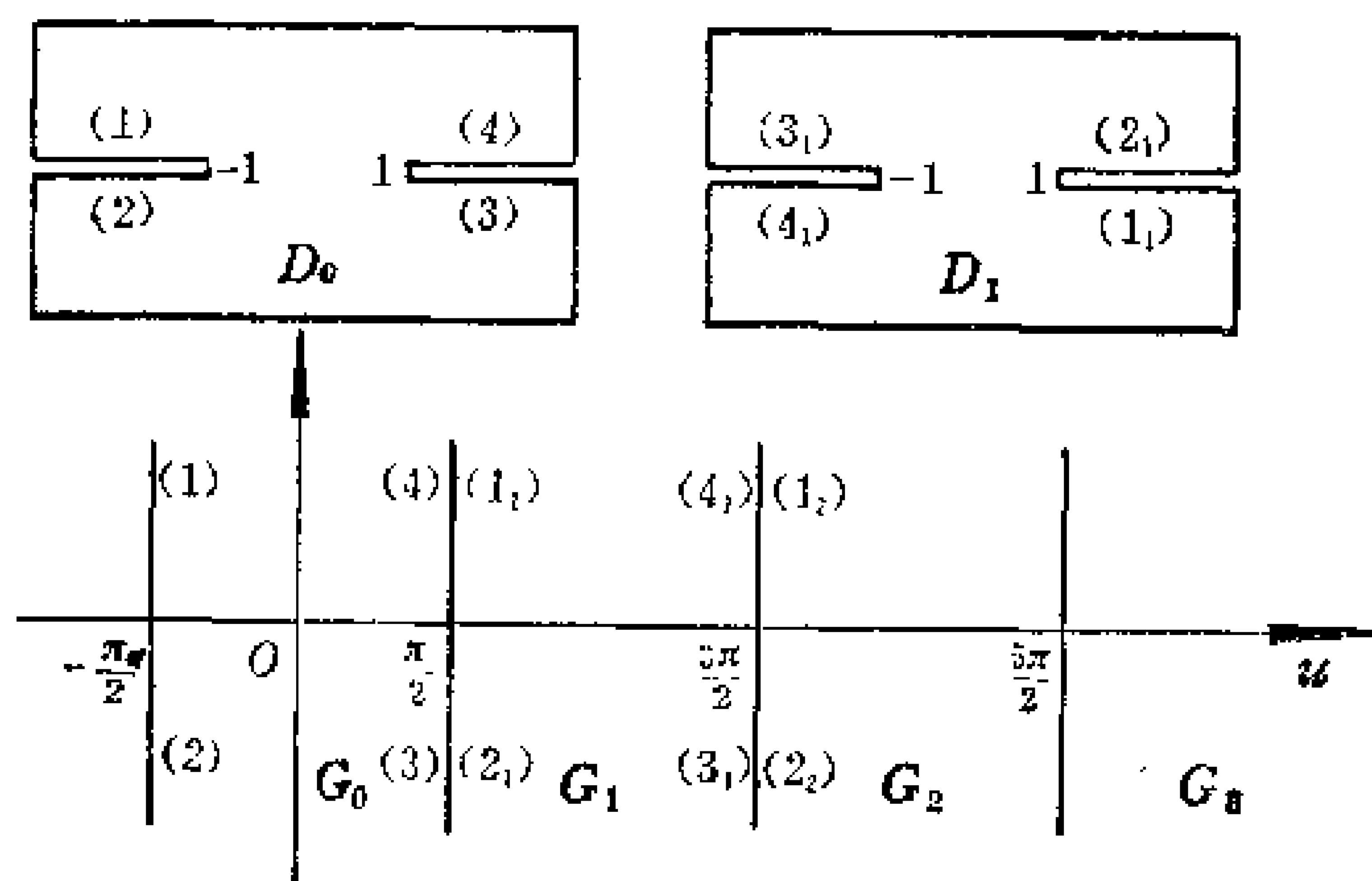
函数$z=\sin w$ 把半个带域：

$\operatorname{Im}w>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re}w<\dfrac{\pi}{2}$映射成上半平面（在这里，我们互换了$z$与$w$)．这时直线(1) 与(4)（见指导图8·6）被映射成实轴上的直线 $x<-1$与$x>1$．由于 $\sin w$是一个奇函数，所以我们有：

这时半带域$\operatorname{Im}w<0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re}w<\dfrac{\pi}{2}$ 被

映射到下半平面，并且直线（2）与（3）对应着同样的两条直线 $x<-1$与 $x>1$（见指导图8·6）．因此，在 $w=\mathrm{Arcsin}z$ 的那些分枝中，有一个分枝（我们用 $f_0(z)$ 来表示它）把沿着直线$(-\infty,-1]$与$[1,\infty)$剪开了的那个 z 平面（我们把它记作D_0）映射到带形 G_0：$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}w<\frac{\pi}{2}$上．在这个映射下有指导图 8·6中所指出的那些边界的对应关系．因为

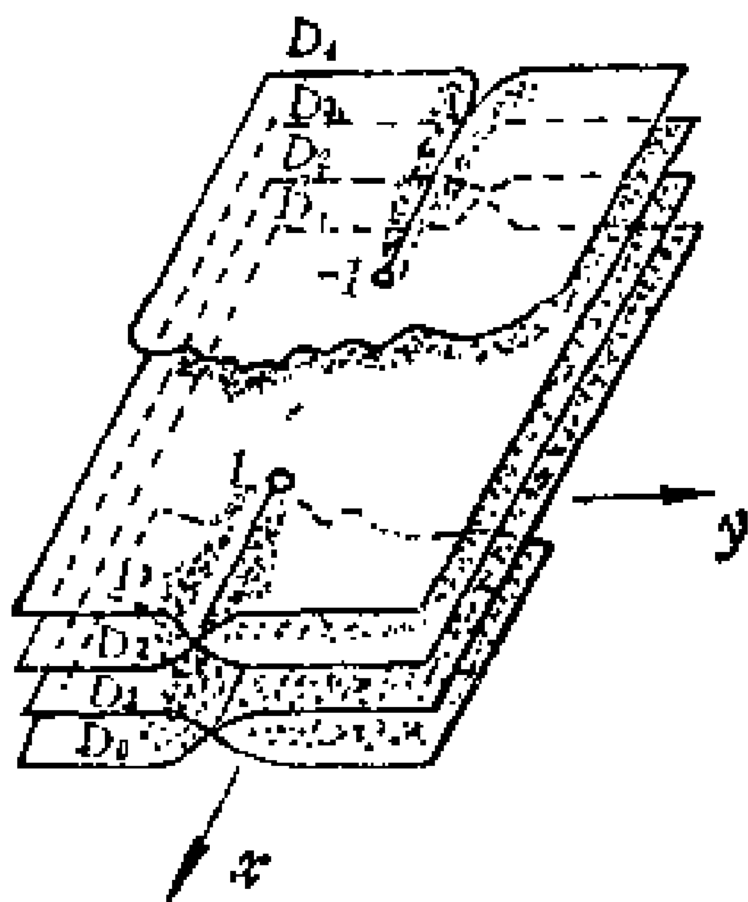
$$\sin(w+\pi)=-\sin w。$$



指导图 8·6

所以带域 G_1：$\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}w<\frac{3\pi}{2}$在函数 $z=\sin w$ 映射下变成 z 平面中同样的区域；我们把这个区域记作 D_1，并用 $f_1(z)$ 来表示出其逆映射的那个函数．G_1 与 D_1 的边界的对应关系已在指导图8·6中指明．

显然，分枝 $f_1(z)$是 $f_0(z)$向 D_1 的解析开拓，并且在这样的开拓中，函数 $z=\sin w$ 在直线 $\mathrm{Re}w=\frac{\pi}{2}$上始终是保持连续的．与此相应，我们应当把叶片 D_0 中与叶片 D_1 中截口边上下交叉地连



指导图8·7

接起来：（4）与（1_1）连接在一起．（3）与（2_1）连接在一起．这样便得到了一个双层的曲面．这个曲面在 $z=1$ 上面有一个二阶枝点，在直线$(1,\infty)$的上面有一条截口（指导图8·7）．由于函数$z=\sin w$的周期性，带域 G_2 与 G_3 的总和也被映射到由叶片 D_2 与叶片 D_3 所构成的同是这样的一个带有截口的双层曲面上．

我们应当把刚才所构成的这两个双层曲面连接起来．把叶片 D_1 与 D_2 中截口的上、下边交叉地连接起来：（4_1）与（1_2）连接在一起，（3_1）与（2_2）连接在一起——这对应于函数 $z=\sin w$ 经过直线 $\mathrm{Re}\,w=\dfrac{3\pi}{2}$的连续开拓（指导图8·3）．这时在点 $z=-1$的上面发生了一个连接叶片 D_1 与D^2的枝点．把这种构造法无限地开拓下去，从基本的带域 G_0 出发，向左及向右进展，我们便得到了一个无限多层的反正弦函数的Riemann曲面．这个曲面在点 $z=\pm1$ 上面有无数多个二阶枝点，在 $z=\infty$点上面有一个对数枝点．

我们的这个构造表明，函数 $z=\sin w$ 作出一个把整个有限的 w 平面映射到我们这个 Riemann 曲面上来的双方单值且连续的映射．反函数 $w=\mathrm{Arcsin}\,z$ 在这个曲面上是单值的．

5.*【解】

由于在此方程式中，对于 z 的任何一个值 w 均有三个值，因此函数

$$G(z,w)=w^3-3w-2z$$

具有三个分枝．设为 w_1,w_2,w_3．函数的枝点求法如下：

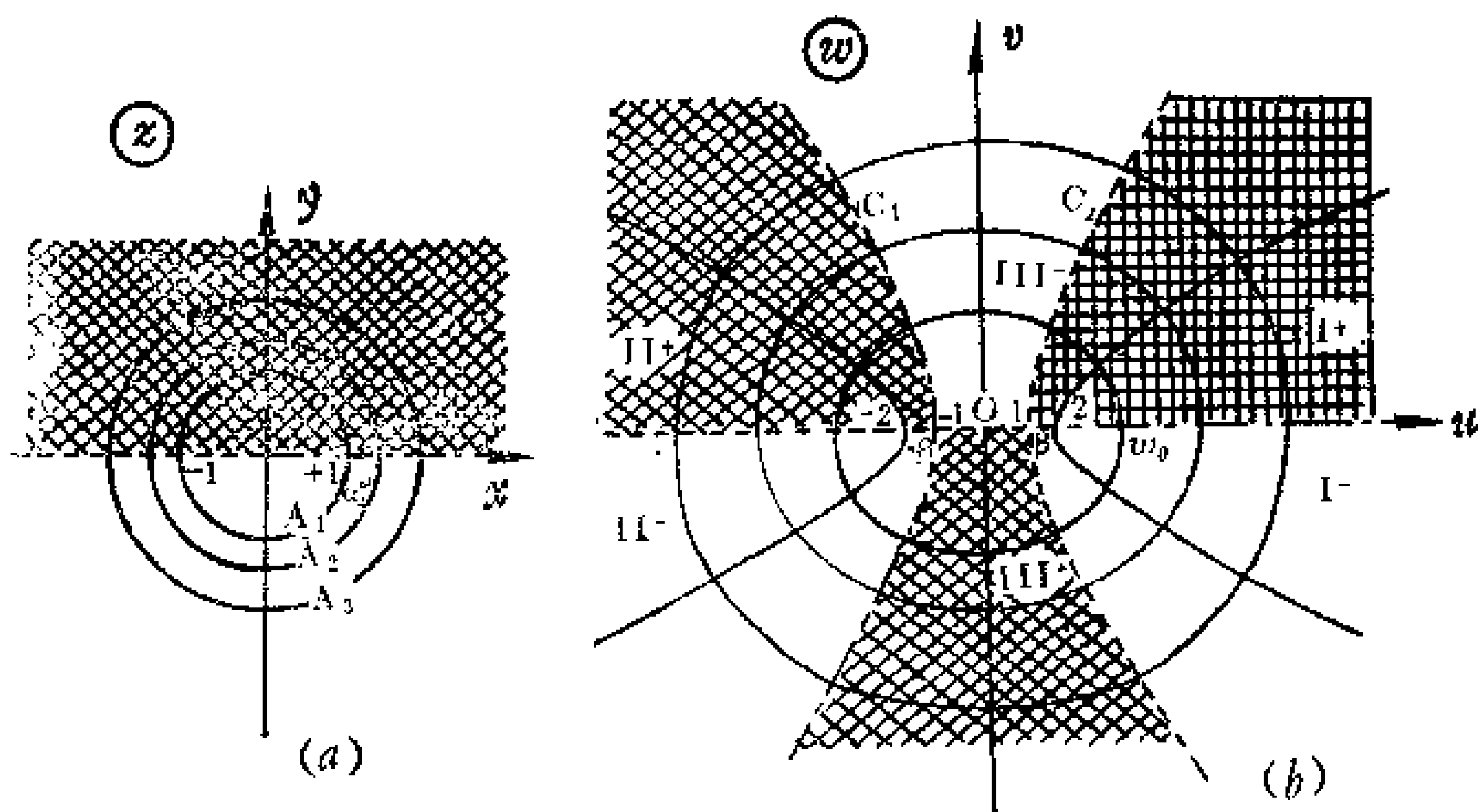
由于在方程 $$w^3-3w-2z=0$$
中，z 是 w 的单值函数，且
$$\frac{dz}{dw}=\frac{3}{2}(w^2-1).$$

$w=1,-1$都是一阶零点，$w=\infty$是二阶极点．从而函数具有简单枝点 $z=-1,z=1$及二阶枝点 $z=\infty$．对应的函数值分别是$w=1,-1,\infty$，除此而外，对于 z 的任一值，$G(z,w)=0$的三个根是不相等的．例如，当 $z=0$时，$w=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$．因此，Riemann曲面是由三个叶片所组成的．这三个叶片均于点 $z=\infty$处相连接．其中有二叶在点 $z=1$相连接．有二叶在 $z=-1$相连接．应用解三次方程的 Cardano 公式，便可以由 $G(z,w)=0$中求出 w_1,w_2,w_3 这三个分枝来，它们都是 z 的函数．由 Cardano 公式
$$u=\sqrt[3]{z+\sqrt{z^2-1}},\quad v=\sqrt[3]{z-\sqrt{z^2-1}}$$
及条件 $u\cdot v=1$.

现引入辅助函数
$$z=\cos 3\zeta \tag{1}$$
从而
$$u=\sqrt[3]{\cos 3\zeta+\sqrt{\cos^2 3\zeta-1}}=\sqrt[3]{\cos 3\zeta+i\sqrt{\sin^2 3\zeta}},$$
$$v=\sqrt[3]{\cos 3\zeta-\sqrt{\cos^2 3\zeta-1}}=\sqrt[3]{\cos 3\zeta-i\sqrt{\sin^2 3\zeta}},$$
其中$\sqrt{\sin^2 3\zeta}$设均取正号．则 u 与 v 均有三个值，根据条件 $u\cdot v=1$来取 u 与 v 的值．令
$$u=\sqrt[3]{\cos 3\zeta+i\sin 3\zeta}=\cos\zeta+i\sin\zeta=e^{i\zeta}$$
$$v=\sqrt[3]{\cos 3\zeta-i\sin 3\zeta}=\cos\zeta-i\sin\zeta=e^{-i\zeta},$$
这三个分枝 w_1,w_2,w_3 便可以用 ζ 来表示为：
$$w_1=e^{i\zeta}+e^{-i\zeta}=2\cos\zeta \tag{2}$$
$$w_2=\alpha e^{i\zeta}+\alpha^2e^{-i\zeta}=e^{i(\zeta+\frac{2}{3}\pi)}+e^{-i(\zeta+\frac{2\pi}{3})}$$
$$=2\cos\left(\zeta+\frac{2}{3}\pi\right) \tag{3}$$

$$w_3 = \alpha^2 e^{i\zeta} + \alpha e^{-i\zeta} = 2\cos\left(\zeta - \frac{2}{3}\pi\right) \qquad (4)$$

其中 $\alpha = e^{\frac{2}{3}\pi i}$, $\alpha^2 = \dfrac{1}{\alpha} = e^{-\frac{2}{3}\pi i}$, α 是 1 的立方根的一个虚根。应用关系式（1）的反函数便可以把 z 平面映射到 ζ 平面。然后应用关系（2），（3），（4）便可以把 ζ 平面映射到 w 平面。相继实行映射的结果，便把 z 平面映射到 w 平面（见指导图8·8）。其中借助于分枝 w_1 可把 z 平面映射到 w 平面区域 Ⅰ。z 平面的上半平面变为 Ⅰ^+，下半平面变为 Ⅰ^-；借助于 w_2，可把 z 平面映射为 Ⅱ；w_3 把 z 平面映射为 Ⅲ。对应于枝点 $z=1$, $w=-1$，分枝 w_2, w_3 在这种点上相等；对应于枝点 $z=-1$, $w=-1$，分枝 w_1, w_2 在这种点上的值相等。

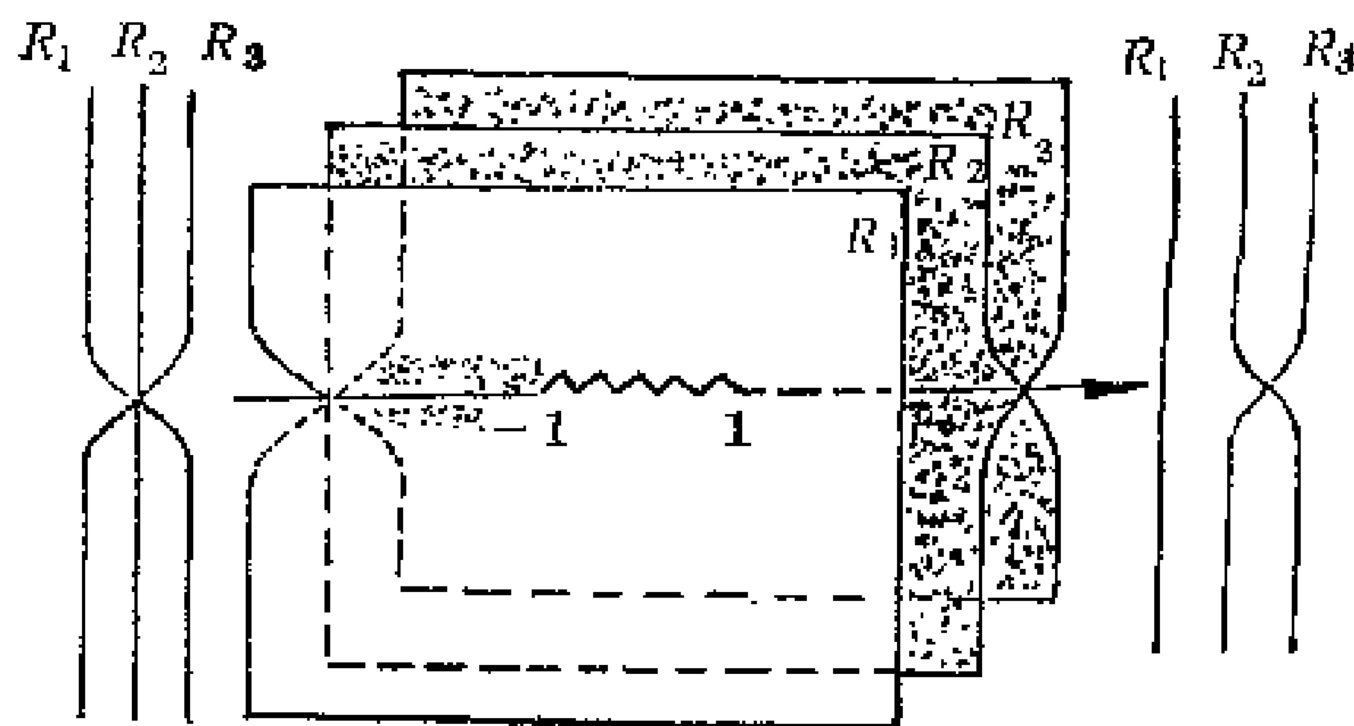


指导图　8·8

我们设想 z 所在 Riemann 曲面是由三个叶片 R_1, R_2, R_3 所组成。z 在 R_1, R_2, R_3 上的点分别和 w 所在的区域 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 相对应。当 z 由 R_1 的某一点起，沿着围绕枝点 $z=-1$ 的闭路的正向移动时，z 在 Riemann 曲面的三个叶片上便由 R_1 进入 R_2。此时，w 就由Ⅰ进入Ⅱ。但永远不通过 Ⅲ。因为Ⅱ与Ⅰ在对应点 $w=1$ 连接在

一起。同样，当 z 由 R_2 的一点起，沿着围绕枝点 $z=1$的小闭路移动时，w 由 Ⅱ进入Ⅲ。当 z 继续作第二次移动时，w 便回到它在Ⅱ 的起始位置。在这个枝点邻域内，z 不可能由 R_2 或 R_3 进入 R_1。因为 Ⅰ与Ⅱ，Ⅲ并不在对应点$w=-1$相连接。由指导图8·8(b)可知，w_1,w_2,w_3 这三个分枝在枝点 $z=\infty$是恒等的。

我们在实轴上（指导图8·8(a)）由 $z=1$至$+\infty$，由 $z=-1$ 至 $-\infty$，分别取为枝割线 L_1,L_2。L_1 与 L_2 分别映射为 c_1 与 c_2，且 c_1 过 $w=-1$，c_2过 $w=1$。沿 L_1 及L_2把 R_1,R_2,R_3 连接起来（如指导图8·9），Riemann 曲面由此作成。在曲面上的任一个连续曲线映射为平面 w 的连续曲线。例如 Riemann 曲面上以 $z=1,-1$ 为焦点的椭圆周 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 映射到 w 平面仍是椭圆周。设变点 z在 R_1上由一点 $z_0^{(1)}$开始沿 λ_1 变动。w 由位于 Ⅰ$^-$ 的一点 w_0 沿对应



指导图 8·9

椭圆周变动。当 z 通过正 y 轴时，点 z 仍在 R_1 上变动，而 w 进入 Ⅰ$^+$；当 z 通过负 x 轴时，点 z 由 R_1 进入 R_2，而 w 由 Ⅰ$^+$ 进入Ⅱ$^-$；当 z 沿λ_1变动一周时，z仍位于 R_2 上，设其位置为$z_0^{(3)}$。如果 z 继续沿 λ_1 作第二周的变动，当 z 通过正 x 轴时，点 z 便由 R_3 进入 R_2；当 z 通过负 x 轴时，它仍位于 R_2 上，设其位置为 $z_0^{(2)}$。如果 z 再继续沿 λ_1 作第三周的变动。当 z 通过正x轴时，点 z 由 R_2 进入 R_3；当过负 x 轴时，点 z 便由 R_2 进入 R_1 而回到开始的位置 $z_0^{(1)}$。

第九章　复变函数论在流体力学上的应用

同其他数学学科一样，复变函数论这门学科不仅在数学领域内有其重要应用，而且在数学领域之外的诸如流体力学、弹性力学、天体力学、热力学、电磁学、理论物理等等理论和技术领域里都有着较为广泛的应用。

本章仅就复变函数在流体力学上的应用作极为概括的论述。有兴趣的读者可阅读专门的书籍。

由复数的几何意义知道，复数表示着平面上的点。因此，当数学的或物理的问题可以由两个自由度来刻划时，原则上都可以用复变函数作为工具来解决。

一般来说，实际的问题，常常不是只用两个自由度就能刻划得了的。例如，汽车、船舶、飞机在空气或水里运动时，以及空气、水绕着高山、堤坝等障碍物流动等等，这些问题都是流体力学中的问题。由于客观实际的复杂性，因而使它们变成较复杂的研究课题。自然，要想较精确地刻划这些问题，只靠两个自由度是不够的。然而，有时在一定条件下，我们可以将它们近似地简化为“平面问题”，这样就可使用复变函数这个工具了。

本章将涉及的流体场是一种所谓不可压缩的、无源的、无旋的，稳定的平面的流动。

§9·1　不可压缩、无源、无旋、稳定的平面流动

不可压缩性　流体的密度不随压力的改变而改变的性质称做不可压缩性。一般的讲，液体都是不可压缩的。对于空气来说，如果

空气的流速不超过音速（330米/秒）的0.6至0.8倍时，也可将它看作是不可压缩的。

无源（或无流源）：设 v 为流体的速度。速度场在点 $z_0=x_0+iy_0\in G$（区域）的**发散量**（或简称散量）．记为 $\mathrm{div}\,v$。

在点 z_0 处如果 $\mathrm{div}\,v>0$，则称 z_0 为**泉源**；如果 $\mathrm{div}\,v<0$，则称 z_0 为**泉汇**。泉源与泉汇统称为**流源**。

如果一个区域G没有流源($\mathrm{div}\,v=0$)，就称该区域是**无源的**（或无流源）．

无旋　速度场在点 $z_0=x_0+iy_0\in G$（区域）处的**旋量**（或旋转量）记为 $\mathrm{rot}\,v$，在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处如果 $\mathrm{rot}\,v\neq0$，则称 z_0 为一个**涡旋**。

如果一个区域G 内没有涡旋($\mathrm{rot}\,v=0$)，就称该区域是**无旋的**。

稳定的　当流体各点的速度不随时间的改变而改变时，则称该流体的流动为**稳定流动**。

平面流动　如果流体在垂直于某平面 H_0 的每一条直线上，各点的速度均相同亦即在平行于某一固定平面 H_0 的所有平面上，流体流动的情况完全相同。（图9.1），则称该流体的流动为**平面流动**。

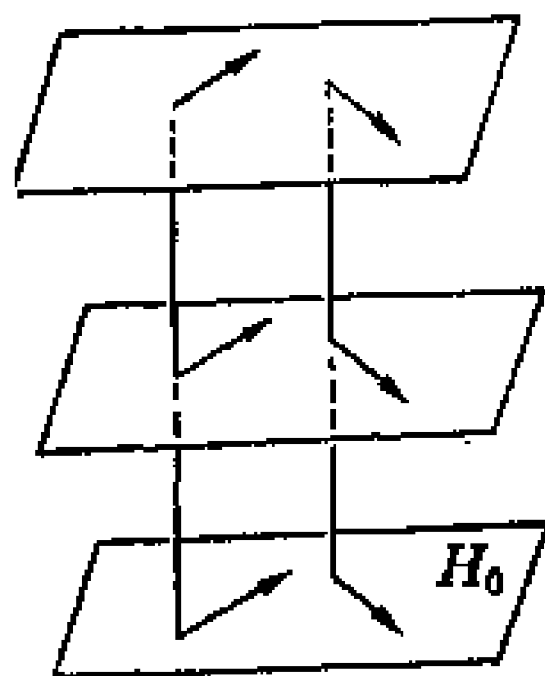


图　9·1

§9·2　解析函数在流体力学上的意义

描述不可压缩、无源、无旋、稳定的平面流动的解析函数

$$f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$$

称为**复势**（或流动的**特征函数**）；其中 $\varphi(x,y)$称为**势（位）函数**，$\psi(x,y)$称为**流函数**。线族 $\varphi(x,y)=C_1$（常数）称为**等势（位）线**，$\psi(x,y)=C_2$（常数）称为**流线**。在流线上的每一点处的切线恰好和

该点处速度的方向一致．因此在刻划流体的运动状况时，必须先画出流线．

设 $v=v_x+iv_y$，C 为简单闭曲线*，称数值

$$\Gamma=\int_C v_x dx+v_y dy$$

为 v 沿曲线 C 的环量；称数值

$$Q=\int_C v_x dy-v_y dx$$

为 v 通过曲线 C 的流量．我们把 $\Gamma+iQ$ 称为环流量．

今设 $\frac{\partial v_x}{\partial x}$，$\frac{\partial v_x}{\partial y}$，$\frac{\partial v_y}{\partial x}$，$\frac{\partial v_y}{\partial y}$ 在区域 G 内均为连续函数，则在不可压缩、无源、无旋、稳定的平面流动中，函数

$$g(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y),\quad z\in G$$

为一复势．其中

$$\varphi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_x dx+v_y dy \tag{1}$$

$$\psi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_x dy-v_y dx \tag{2}$$

事实上，由于 G 为无源的，故有

$$\operatorname{div}v=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{3}$$

由于 G 为无旋的，故有

$$\operatorname{rot}v=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0. \tag{4}$$

所以（1）与（2）这两个曲线积分，都与积分路无关．由曲线积分的性质有

$$d\varphi=v_x dx+v_y dy.$$

---

* C亦可为一段弧．

$$d\psi = v_x dy - v_y dx \tag{5}$$

由此可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

再由所设 v_x、v_y 关于 x、y 的四个偏导数都在G内连续可知 φ、ψ 关于 x, y 的四个偏导数都在G 内连续．因此 $g(z)$为 G内的解析函数。

（1）容易见到流动的速度 v 同复势 $g(z)$的关系是

$$\overline{g'(z)} = v = v_x + iv_y, \quad z \in G \tag{6}$$

事实上，由（5）式知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -v_y$$

则

$$\begin{aligned}\overline{g'(z)} &= \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}} \\ &= \overline{v_x - iv_y} \\ &= v_x + iv_y \\ &= v.\end{aligned}$$

（2）我们把函数 $\bar{v} = v_x - iv_y$ 称为**复速度**，则

$$\bar{v} = g'(z). \tag{7}$$

（3）流体通过曲线C的环流量为

$$\Gamma + iQ = \int_C \bar{v}\,dz. \tag{8}$$

以下例题均在§9·2的条件下讨论。

【例1】 设有一平面稳定流动的复势为

$$g(z) = z$$

试求流体在任意一点的速度、势（位）函数、流函数及流体流动的状况。

【解】 由（6）得流体在任意一点 z 的速度

$$v(z)=\overline{g'(z)}=1$$

位函数 $\varphi(x,y)=\mathrm{Re}[g(z)]=x$；

流函数 $\psi(x,y)=\mathrm{Im}[g(z)]=y$；

为了研究流体流动的状况，需先画出流线

$$y=C$$

（图 9·2）

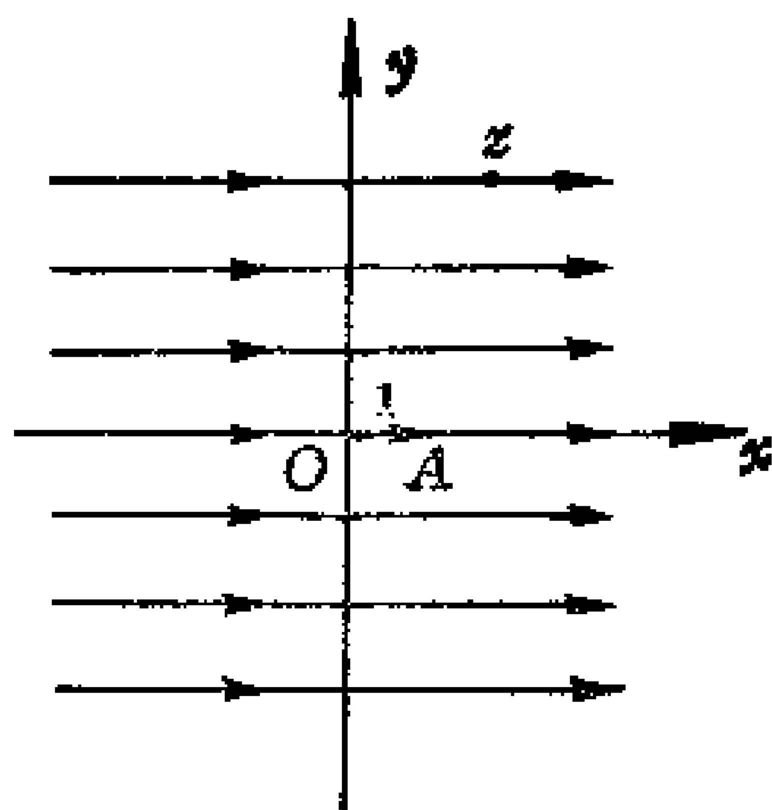


图 9·2

因而在流线上任意一点 z 处的速度 $v(z)=1$，所以在 z 点速度的大小等于向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模，速度的方向与向量 $\overrightarrow{OA}$ 的方向相同。由于 $\overrightarrow{OA}$ 为实轴上的单位向量，所以得知流体流动的状况是以等速度 1（单位）从平面的左侧向右侧流动。

【例 2】设有一平面稳定流动的复势为

$$g(z)=kz \quad (k<0)$$

试求流体流动的状况。

【解】流线为

$$ky=C_1$$

即

$$y=C$$

（图9·3）

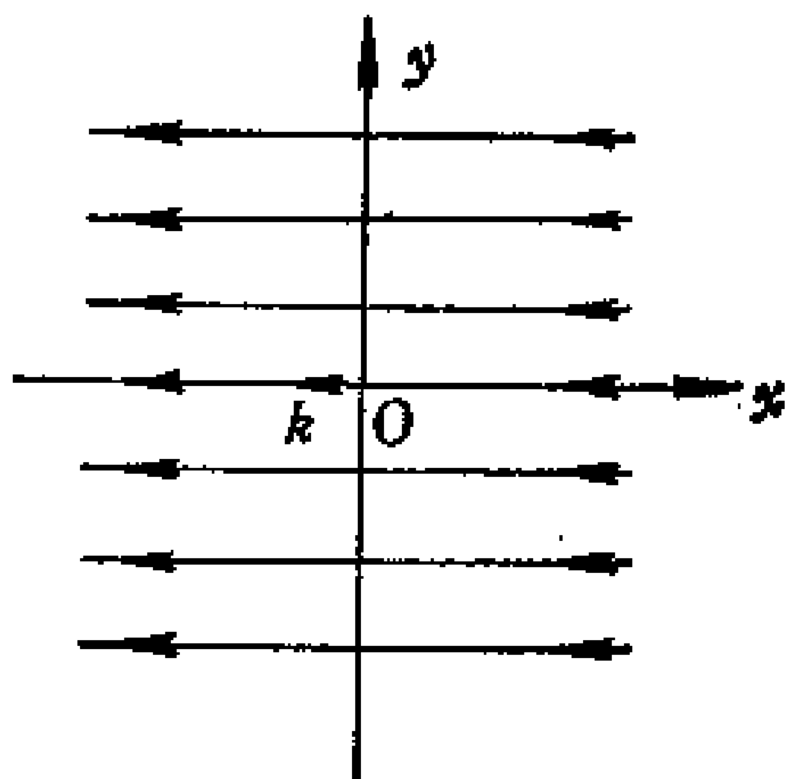


图 9·3

又在流线上任意一点 z 的速度

$$v(z)=\overline{g'(z)}=k$$

所以在 z 点速度的大小等于向量 $\overrightarrow{ok}$ 的模 $|k|$，速度的方向与向量 $\overrightarrow{ok}$ 的方向相同从右指向左。由此得知流体流动的状况是以等速度 k 从平面的右侧向左侧流动。

【例 3】 设一平面稳定流动的复势为

$$g(z)=z^2$$

试求流体流动的状况。

【解】 流线为

$$2xy=C_1$$

即

$$xy=C$$

（图 9·4）

又在流线上任意一点 z 处的速度为

$$v(z)=\overline{g'(z)}=2\bar{z}.$$

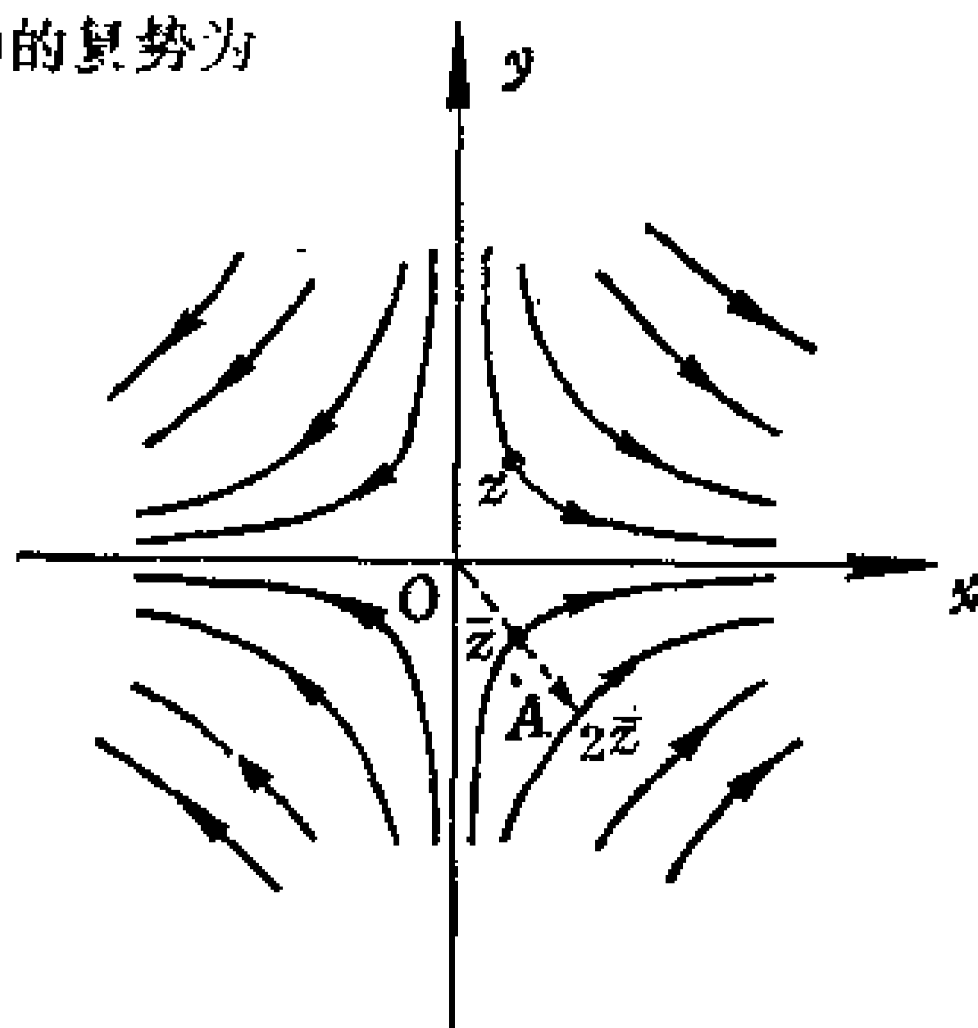


图 9·4

所以在 z 点速度的大小等于向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模 $|2\bar{z}|=2|z|$，速度的方向与 $\overrightarrow{OA}$ 的方向相同（图 9·4）为从实轴的上、下方逼近实轴。由此得知流体流动的状况是流体分别从平面上下两方用相同的速度流动，而在实轴相遇，并在实轴附近向左右两方发散，在点 z 速度的绝对值与 z 到原点的距离成比例。原点是个临界点，在此处的速度等于零。

【例 4】 设一平面稳定流动的复势为

$$g(z)=a\log z\quad(a>0).$$

试求流体流动的状况。

【解】 流线为

$$y=a\theta=C_1$$

其中 $\theta=\arg z$，即

$$\theta=C$$

（图 9·5）

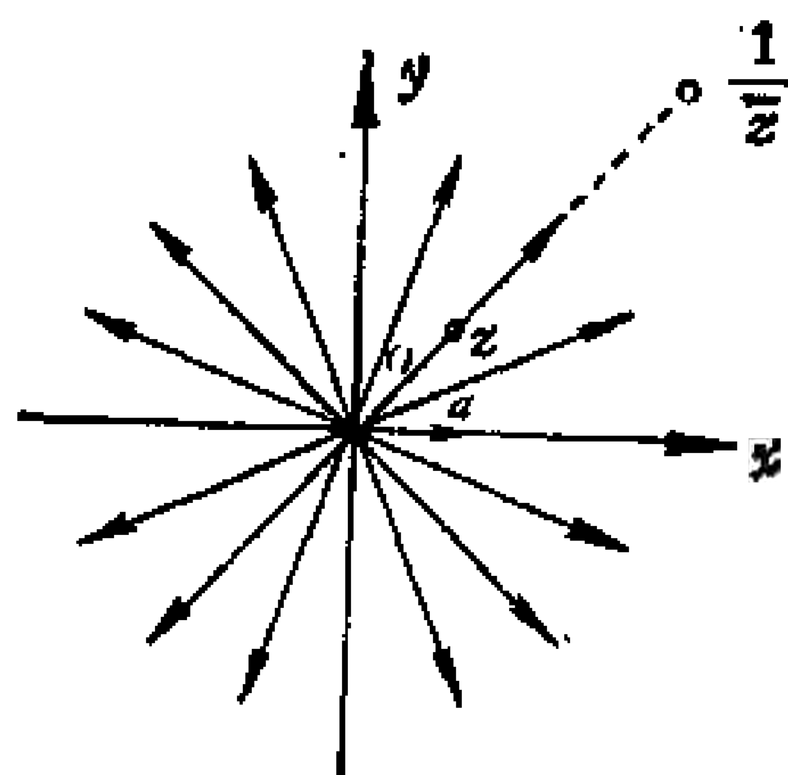


图 9·5

又在流线上任意一点 z 处的速度

$$v(z)=\overline{g'(z)}=\frac{a}{\bar{z}}$$

由 z 易画出 $\frac{1}{\bar{z}}$，而 $a>0$，所以 $\frac{a}{\bar{z}}$ 的方向与 $\frac{1}{\bar{z}}$ 的方向相同亦即与 $\overrightarrow{oz}$ 的方向相同．所以在任意一点 z 处的速度方向为 $\overrightarrow{oz}$ 的方向．于是流体流动的状况是由原点发出的沿着各个方向的射线运动．原点是一个流源，点 z 处的速度的绝对值与 a 成正比，与该点到原点的距离成反比．

【例 5】 设有一流体的流动状况为：以等速 k 从平面的右侧向左侧流动（图 9・3）．试求刻划该流动的复势．

【解】 设所求复势为 $g(z)$，则因

$$v=\overline{g'(z)}=k$$

所以

$$g(z)=\bar{k}z.$$

又因流体是从平面的右侧向左侧流动，所以流体在任意一点的速度 $k<0$，于是 $\bar{k}=k$，故得

$$g(z)=kz\quad(k<0).$$

§9・3　关于飞机翼升力的计算

我们都知道，飞机之所以能在天空中飞行，主要是由于空气对机翼有一种升力．因此，计算升力对于研究飞机的飞行无疑是重要的．显然，飞机的飞行问题不是一个平面问题，研究、计算升力问题，通常是采用多次实验的办法．然而，也可以用与实验配合将问题化为平面问题的办法来处理．

首先，假设飞机是以匀速运动的．其次，我们将坐标系取在飞机上，这样，对于坐标系而言，飞机是静止的而空气是迎着飞机而流动的．于是离飞机很远的地方的空气的速度可以看成是不变的．最后，我们设想机翼很长，因此垂直机翼的诸平行平面与机翼相交的诸截面（通常叫做机翼剖面），可以看成是全等的，并且在每一个垂直机翼的平面上，空气流动的情形也可以看成是相同的（自然，

在离机身或翼端很近的平面上不能这样考虑）．这样一来，就将飞机飞行的问题近似地变成了“平面流动”的问题．

设流体环绕着某一边界为简单闭曲线C的平面物体流动* （机翼剖面的边界为此特殊情形）．在曲线 C 上压力 p 的方向沿着法线向内，因此作用在C 上的线元素（微元）dz 上的力等于

$$pidz$$

则作用于曲线C上的全部力P为

$$P=\int_C pidz$$

再由平面稳定流动区域中的伯努里公式

$$p=A-\frac{\rho}{2}|v|^2$$

（其中，p 为任意一点 z 处的压力，v 为流体在点 z 处的流速，ρ 为流体密度，A 为常数）得

$$P=\int_C pidz=\int_C Aidz-\frac{\rho i}{2}\int_C |v|^2dz=-\frac{\rho i}{2}\int_C |v|^2dz.$$

这个P即为所求的升力，其中积分路线的方向是使机翼剖面在其左方．由于C即流线，所以知道流速的方向是与曲线C的切线方向相同的．

如果设 $F(z)$为复速度，$v=|v|e^{i\theta}$，$dz=e^{i\theta}ds$ 则

$$|v|=ve^{-i\theta}=\overline{F(z)}e^{-i\theta}\qquad（因\ F(z)=\bar{v}）$$

于是升力

$$\begin{aligned}P&=-\frac{\rho i}{2}\int_C[\overline{F(z)}]^2e^{-2i\theta}dz\\&=-\frac{\rho i}{2}\int_C[\overline{F(z)}]^2e^{-i\theta}ds\\&=-\frac{\rho i}{2}\int_C\overline{[F(z)]^2dz}\ .\end{aligned}$$

---

* 作平面稳定、无源、无旋的流动．

§9·4　圆域上的 Dirichlet 问题

我们要求出一个在区域 G 内调和且在 $\overline{G}$ 上连续的函数 $u(z)$，使它在 G 的边界上取已经给定的连续值 $u(\zeta)$。

在物理学中，当一个区域边界上的流速或者势能已经知道时，要求出这个区域内的流场的速度或静电场的势能，这便是 Dirichlet 问题。

当区域 G 是一个圆域 $B\{z: |z|<R\}$时，这个问题的解就是 Poisson积分所给出的函数

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta \qquad (1)$$

其中 $z=re^{i\varphi}$ 是圆域 B: $|z|<R$内任一点。

$\zeta=Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，是圆周$C$: $|\zeta|=R$上的点； $u(z)$ 是给定的圆周 C: $|\zeta|=R$ 上的连续函数。

【证明】首先证明 $u(z)$在 $|z|<R$ 内调和。

由于

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}=\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\zeta}+\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\bar{\zeta}+\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)$$

$$id\theta=\frac{d\zeta}{\zeta}$$

所以有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

因而

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}u(\zeta)\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

是函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}u(\zeta)\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

的实部。而函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+z\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)}{\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right]$$

括号内的积分都是 Cauchy 型积分(第三章习题 9)，所以 $f(z)$在 $|z|<R$ 是解析函数。根据定理 1，故得证 $u(z)$在 $|z|<R$ 是调和函数。

其次证明 $u(z)$在 $|\zeta|=R$上取值为 $u(\zeta)$。

在 $|\zeta|=R$ 上任取一点 $\zeta_0=\mathrm{R}e^{i\varphi_0}$，去证明

$$\lim_{z\to\zeta_0}u(z)=u(\zeta_0)\quad(|z|<R).$$

或者去证明

$$\lim_{z\to\zeta_0}|u(z)-u(\zeta_0)|=0.$$

首先应用 Poisson 积分公式，当一个调和函数在闭圆上恒为 1 时，有

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

因此

$$u(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta_0)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

于是有

$$u(z)-u(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(\zeta)-u(\zeta_0)]\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta. \tag{2}$$

对于圆周 $C: |\zeta|=R$ 上的点 ζ 趋于点 $\zeta_0=Re^{i\theta_0}$ 时，由于 $u(\zeta)$在 $|\zeta|=R$ 上连续，因此对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $|\theta-\theta_0|<2\delta$ 时

$$|u(\zeta)-u(\zeta_0)|<\varepsilon$$

从而得

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-2\delta}^{\theta_0+2\delta}\frac{[u(\zeta)-u(\zeta_0)](R^2-r^2)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta\right|$$

$$\leqslant\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_{\theta_0-2\delta}^{\theta_0+2\delta}\frac{|u(\zeta)-u(\zeta_0)|}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

$$<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\theta_0-2\delta}^{\theta_0+2\delta}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta=\varepsilon \tag{3}$$

对于圆域：$|z|<R$ 内的点$z=re^{i\varphi}$ 趋于点 $\zeta_0=Re^{i\theta_0}$ 时，对于适合 $|\varphi-\theta_0|<\delta$，$|\theta-\theta_0|>2\delta$ 的 φ 与 θ 有不等式

$$|\theta-\varphi|\geqslant|\theta-\theta_0|-|\theta_0-\varphi|>2\delta-\delta=\delta$$

因此 $\cos(\theta-\varphi)\leqslant\cos\delta$, 从而有

$$R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2\geqslant R^2-2Rr\cos\delta+r^2>4Rr\sin^2\frac{\delta}{2}$$

令

$$A=4Rr\sin^2\frac{\delta}{2},\qquad M=\int_0^{2\pi}|u(\zeta)-u(\zeta_0)|\,d\theta.$$

因此得到

$$\left|\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(\zeta)-u(\zeta_0)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta\right|\leqslant\frac{M}{2\pi A}(R^2-r^2).$$

当 $r\to R$时，上式右端趋于0，即对任意 $\varepsilon>0$,有正数 $\rho>0$，使当

$R-\rho<r<R$时，

$$\frac{M}{2\pi A}(R^2-r^2)<\varepsilon \tag{4}$$

于是对于圆域$|z|\leqslant R$内的任意一点$z=re^{i\varphi}$，当$z\to\zeta_0$时，由（3）式与（4）式可看到只要满足不等式$R-P<r<R$，$|\varphi-\theta_0|<\delta$就有

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(\zeta)-u(\zeta_0)]\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-2\delta}^{\theta_0+2\delta}[u(\zeta)-u(\zeta_0)]\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta\right|$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0+2\delta}^{\theta_0-2\delta}[u(\zeta)-u(\zeta_0)]\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta\right|$$

$$\leqslant 2\varepsilon$$

由ε的任意性，（2）式得证。

习　题　(9·1)

1．试求以$\dfrac{1}{z^2-1}$为速度的流体沿$|z-1|=1$，$|z+1|=1$及$|z|=3$的环量与流量。

2．试求$v=\dfrac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2}$的流体沿$C$的环量与流量，其中，$C$为：$|z|=R+1$，$R>0$。

3．设一流体流动的复势的位函数$\varphi(x,y)=x+1$，试求复势$g(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$，使其满足$g(-1)=0$，并求流体流动的状况。

学 习 指 导

一、内容与要求

复变函数论在多种学科里都有应用。本章仅就它在流体力学中的应用作了极简单的介绍。

首先，我们要知道，用复变函数的理论所能处理的问题只能是"平面问题"。本章所涉及的是所谓不可压缩的、无源的、无旋的、稳定的平面流动。

其次，要弄清"不可压缩"、"无源"、"无旋"、"稳定的平面流动"的含义。

最后，要记住"环量"、"流量"、"复势"、"复速度"的定义及它们的计算；还要记住复速度与复势之间的关系及复速度与速度间的关系。

二、习题解答

1. 【解】

由(8)(§9·2)，沿 $|z-1|=1$的环流量为

$$\Gamma+iQ=\int_{|z-1|=1}\bar{v}\,dz=\int_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}dz$$
$$=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-1},1\right)$$
$$=2\pi i\left[\lim_{z\to1}(z-1)\frac{1}{z^2-1}\right]$$
$$=\pi i.$$

所以，$\Gamma=0$，$Q=\pi$。

沿 $|z+1|=1$的环流量为

$$\Gamma+iQ=\int_{|z+1|=1}\bar{v}\,dz=\int_{|z+1|=1}\frac{1}{z^2-1}\,dz$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, -1\right)$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{z^2-1}\right]$$

$$= -\pi i.$$

所以，$\Gamma = 0$，$Q = -\pi$。

沿 $|z| = 3$的环流量为

$$\Gamma + iQ = \int_{|z|=3} \bar{v}\, dz$$

$$= \int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, -1\right)\right]$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0$$

所以，$\Gamma = Q = 0$。

2. 【解】

由(8)(§9·2)得

$$\Gamma + iQ = \int_C \bar{v}\, dz = \int_C \frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2} dz$$

$$= 2\pi i \cdot [\operatorname{Res}(\bar{v}, R) + \operatorname{Res}(\bar{v}, -R)]$$

而

$$\operatorname{Res}(\bar{v}, R) = \lim_{z\to R} \frac{d}{dz}\left[(z-R)^2 \cdot \frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to R} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-1}{(z+R)^2}\right]$$

$$= \frac{R^2+1}{4R^3}.$$

$$\text{Res}(\bar{v},-R)=\lim_{z\to -R}\frac{d}{dz}\left[(z+R)^2\cdot\frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to -R}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-1}{(z-R)^2}\right]$$

$$=-\frac{R^2+1}{4R^3}\ .$$

所以

$$\Gamma+iQ=\oint_C\bar{v}\,dz=0$$

于是

$$\Gamma=Q=0.$$

3．【解】

由 C.—R.方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1=\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

得

$$\psi(x,y)=y+D(x).$$

又

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=D'(x)$$

由此得

$$D(x)=C$$

所以

$$g(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$$
$$=(x+1)+i(y+c)$$

因需 $g(-1)=0$，即

$$g(-1)=(-1+1)+i(0+c)=0.$$

所以 $C=0$，于是所求的复势为

$$g(z)=(x+1)+yi$$

$$= z + 1.$$

为说明这一流动状况，先画出流线

$$y = m \quad （常数）.$$

（图9·2）．因在流线上每点 z 的速度

$$v = \overline{g'(z)} = 1.$$

所以与例1一样，流体流动的状况是以等速度1（单位）从平面的左侧向右侧流动。

编　　后

本书由东北师大数学系朱静航主编，参加编写的有朱静航（第一、二章）、富艳蓉（第三章）、肖荫庵（第五、九章）、梁世安（第六、八章）、李殿国（第四、七章）。本书插图均由梁世安绘制。辽宁大学数学系赵康、范伯林等同志审校。

由于时间仓促和我们水平的限制，缺点和不足之处、甚至错误，在所难免。至盼广大读者及时提出批评、指正。

编　　者

[General Information]
□□=□□□□□
□□=
□□=538
SS□=0
□□□□=
Vss□=76868299